

CZU: 510.5:37.015:373

DOI: 10.36120/2587-3636.v37i3.7-16

MULȚIMEA VALORILOR UNEI FUNCȚII: ASPECTE METODICE ȘI DE CALCUL

Ilie LUPU, dr. hab., profesor universitar

<https://orcid.org/0000-0003-1375-3071>

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”

Liubov ZASTÎNCEANU, dr., conf.univ.

<https://orcid.org/0000-0002-0329-6295>

Universitatea de Stat „Alec Russo” din Bălți

Rezumat. Studiul funcțiilor elementare este una dintre principalele linii tematice ale cursului preuniversitar de matematică. În același timp, conceptul de funcție și conceptele aferente (domeniu, mulțimea valorilor, grafic) reprezintă conceptele cele mai dificile pentru elevi. Lucrarea prezintă analiza formării conceptului de *mulțimea valorilor funcției* și sintetizează metode de determinare ale ei pentru diferite funcții. Exemplele de utilizare a mulțimii valorilor funcției vor fi utile atât pentru înțelegerea și extinderea conceptului, cât și pentru dezvoltarea capacităților matematice ale elevilor dotați.

Cuvinte cheie: studiu de funcție, mulțimea valorilor, extreme ale funcției, metode de stabilire a extremelor, funcție în școală.

THE SET OF A FUNCTION VALUES: METHODOLOGICAL AND CALCULATION ASPECTS

Summary. The study of elementary functions is one of the main thematic lines of the pre-university mathematics course. At the same time, the concept of function and related concepts (domain, set of values, graph) represent the most difficult concepts for students. The paper presents the analysis of the formation for the concept of the set of function values and synthesizes its determination methods for different functions. Examples of the use for the set of function values will be useful both for understanding and expanding the concept, and for developing the mathematical capabilities of gifted students.

Keywords: functions study, set of values, extreme values of the functions, methods of determining the extreme values, functions in school.

Curriculum-ul disciplinar la matematică, în ultima sa variantă din 2019, a păstrat aproape intactă linia tematică *Funcții*. Etapa propedeutică de studiere a acestui subiect începe în clasele primare, unde deja în clasa a II-a se studiază dependența dintre preț și cost, la o cantitate fixată, sau dintre preț și cantitate la un cost fixat. Studiarea diferitor dependențe continuă în clasele următoare, astfel încât să se soldeze cu introducerea oficializată a conceptului de funcție în clasa a VII-a, unde pentru studierea acestui subiect sunt rezervate mai mult de 20 de ore. Într-o unitate de învățare separată se lucrează la formarea conceptului de funcție și conceptelor aferente: domeniu, codomeniu, grafic. De asemenea, din clasa a VII-a începe studierea primelor funcții elementare: funcția de gradul I și funcția proporționalitate directă. În clasele gimnaziale următoare această linie tematică se completează cu unele proprietăți ale funcției, cu noi funcții elementare (radical,

proportionalitate inversă, funcția de gradul II etc.) și, evident, cu sarcini tot mai complicate referitoare la funcții. Apogeul studiului funcțiilor elementare revine clasei a X-a, unde se generalizează conceptul de funcție și conceptele aferente, se studiază proprietățile lor, se formulează algoritmul deplin de studiu al funcției. Funcțiile elementare studiate în clasa a X-a umanistă (putere, radical, exponențială, logaritmică) la profilul real sunt completate cu funcțiile trigonometrice directe și inverse [1, 2, 3]. Astfel, elevilor ar trebui să li se formeze un bagaj de funcții elementare, cunoașterea profundă a cărora ar asigura rezolvarea diferitor sarcini destul de complicate. În același timp, atât rezultatele examenelor de absolvire a gimnaziului, a examenului de Bacalaureat la matematică, cât și experiența de lucru cu anul I a specialităților cu tangențe în științe reale, demonstrează prezența unor carențe foarte serioase în soluționarea sarcinilor referitoare la funcții. Astfel, se impune să se acorde o atenție deosebită studierii funcțiilor atât la etapa de formare a conceptelor, cât și la etapa dezvoltării abilităților de utilizare a proprietăților funcțiilor elementare pentru rezolvarea diferitor sarcini complexe și nonstandard.

