Acta et Commentationes, Sciences of Education, nr. 2(36), 2024 ISSN 1857-0623
p. 123-133 E-ISSN 2587-3636

CZU: 512+514:37.02(438+478) DOI: 10.36120/2587-3636.v36i2.123-133

ASPECTE ALE TRANSPUNERII DIDACTICE A CONȚINUTURILOR PENTRU ACTIVITATEA EXTRACURRICULARĂ LA MATEMATICĂ. SIMEDIANELE TRIUNGHIULUI

Marcel TELEUCA, dr., conf. univ.
https://orcid.org/0000-0003-1730-5284
Universitatea de Stat din Moldova, IMI „V. Andrunachievici”
Larisa SALI, dr., conf. univ.
https://orcid.org/0000-0003-1172-3055
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”, Republica Moldova

Rezumat. În articol este analizată o modalitate de tratare didactică a conceptului „simediana triunghiului”. Sunt expuse opiniile autorilor privind transpunerea didactică a conținuturilor și realizat design-ul unei activități extracurriculare cu elevii capabili de performanțe înalte la matematică.
Cuvinte cheie: competență matematică, îmbogățire curriculară, linii și puncte importante în triunghi, simediană.

ASPECTS OF THE DIDACTIC TRANSPOSITION OF THE CONTENTS FOR THE EXTRACURRICULAR ACTIVITY IN MATHEMATICS. SIMEDIANS OF THE TRIANGLE

Abstract. The article analyzes a method of didactic treatment of the "symmedian" concept. The opinions of the authors regarding the didactic transposition of the contents are presented and the design of an extracurricular activity with students capable of high performance in mathematics is carried out.
Key words: mathematical competence, curriculum enrichment, lines and important points in the triangle, symmedian.

Transpunerea didactică a conținuturilor matematice savante constituie una dintre abilitățile importante care trebuie dezvoltată la viitorii profesori de matematică. În Didactica matematicii cunoașterea are origine în matematica teoretică, dar se realizează conturând traseul în „călătoria cunoașterii” de la sursele sale științifice la programe și manuale. Predarea matematicii se poate concentra foarte repede pe obiecte ale cunoașterii, din cauza invarianței lor. O conceptualizare puternică a conținuturilor matematice apare foarte importantă pentru pregătirea profesională a cadrelor didactice. În procesul de învățare a matematicii, elevul cu abilități mai pronunțate nu trebuie numai să urmărească și să înțeleagă raționamentele profesorului, ci este indicat ca el să parcurgă sub îndrumarea acestuia un traseu de cunoaștere, având multiple puncte comune cu cel care are loc în mintea creatorului de matematică.

Expunem în continuare design-ul unei activități extracurriculare cu elevii capabili de performanțe înalte la matematică în vederea familiarizării elevilor cu noțiunea de simediană și unele aplicații ale ei la rezolvarea problemelor în clasa a IX-a. Subiectul lecției este *„Simedianele triunghiului. Proprietăți”* și se referă la unitatea de învățare: *„Relații trigonometrice în triunghi”*.

Obiective:

1.1. Aplicarea unor metode diverse pentru determinarea unor distanțe, a unor măsuri de unghiuri.

1.2. Interpretarea coliniarității, concurenței sau paralelismului în relație cu proprietățile unor configurații geometrice.

1.3. Identificarea condițiilor necesare pentru ca o configurație geometrică să verifice egalitatea unor rapoarte de lungimi, de măsuri ale unghiurilor.

1.4. Aplicarea elementelor de trigonometrie și a relațiilor de asemănare la rezolvarea problemelor de loc geometric.

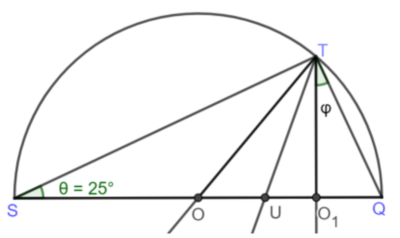
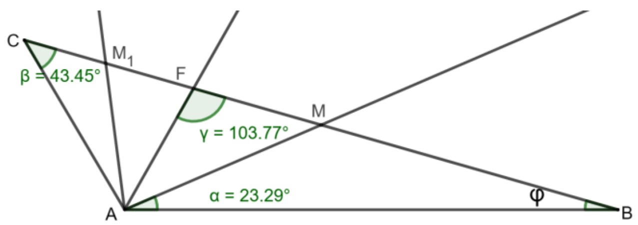
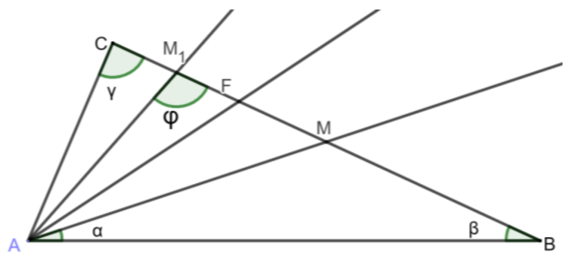
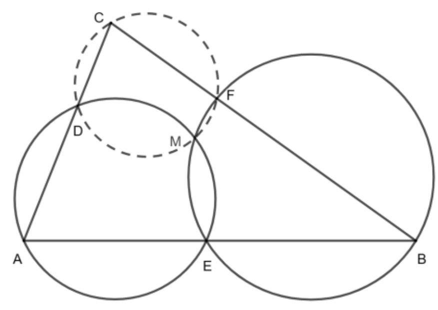
Tipul lecției: Lecție de formare a capacităților de aplicare a cunoștințelor.

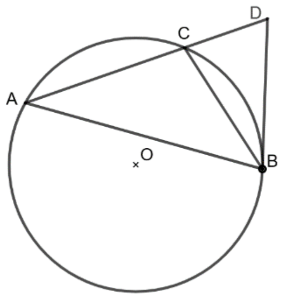
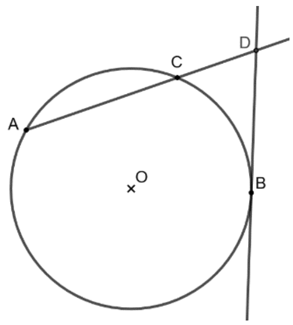
Tehnologii didactice:

1. ***Forme:*** frontală; modelul Proctor; activitate independentă.
2. ***Metode:*** metoda exercițiului; metoda lucrului cu textul matematic; dezbateri; tehnica *Graficul conceptual*.

1. Evocare (20 minute)

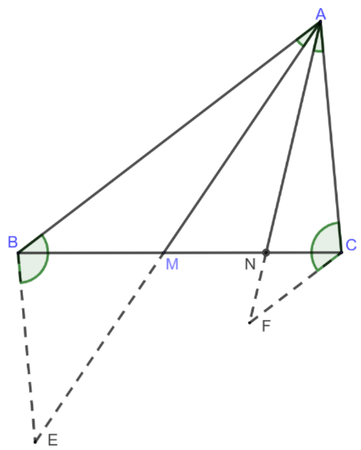
Rezolvarea problemelor (oral).

<table>
<tr>
<td>1. O – centrul semicercului.
TU – bisectoarea $\angle STQ$.
TO_1 – simetrica TO în raport cu TU.
Aflați măsura unghiului φ.
Care este tipul triunghiului TO_1Q.

</td>
<td>2. În triunghiul ABC:
AF – bisectoare a unghiului $\angle BAC$
AM_1 simetrica AM în raport cu AF
Calculați măsura unghiului φ.

</td>
</tr>
<tr>
<td>3.$\Delta ABC, AF$ – bisectoare a unghiului $\angle BAC$
AM_1 simetrica AM în raport cu AF
Exprimați măsura unghiului φ prin intermediul unghiurilor α, β, γ.

</td>
<td>4. $\Delta ABC, D \in AC, E \in AB, F \in BC$.
$A, E, D \in \omega_1, B, E, F \in \omega_2, C, F, D \in \omega_3$,
$\omega_1 \cap \omega_2 = \{M\}$.
Formulați o afirmație privind poziția relativă a cercurilor $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

</td>
</tr>
</table>

5. În figura dată *DB* este tangentă la cerc. Identificați triunghiuri asemenea.  	6. În figura dată *DB* este tangentă la cerc, $AC = m, CD = n.$ Stabiliți care este lungimea segmentului *DB*. 

2. Realizarea sensului (30 minute)

Teorema Steiner. Fie triunghiul ABC și punctele $M, N \in [BC]$. Dacă $\angle MAB \equiv \angle NAC$, atunci $\frac{BM}{CM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$.



Demonstrație.

Realizăm următoarele construcții suplimentare $BE \parallel AC$ și $CF \parallel AB$ (unde $BE \cap AM = \{E\}$ și $CF \cap AN = \{E\}$).

Vom expune demonstrația în două coloane.

Constatări	**Argumente**
1. $\angle ABE \equiv \angle ACF$	1. Unghiurile au laturi paralele.
2. $\angle MAB \equiv \angle NAC$	2. Din ipoteză.
3. $\Delta ABE \sim \Delta ACF$	3. Din primele două constatări.
4. $\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC}$	4. Din asemănarea $\Delta ABE \sim \Delta ACF$.
5. $\Delta BME \sim \Delta CMA$	5. Din teorema fundamental a asemănării ($BE \parallel AC$).
6. $\frac{BM}{CM} = \frac{BE}{AC}$	6. Din asemănarea $\Delta BME \sim \Delta CMA$.
7. $\Delta BNA \sim \Delta CNF$	7. Din teorema fundamental a asemănării ($CF \parallel AB$).
8. $\frac{BN}{CN} = \frac{AB}{CF}$	8. Din asemănarea $\Delta BNA \sim \Delta CNF$.
9. $\frac{BM}{CM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{BE}{AC} \cdot \frac{AB}{CF} = \frac{BE}{CF} \cdot \frac{AB}{AC}$	9. Produsul rapoartelor din constatările 6 și 8.
10. $\frac{BM}{CM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$	10. Din constatările 4 și 9.