Unul din conceptele aferente conceptului de funcție mai puțin înțeles de elevi și elucidat în literatura de specialitate, dar în același timp foarte interesant și util, este conceptul *mulțimea valorilor unei funcții*. Fiind definită la prima apariție în manualul de matematică pentru clasa a VII-a [4] ca și $E(f) = \{y / y = f(x), x \in X, y \in Y\}$, unde X este domeniul de definiție al funcției, iar Y – domeniul de valori al ei, conceptul nu obține dezvoltare sau precizare decât în manualul pentru clasa a X-a [5], fiind numit și *imaginea funcției*.

În cazul, când funcția este definită grafic, mulțimea de valori poate fi determinată, citind intervalul de valori al funcției de la punctul de minim global pe domeniul de definiție până la punctul de maxim global, cu condiția, că funcția primește toate valorile dintre cele două puncte de extrem. De exemplu, în fig.1., pe care este reprezentată o funcție definită pe $D(f) = [-4; 5)$ se citește clar că cea mai mică valoare funcția o obține în punctul $(-4, -3)$, iar cea mai mare – în punctul $(-2, 3)$, adică mulțimea de valori a acestei funcții este $E(f) = [-3; 3]$.

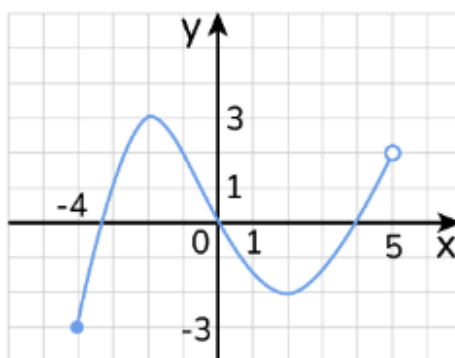


Figura 1. O funcție definită grafic

(sursa <https://neofamily.ru/matematika-profil/task-bank/60954>)

Dar de cele mai multe ori în exerciții se solicită stabilirea mulțimii valorilor funcțiilor definite analitic. În asemenea caz pot fi folosite mai multe scenarii de acțiune, care depind de însăși funcția corespunzătoare și cunoștințele și abilitățile elevilor la moment.

Exemplul 1. De determinat mulțimea valorilor funcției $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2$.

Metoda 1. Observăm, că funcția respectivă este o funcție de gradul 2, cu coeficientul superior $a = 1, b = 0, c = 2$. Corespunzător, graficul ei este parte de parabolă cu ramurile în sus, cu vârful în p. $(0, 2)$, simetrică față de OY . Domeniul de definiție indicat $D(f) = [-1; 1]$ este simetric față de vârful parabolei, care aparține axei OY . Deci, cea mai mică valoare a funcției se obține în vârful parabolei, iar cea mai mare – la capetele domeniului de definiție, pentru $x = 1$ sau $x = -1$. Astfel vom obține $E(f) = [2; 3]$.

Metoda 2. Funcția respectivă este o funcție pară, adică $f(-x) = f(x)$ și domeniul de definiție al ei este simetric. Deci, este suficient să analizăm valorile funcției pe $[0; 1]$, unde funcția este strict crescătoare. Cea mai mică valoare a funcției pe $[0; 1]$ este pentru $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2$; cea mai mare – $f(1) = 3$. Prin urmare, $E(f) = [2; 3]$.

Metoda 3. Notăm: $f(x) = t$. Atunci, $x^2 + 2 = t \Leftrightarrow x^2 = t - 2$. Deoarece $D(f) = [-1; 1]$ și $x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq t - 2 \leq 1 \Leftrightarrow t \in [2; 3]$ sau $E(f) = [2; 3]$.

Astfel de exemple de calcul a mulțimii de valori ale funcției pot fi propuse în gimnaziu, după studierea funcției de gradul 2.

Pentru cazuri mai complicate, în clasele liceale, poate fi utilizată o trecere succesivă prin câteva etape de utilizare a proprietăților funcțiilor elementare, asociate cu transformări elementare ale inegalităților.

Exemplul 2. De determinat mulțimea valorilor funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 8 - 0,7 \cos 7x$.