Definiție. În geometrie, simedianele sunt trei linii particulare asociate fiecărui triunghi, construite prin reflectarea simetrică a fiecărei mediane a triunghiului în raport cu bisectoarea care pornește din același vârf.

Vom menționa trei proprietăți de bază ale simedianei, care vor fi folosite în continuare.

Proprietatea 1. Bisectoarea unghiului ∠BAC este și bisectoarea unghiului dintre mediana AM și simediana AN ale triunghiului ABC.

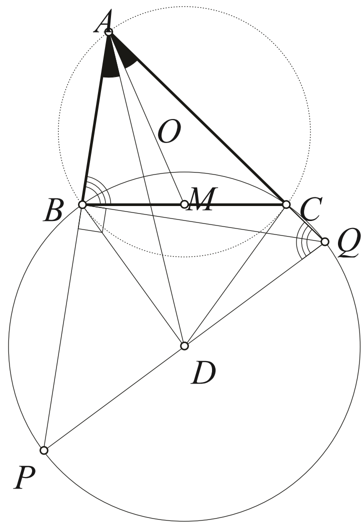
Proprietatea 2. Cele trei simediane ale triunghiului sunt concurente în punctul lui Lemoine.

Ross Honsberger a numit existența acestui punct „una dintre bijuteriile din coroana geometriei moderne”.

Proprietatea 3. Simediana AD împarte latura BC în raportul $\frac{AB^2}{AC^2}$. (Rezultă din teorema lui Steiner).

Acum putem trece la demonstrarea unei leme, pe care o vom folosi în rezolvarea mai multor probleme.

Lema. Fie *ABC* un triunghi înscris în cercul Γ. Fie tangentele la Γ în punctele *B* și *C* se intersectează în punctul *D*. Atunci *AD* coincide cu simediana triunghiului *ABC*.

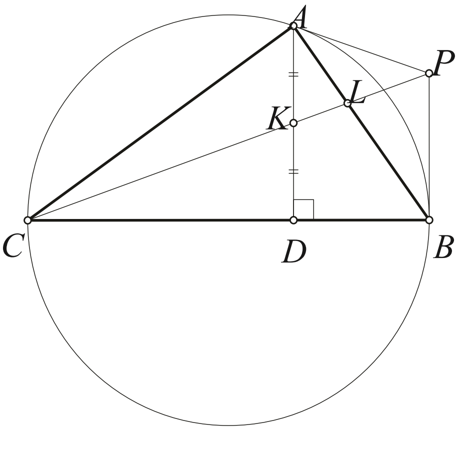


Demonstrație. Fie *O* centrul cercului Γ și fie *ω* cercul de centru *D* și raza *DB*. Notăm cu *P* și *Q* intersecțiile dreptelor *AB* și *AC* cu *ω*. Din

$m(\measuredangle PBQ) = m(\measuredangle BQC) + m(\measuredangle BAC) = \frac{m(\measuredangle BDC)+m(\measuredangle BOC)}{2} = 90°$, rezultă că *PQ* este diametrul în *ω* și, deci, trece prin *D*. Cum $\angle ABC \equiv \angle AQP$ și $\angle ACB \equiv \angle APQ$, obținem că $\Delta ABC \sim \Delta AQP$. Dacă *M* este mijlocul lui *BC*, atunci punctele *M* și *D* sunt corespunzătoare în triunghiurile asemenea *ABC* și *AQP*, de unde $\angle BAM \equiv \angle QAD$, adică *AD* este simediana triunghiului *ABC*.

Începem cu câteva probleme simple care ilustrează unele aplicații ale lemei menționate.

Problema 1. Fie *ABC* un triunghi dreptunghic în *A* înscris în cercul *ω*. Tangentele în punctele *A* și *B* la *ω* se intersectează în *P*. Să se arate că dreapta *PC* trece prin mijlocul înălțimii din vârful *A*.



Gazeta Matematică

Demonstrație. Fie D piciorul înălțimii din vârful A, $\{L\} = AB \cap PC$ și $\{K\} = CP \cap AD$.

Din lemă obținem că *CL* este simediana triunghiului *ACB*. Deci,

$$\frac{LB}{LA} = \frac{BC^2}{AC^2}.$$

Aplicăm teorema lui Menelaos în triunghiul *ABD* pentru transversala *CKL* și obținem

$$\frac{KA}{KD} \cdot \frac{CD}{CB} \cdot \frac{LB}{LA} = 1 \Longleftrightarrow \frac{KD}{KA} = \frac{CD}{CB} \cdot \frac{LB}{LA} = \frac{CD}{CB} \cdot \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{CD \cdot BC}{AC^2} \quad (*)$$

Din teorema catetei avem $AC^2 = CD \cdot BC$. Înlocuind în (*) obținem $KA = KD$.

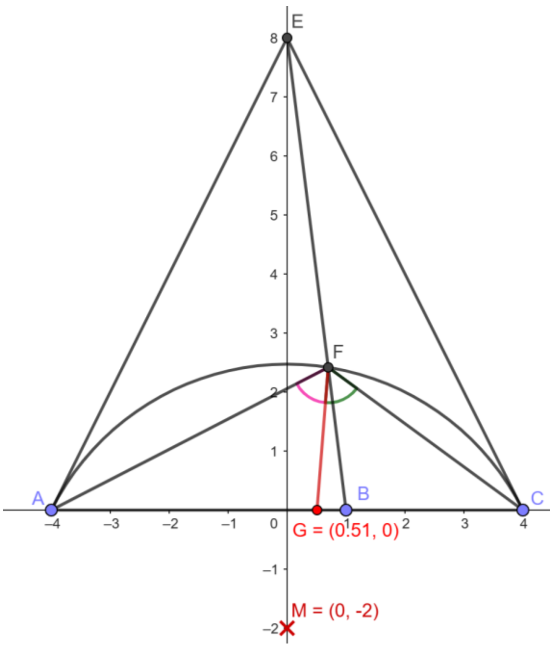
q.e.d.

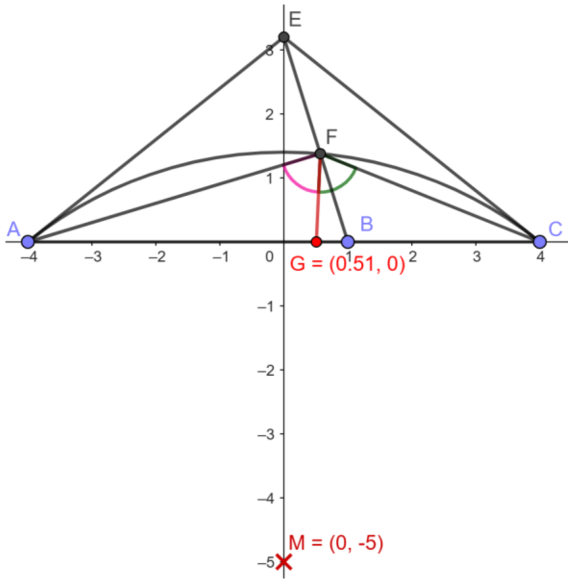
Observație. Dacă *M* este mijlocul laturii *BC*, atunci $\angle MAB \equiv \angle B \equiv \angle CAD$, deci *AD* este simediană. Cum *K* este intersecția simedianelor *CP* și *AD*, obținem că *într-un triunghi dreptunghic punctul lui Lemoine este mijlocul înălțimii duse din unghiul drept.*

Problema 2. Trei puncte *A*, *B*, *C* se află, în această ordine, pe o dreaptă. Fie Γ un cerc care trece prin *A* și *C* cu centrul M situat în exteriorul dreptei *AC*, punctul *E* este intersecția tangentelor la cerc, trasate prin *A* și *C*, iar cercul Γ intersectează segmentul *EB* în *F*. Să se demonstreze că intersecția bisectoarei unghiului *AFC* cu dreapta *AC* nu depinde de alegerea cercului Γ.

IMO, Shortlist, 2003

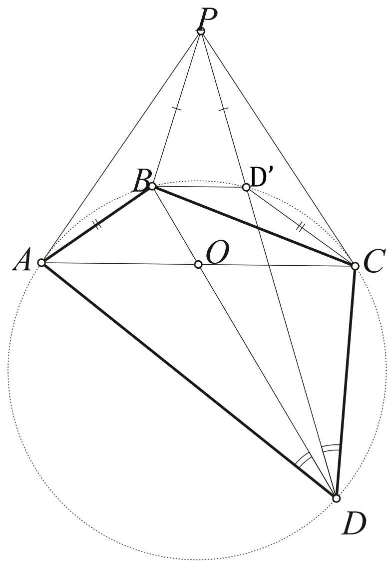
Demonstrație. Fenomenul poate fi observat în dinamică folosind diverse aplicații soft. În imaginile sunt prezentate două situații realizate în Geogebra.





Conform lemei obținem că *FB* este simediană în triunghiul *AFC*, de unde $\frac{FA^2}{FC^2} = \frac{AB}{BC}$, adică valoarea raportului $FA\colon FC$ este o valoare constantă. Însă, dacă *G* este piciorul bisectoarei din vârful *F*, atunci $\frac{AG}{CG} = \frac{FA}{FC} = const.$ Prin urmare, bisectoarea unghiului *AFC* întotdeauna trece printr-un punct fix de pe dreapta *AC*.

q.e.d.



Problema 3. Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil. Tangentele la cercul circumscris patrulaterului în punctele A și C se intersectează în punctul P care nu aparține dreptei BD, astfel încât $PA^2 = PB \cdot PD$.Să se demonstreze că segmentul BD înjumătățește segmentul AC.