Rezolvare: În expresia analitică a funcției observăm funcția trigonometrică $f(x) = \cos x$, care are în calitate de mulțime de valori segmentul $[-1; 1]$. Indiferent de expresia, care descrie argumentul, această funcție va păstra aceeași mulțime de valori. Astfel, $-1 \leq \cos 7x \leq 1$. Înmulțind toate părțile inegalității duble mai întâi cu $-0,7$, apoi adunând cu 8 vom obține: $0,7 \geq -0,7 \cos 7x \geq -0,7 \Leftrightarrow 8,7 \geq 8 - 0,7 \cos 7x \geq 7,3$. Astfel, $E(f) = [7,3; 8,7]$.

Sarcini, ce presupun determinarea mulțimii valorilor funcției în manualele de matematică gimnaziale sunt foarte puține. Astfel, în manualul de matematică pentru clasa a VII-a (a.e.2023) și în manualul de matematică pentru clasa a IX-a (a.e. 2024, [4]) sunt doar câte un exercițiu de acest tip. Orice profesor de matematică conștientizează, că așa un volum de exerciții nu asigură nici înțelegere conceptului și nici formarea abilităților de utilizare a acestui concept în contextul rezolvării diferitor sarcini referitoare la funcții.

Exemplele, rezolvate mai jos vin să demonstreze diapazonul posibil de sarcini de calcul a mulțimii valorilor funcției și metodele de calcul ale ei. Aceste exerciții și altele de acest tip pot deveni un argument în favoarea acordării unei atenții suplimentare acestui concept, prin abilitățile de gândire matematică pe care trebuie să le demonstreze

rezolvatorul în cadrul rezolvării acestor sarcini, pornind de la un concept aparent foarte simplu. Lângă fiecare exemplu este indicat profilul clasei liceale, pentru care exercițiul respectiv poate fi propus în condițiile curriculum-ului disciplinar 2019.

Exemplul 3 (clasa a X-a, profil umanist și profil real). De aflat mulțimea valorilor funcției $f(x): R \rightarrow R, f(x) = x^4 + (1-x)^4$.

Rezolvare: Efectuăm transformări elementare ale funcției, folosind formulele înmulțirii prescurtate:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + (1-x)^4 = (x^4 - 1) + (x-1)^4 + 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + (x-1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 1 = (x-1)(2x^3 - 2x^2 + 4x) + 1 = \\ &= 2(x^2 - x + 1 - 1)(x^2 - x + 1 + 1) + 1 = 2[(x^2 - x + 1)^2 - 1] + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) = 2(x^2 - x + 1)^2 - 1. \end{aligned}$$

Este evident că funcția dată obține valoarea minimală în același timp cu funcția $y = (x^2 - x + 1)^2$. Însă deoarece $x^2 - x + 1 > 0$ pentru orice x , atunci este suficient să calculăm acele valori ale lui x , pentru care funcția $f(x) = x^2 - x + 1$ obține minimum.

Această funcție are minimum pentru $x = \frac{1}{2}$. Prin urmare, $f_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$.

Valoarea maximală a funcției este determinată de puterea cea mai mare a necunoscutei (x^4), care are coeficient pozitiv, în consecință funcția crește nemărginit.

Astfel, mulțimea valorilor funcției date, care este o funcție continuă în baza formulei sale analitice, este $E(f) = [1/8; +\infty)$.

Exemplul 4 (clasa a X-a, profil umanist și profil real). De calculat mulțimea valorilor funcției $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Metoda 1. Scriem relația dată astfel: $(y-1)x^2 + (y+1) = 0$, (1). Din această relație este evident, că $y \neq 1$. Din egalitatea (1) determinăm $x^2 = \frac{1+y}{1-y}$. Prin urmare, $\frac{1+y}{1-y} \geq 0$ sau $(1+y)(1-y) \geq 0$, adică $1 - y^2 \geq 0$ sau $y^2 \leq 1$.

Deci, $-1 \leq y \leq 1$. Însă deoarece $y \neq 1$, rezultă $-1 \leq y < 1$, adică $E(f) = [-1; 1)$.

Metoda 2. Observăm, că funcția inițială $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ reprezintă un raport algebric. Evidențiem în el întregii prin împărțirea polinoamelor. Obținem $y = 1 - \frac{2}{x^2+1}$.

Deoarece $1 \leq x^2 + 1 < \infty$, atunci fracția $\frac{2}{x^2+1}$ obține toate valorile pe semiintervalul $(0; 2]$, iar $E(f) = [-1; 1)$.