Olimpiada Republicii Moldova, 2006

Demonstrație. Fie dreapta PD intersectează cercul circumscris patrulaterului a doua oară în punctul D'. Din puterea punctului avem:

$$PD' \cdot PD = PA^2 = PB \cdot PD \Leftrightarrow PD' = PB.$$

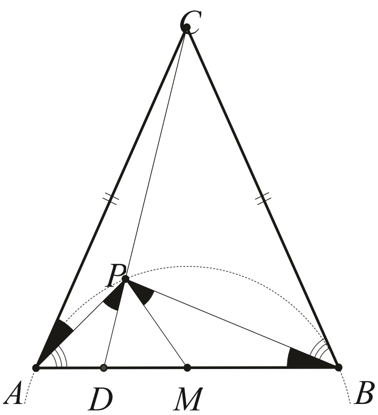
Atunci, din motive de simetrie, obținem că $ABD'C$ este trapez isoscel. Fie O mijlocul diagonalei AC. Din lemă obținem că PD' este simediană în triunghiul ADC, deci ∠ADO = ∠D′DC = ∠ADB. Deci, punctele B, O, D sunt coliniare, adică dreapta BD înjumătățește diagonala AC.

q.e.d.

3. Reflecție (30 minute)

Mai jos prezentăm încă câteva aplicații interesante, în care necesitatea de a folosi lema de mai sus este mai dificil de observat sau aplicația sa nu duce la rezolvarea directă a problemei propuse.

Vom realiza următoarea etapă a lecției conform Modelului Proctor. Clasa va fi divizată în trei subgrupe: A, B, C. Fiecare grup va rezolva o problemă timp de 15 minute. Grupele care au găsit soluția pe parcursul celor 15 minute (sau mai devreme) – vor prezenta problema și soluția întregii clase (timp de 5 minute). În cazul în care grupul nu reușește să rezolve problema, ei vor avea acces la consultația unui expert care cunoaște soluția și le va oferi sugestii suficiente pentru rezolvare.



Problema grupei A. Fie ABC un triunghi cu $AC = BC$. Fie P un punct în interiorul triunghiului astfel încât $\angle PAB = \angle PBC$. Dacă M este mijlocul lui AB, să se arate că unghiurile APM și BPC sunt suplementare.

Olimpiada Polonia, 2000; Moldova, 2006

Demonstrație. Fie ω cercul circumscris triunghiului APB. Din $\angle CAP \equiv \angle PBA$ și $\angle CBP \equiv \angle PAB$ rezultă că dreptele AC și BC sunt tangente la ω. Notăm $\{D\} = CP \cap AB$. Atunci, din Lemă obținem că PD este simediana triunghiului APB, adică $\angle APD \equiv \angle MPB$. Deoarece unghiurile APC și APD sunt suplimentare, rezultă că unghiurile APC și MPB sunt de asemenea suplementare, de unde $m(\angle APM) + m(\angle BPC) = 180^\circ$.

q.e.d.

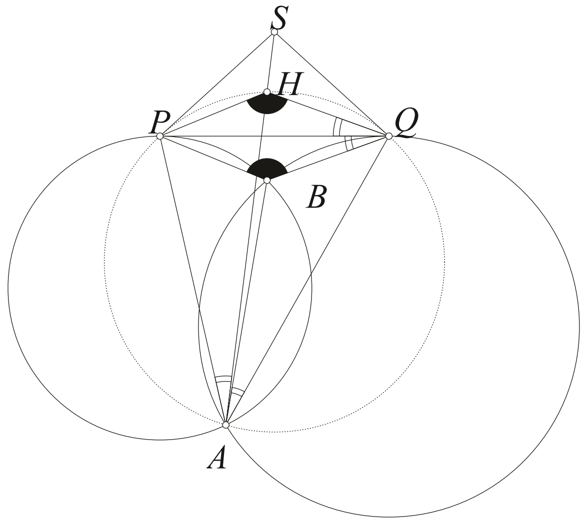
Problema grupei B. Două cercuri se intersectează în punctele A și B, iar una din tangentele comune intersectează cercurile în punctele P și Q. Tangentele în punctele P și Q la cercul circumscris triunghiului APQ se intersectează îın S, iar H este simetricul punctului B față de dreapta PQ. Demonstrați că punctele A, S și H sunt coliniare.

Baraj Vietnam, 2001

Demonstrație. Presupunem că B este mai aproape de dreapta PQ decât A (celălalt caz se rezolvă analog). Fie $\{R\} = PQ \cap AB$. Atunci din puterea punctului R avem

$$RP^2 = RB \cdot RA = RQ^2,$$

deci, AB este mediană în triunghiul APQ.



Din faptul că PQ este tangenta comună obținem

$$m(\measuredangle PHQ) = m(\measuredangle PBQ) = 180° - m(\measuredangle BPQ) - m(\measuredangle BQP) = 180° - m(\measuredangle PAB) - m(\measuredangle QAB) = 180° - m(\measuredangle PAQ).$$