Exemplul 5 (clasa a X-a, profil umanist și profil real). Să se calculeze mulțimea valorilor funcției $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

Metoda 1. Observăm, că numitorul expresiei analitice a funcției este $x^2 - x + 1 > 0$ pentru orice valoare a variabilei, astfel putem scrie relația funcțională dată astfel:

$$y(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1) = 0 \text{ sau } (y-1)x^2 - (y+1)x + y-1 = 0.$$

Dacă $y = 1$, atunci $x = 0$. În caz contrar, putem privi ecuația anterioară ca și o ecuație de gradul 2 cu parametrul y , pe care rezolvând-o vom obține pe $x_{1,2} = \frac{y+1 \pm \sqrt{-3y^2+10y-3}}{2(y-1)}$ în calitate de zerouri a funcției asociate acestei ecuații.

Pentru ca zerourile funcției să fie reale, este necesar și suficient, ca $-3y^2 + 10y - 3 \geq 0$, sau $3y^2 - 10y + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 3\left(y - \frac{1}{3}\right)(y - 3) \leq 0$, de unde rezultă că $\frac{1}{3} \leq y \leq 3$, adică $E(f) = [1/3; 3]$.

Exemplul 6 (clasa a X-a, profil real). Determinați mulțimea valorilor funcției pe domeniul ei maxim de definiție $y = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$.

Rezolvare: Domeniul maxim de definiție a acestei funcții reprezintă o mulțime de intervale ale axei reale, aflate între zerourile funcțiilor elementare $y = \cos x$ și $y = \sin x$. Unul din aceste intervale, suficient de ilustrativ este intervalul $(0, \pi/2)$, la care în capătul din stânga $\sin x \rightarrow 0$ și $\cos x \rightarrow 1$, iar în capătul din dreapta – viceversa și ambele funcții iau valori pozitive pe intervalul $(0, 1)$. Pe următorul interval $(\pi/2, \pi)$ $y = \sin x$ variază între 0 și 1, iar $y = \cos x$ – între -1 și 0. Continuând studiul pe fiecare interval, obținem că pe acest domeniu mulțimea valorilor funcțiilor elementare $y = \sin x$ și $y = \cos x$ este $E_{\sin x} = E_{\cos x} = (-1, 0) \cup (0, 1)$, iar în timp ce una din fracțiile componente din funcția inițială tinde spre 1, cealaltă tinde spre $+\infty$. Astfel, sumar funcția va tinde spre $+\infty$ la capetele intervalelor menționate.

Pentru a determina valoarea cea mai mică a funcției, efectuăm unele transformări pe domeniul ei de definiție: $y = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{4\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x}$.

Deoarece $0 < \sin^2 2x \leq 1$, atunci este evident că $y \geq 4$, adică $E(f) = [4; +\infty)$.

La nivel universitar, în contextul studierii funcțiilor de două variabile, de asemenea pot fi propuse sarcini de determinare a mulțimii valorilor acestor funcții.

Exemplul 7. De determinat mulțimea valorilor funcției pe domeniul de definiție $R \times R$:

$$f(x; y) = \cos x + \cos y + \cos(x + y)$$

Metoda 1. Analizând funcția inițială și valorificând valoarea maximal posibilă a $\cos x$, putem determina valoarea maximală a funcției, care poate fi obținută pentru $x = y = 0$.

Atunci $f_{\max} = f(0; 0) = \cos 0 + \cos 0 + \cos 0 = 3$.

Pentru a determina valoarea minimală a funcției efectuăm următoarele transformări:

$$f(x; y) = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + 2 \sin \frac{2x+y}{2} - 1 \text{ sau}$$

$$f(x, y) = 2 \left[\left(\cos \frac{x+y}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \cos^2 \frac{x-y}{2} \right] - 1.$$

Din această egalitate rezultă, că $f(x, y)$ obține cea mai mică valoare, egală cu $(-\frac{3}{2})$, pentru

$\left(\cos \frac{x+y}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right)^2 = 0$. Deci, $f_{\min}(x, y) = -\frac{3}{2}$. De aceea $-\frac{3}{2} \leq f(x + y) \leq 3$ sau $E(f) = [-3/2; 3]$.