Prin urmare punctul H aparține cercului circumscris triunghiului APQ. Atunci

$$\angle BAQ \equiv \angle PQB \equiv \angle HQP \equiv \angle HAP.$$

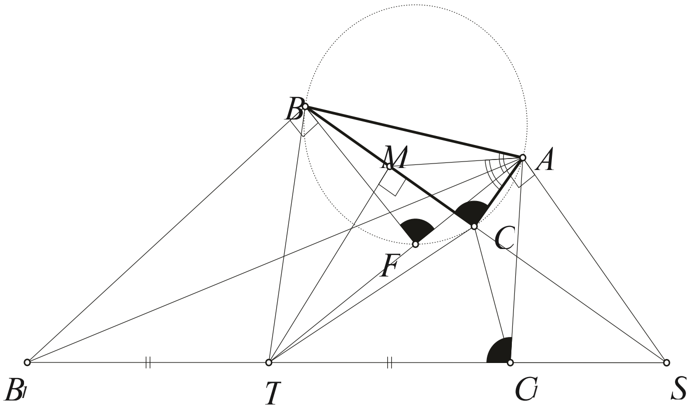
Din faptul că AB este mediană și $\angle BAQ \equiv \angle HAP$ obținem că AH este simediana triunghiului PAQ. Însă, conform lemei, AS este de asemenea simediană, de unde rezultă că dreptele AH și AS coincid, adică punctele A, H și S sunt coliniare.

q.e.d.

Problema grupei C. Triunghiul ABC este înscris în cercul ω. Tangentele la ω în punctele B și C se intersectează în T. Punctul S se află pe semidreapta (BC, astfel încât $AS \perp AT$. Punctele B_1 și C_1 se află pe semidreapta (ST, C_1 se află între B_1 și S, astfel încât $B_1T = BT = C_1T$. Să se arate că $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$.

Baraj SUA, 2007

Demonstrație. Fie M mijlocul laturii BC. Din lema obținem că AT este simediană în triunghiul ABC. Fie AT intersectează ω în F. Avem $\angle BAF \equiv \angle MAC$ și $\angle BFC \equiv \angle BCA$, deci, $\Delta BFA \sim \Delta MCA$ (UU), de unde $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BF}$. (1)



Cum $\angle TBF \equiv \angle BAT$, obținem că $\Delta TBF \sim \Delta TAB$, de unde:

$$\frac{AB}{BF} = \frac{AT}{BT}. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) obținem $\frac{AM}{MC} = \frac{AT}{BT} = \frac{AT}{C_1T} \Leftrightarrow \frac{AM}{AT} = \frac{MC}{C_1T}$. (3)

Triunghiul BTC este isoscel, deci $\angle TMC = 90^\circ = \angle TAS$, adică patrulaterul $TMAS$ este inscriptibil. Atunci $\angle AMC \equiv \angle ATC_1$. (4)

Din (3) și (4) obținem că $\Delta AMC \sim \Delta ATC_1$ (LUL).

Prin urmare $\angle ACB = \angle AC_1T$ și $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{2MC}{2C_1T} = \frac{AC}{AC_1}$.

Așadar, $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$ (LUL).

q.e.d.

4. Extindere

Extinderea cunoștințelor despre simediane și diverse locuri geometrice legate de ele o vom face prin familiarizarea (fără demonstrație) cu următoarea teoremă.

Teoremă (Lemoine). Fie K punctul lui Lemoine în triunghiul ABC. Punctele în care perechile de laturi sunt tăiate de către paralelele la laturile rămase, care trec prin K, se află pe un cerc, numit Primul cerc al lui Lemoine. Centrul acestui cerc este mijlocul lui KO, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

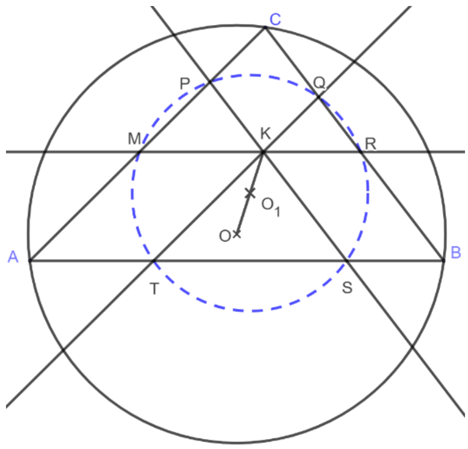


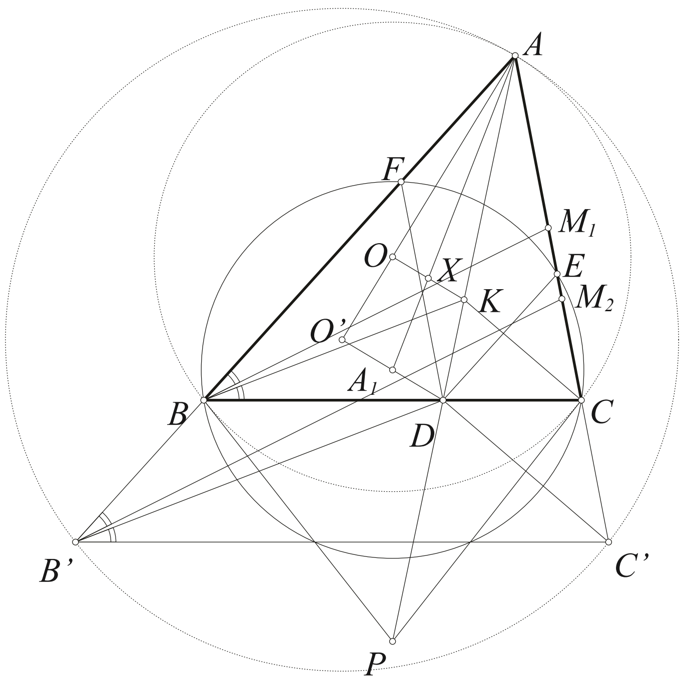
Figura alăturată executată în aplicația Geogebra permite vizualizarea rezultatului enunțat în teoremă.

Problema 7. Fie ω cercul circumscris triunghiului ascuțitunghic ABC. Tangentele la ω în B și C se intersectează în P, iar AP intersectează latura BC în punctul D. Punctele E și F sunt situate pe laturile AC și AB astfel încât $DE \parallel AB$ și $DF \parallel CA$.

Să se arate că punctele F, B, C și E sunt conciclice.

Baraj China, 2005

Demonstrație. Din lemă obținem că AD este simediana triunghiului ABC. Fie $K \in AD$ punctul lui Lemoine al triunghiului ABC. Prin punctul D ducem paralele la dreptele BK și CK, care intersectează prelungirile laturilor AB și AC în punctele B' și C' respectiv.

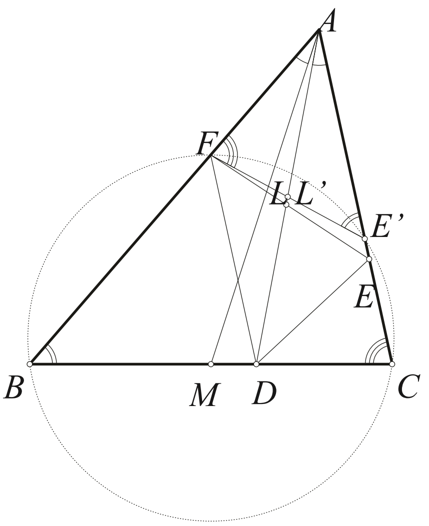


Fie M_1 mijlocul laturii AC, iar M_2 mijlocul segmentului AC'. Din $\frac{AB}{AB'} = \frac{AK}{AD} = \frac{AC}{AC'}$, rezultă că $BC \parallel B'C'$.

Atunci $BM_1 \parallel B'M_2$ și $\angle M_2B'A = \angle M_1BA = \angle CBK = \angle C'B'D$.

Obținem că $B'D$ este simediană în $AB'C'$. Analog și $C'D$ este simediană, de unde obținem că D este punctul lui Lemoine al triunghiului $AB'C'$. Fie O, O' centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și $AB'C'$ respectiv. Cum $DF \parallel AC'$, $DE \parallel AB'$ și $BC \parallel B'C'$, obținem că punctele B, F, E și C sunt situate pe primul cerc a lui Lemoine al triunghiului $AB'C'$. Atunci punctul A_1, centrul acestui cerc, este mijlocul segmentului DO'. Din $BC \parallel B'C'$ rezultă că punctele O, O', A sunt coliniare și $DO' \parallel KO$. Prin urmare, dreapta AA_1 înjumătățește segmentul KO. Analog demonstrăm că și dreptele BB_1 și CC_1 trec prin mijlocul segmentului KO.

Observația 1. Există o soluție mai simplă.



Fie M mijlocul laturii BC. Fie $\{L\} = AD \cap FE$. Cum $AFDE$ este paralelogram, obținem că $FL = LE$.

Fie cercul circumscris triunghiului BFC intersectează latura AC în E'. Fie L' mijlocul segmentului FE'. Patrulterul $AFE'C$ este inscriptibil, deci $\angle AE'F = \angle B$ și $\angle AFE' = \angle C$, de unde $AFE' \sim ACB$. Punctele M și L' sunt corespunzătoare în triunghiurile ABC și AFE', deci $\angle BAM = \angle L'AE$, adică punctul L' aparține simedianei AD. Prin urmare, punctele A, L și L' sunt coliniare, însă, din faptul că LL' este linie mijlocie în triunghiul $E'FE$ obținem că $AL' \parallel AE$, contradicție.

Așadar L' coincide cu L și E' coincide cu E.

Observația 2. Problema este un caz particular al următoarei afirmații: *Simediana AD a triunghiului ABC înjumătățește segmentul EF, E* ∈ (*AB*) *și* (*F*) ∈ (*AC*)*, dacă și numai dacă patrulaterul BEFC este inscriptibil.*

q.e.d.

5. Evaluare. Se propune completarea graficului conceptual, elaborat în baza proprietăților conceptelor noi.

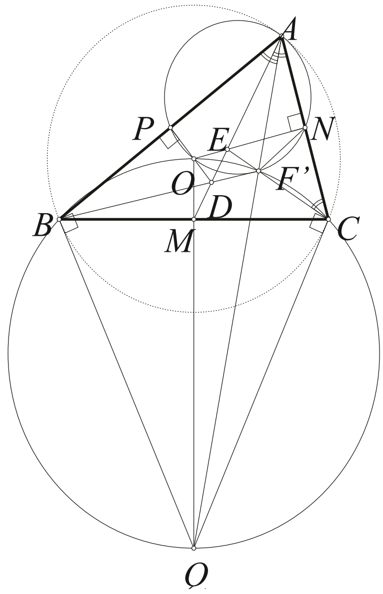
Proprietățile	Conceptul 1	Conceptul 2	Conceptul 3
1.			
2.			
...			

6. Tema pentru acasă

a) Sistematizarea cunoștințelor teoretice la temă.
b) Explicitarea detaliată în scris a soluțiilor problemelor rezolvate în grup în cadrul lecției.

c) Problemă. Fie ABC un triunghi scalen ascuțitunghic și fie M, N și P mijloacele laturilor BC, CA și CB respectiv. Mediatoarele laturilor AB și AC intersectează dreapta AM în punctele D și E, iar dreptele BD și CE se taie în F. Să se arate că punctele A, N, F și P se află pe un cerc.

USA MO, 2008



Demonstrație. Fie O cercul circumscris triunghiului ABC. Evident că patrulaterul $APON$ este inscriptibil ($\angle APO = \angle ANO = 90°$). Notăm cu F' intersecția cercurilor circumscrise triunghiurilor APN și BOC. Fie OM intersectează cercul circumscris triunghiului BOC în Q. Cum OQ este diametru obținem că $\angle OCQ = \angle OBQ = 90°$, adică dreptele QC și QB sunt tangente la cercul circumscris triunghiului ABC. Din $\angle OF'Q = 90°$ și $\angle OF'A = 90°$ obținem că punctele A, F' și Q sunt coliniare. Prin urmare, din lema rezultă că AF' este simediana triunghiului ABC. Atunci $\angle BAF' = \angle MAC$ și

$$m(\measuredangle F'CA) = m(\measuredangle ACB) - m(\measuredangle F'CB) =$$
$$= m(\measuredangle ACB) - m(\measuredangle AQB) = m(\measuredangle C) - (180° - m(\measuredangle QBA) - m(\measuredangle BA\,F')) =$$
$$= m(\measuredangle ACB) + (m(\measuredangle ABC) + m(\measuredangle QBC)) - 180° + m(\measuredangle BA\,F') =$$
$$= m(\measuredangle ACB) + (m(\measuredangle B) + m(\measuredangle A)) - 180° + m(\measuredangle MAC) = m(\measuredangle MAC) = m(\measuredangle FAC).$$

Așadar, punctele F, F' și C sunt coliniare. Analog demonstrăm că punctele F', F și B sunt coliniare.

În concluzie $F \equiv F'$ și punctul F aparține cercului circumscris triunghiului APN.

q.e.d.

Cercetările au fost efectuate in cadrul Programului Instituțional de Cercetare al Universității de Stat din Moldova pentru anii 2024-2027, subprogramul 011303, "SATGED"

Bibliografie

1. AKOPYAN A. *Geometry in Figures*. 2011, 130 p.
2. Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova. Matematică. Curriculum pentru clasele a V-a - a IX-a, aprobat prin ordinul MECC nr. 906 din 17.07.2019, implementat în clasele V-IX.
3. Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova. Matematică. Curriculum pentru clasele a X-a – a XII-a, aprobat prin ordinul MECC nr. 906 din 17.07.2019, implementat în clasele X-XII.
4. TELEUCĂ, M., IVANOV, A. *Probleme de geometrie competitivă*. Editura GIL, România, 2009. 225 pag.

5. TELEUCĂ, M.; LUPU, I.; SALI, L. Transpunerea didactică a conținuturilor pentru dezvoltarea gândirii matematice. In: *Acta et Commentationes (Științe ale Educației)*. 2012, nr. 1, pp. 109-118. ISSN 1857-0623.
6. TELEUCĂ, M.; SALI, L. Aspecte ale creării mediului de dezvoltare a elevilor capabili de performanțe înalte la matematică. In: *Acta et Commentationes (Științe ale Educației)*. 2023, nr. 2(32), pp. 93-102. ISSN 1857-0623. DOI: https://doi.org/10.36120/2587-3636.v32i2.93-102
7. TELEUCĂ, M.; SALI, L. Didactizarea conținuturilor și dezvoltarea gândirii matematice. In: *Abordări inter/transdisciplinare în predarea științelor reale, (concept STEAM)*., Ed. Ediția a 3-a, 27-28 octombrie 2023, Chișinău. Chișinău: CEP UPSC, 2023, Ediția a 3-a, pp. 153-160. ISBN 978-9975-46-813-8. DOI: https://doi.org/10.46727/c.steam-2023.p153-160
8. TEMPLE, Ch. ș.a. *Aplicarea tehnicilor de dezvoltare a gândirii critice*. Adaptare Cartalean T. ș.a. Chișinău, 2003.
9. The 44th International Olympiad, Short-listed problems. Tokyo, Japan, July 2003.
10. ZHAO, Y. Lemmas in Euclidean geometry. IMO Training, 2007.
11. https://www.mateonline.net/matematica/84/s/Lectii%20Geometrie%20Plana.htm
12. www.mathlinks.ro