Metoda 2. Deoarece $\cos x \leq 1$, $\cos y \leq 1$, $\cos(x+y) \leq 1$, atunci $f(x, y) \leq 3$. Se obține egalitate, de exemplu pentru $x = y = 0$. Ulterior, avem

$$f(x, y) = \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1\right) + 2 \cos \frac{x}{2} \cos\left(\frac{x}{2} + y\right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| - 1 = 2 \left[\left(\left| \cos \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] - 1 \geq -\frac{3}{2},$$

unde se obține egalitate pentru $\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{x}{2} + y\right) = -1$, adică pentru $x = \frac{2\pi}{3}$, $y = \frac{2\pi}{3}$.

Deci, $-\frac{3}{2} \leq f(x, y) \leq 3$ și $E(f) = [-3/2; 3]$.

Posedarea abilităților de determinare și de aplicare a *mulțimii valorilor funcțiilor elementare* sunt foarte utile în determinarea valorilor extreme ale funcțiilor complexe doar cu mijloace algebrice, activități caracteristice clasei a X-a, profil real.

Exemplul 8. Să calculăm cea mai mică valoare a funcției $f: R \rightarrow R$, $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 9}{x^2 - 2x + 4}$.

Aplicând transformările elementare, obținem:

$$y = \frac{2x^2 - 4x + 9}{x^2 - 2x + 4} = 2 \cdot \frac{2x^2 - 4x + 9}{2x^2 - 4x + 8} = 2 \cdot \frac{(2x^2 - 4x + 8) + 1}{2x^2 - 4x + 8} = 2 \left[1 + \frac{1}{2(x^2 - 2x + 4)} \right] = 2 \left(1 + \frac{1}{2[(x-1)^2 + 3]} \right).$$

Este evident, că funcția va obține cea mai mică valoare în situația, când fracția $\frac{1}{2[(x-1)^2 + 3]}$ va obține cea mai mare valoare. Aceasta are loc pentru $x - 1 = 0$, adică pentru $x = 1$.

Astfel, cea mai mică valoare a funcției este $f_{\min} = f(1) = 2 \left(1 + \frac{1}{6} \right) = \frac{7}{3}$.

Exemplul 9. Să calculăm cea mai mică valoare a funcției $f: R \rightarrow R$:

$$y = f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 5}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1)^2 - (x^2 + 1) + 5}{(x^2 + 1)^2} = \frac{5}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{x^2 + 1} + 1.$$

Notăm $\frac{1}{x^2 + 1} = z$. Atunci $y = 5z^2 - z + 1 = \frac{1}{5} \left(5z - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{19}{20}$.

Este evident că y obține cea mai mică valoare, egală cu $\frac{19}{20}$, când $5z = \frac{1}{2}$ sau când verifică inecuația $z = \frac{1}{10}$, sau dacă $\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{10}$, adică pentru $x = \pm 3$.

Astfel, cea mai mică valoare a funcției este $f(x) = \frac{19}{20}$ (pentru $x = \pm 3$).

Funcțiile, care conțin radicali, destul de frecvent ridică probleme de calcul a valorilor extreme prin mijloacele analizei matematice, deoarece derivarea acestora nu numai schimbă domeniul de existență a expresiei algebrice, dar și complică de multe ori expresia algebrică. Valorificarea abilităților algebrice pentru asemenea funcții în multe cazuri ajută rezolvitorului să determine valorile extreme ale funcției mult mai rapid și simplu.

Exemplul 10. Să calculăm cea mai mare valoare a funcției $f(x) = 3x + 4\sqrt{1 - x^2}$ pe domeniul ei maxim de definiție.

Funcția este definită, dacă $1 - x^2 \geq 0$, adică pentru $-1 \leq x \leq 1$.

Pentru $x > 0$, avem $f(x) = 3x + 4\sqrt{1 - x^2} > 3(-x) + \sqrt{1 - (-x)^2}$, adică $f(x) > f(-x)$.

Prin urmare, pentru $x < 0$ funcția $f(x)$ nu poate obține cea mai mare valoare.

Rămâne segmentul $0 \leq x \leq 1$. Pentru aceste valori $f(x) \geq 0$, și de aceea funcția cercetată obține cea mai mare valoare pentru aceleași valori a lui x , ca și pătratul ei. Astfel,

$$y^2 = (3x + 4\sqrt{1-x^2})^2 = 9x^2 + 16 - 16x^2 + 24x\sqrt{1-x^2} = \\ = -[16x^2 - 24x\sqrt{1-x^2} + 9(1-x^2)] + 25 = -(4x - 3\sqrt{1-x^2})^2 + 25 \leq 25.$$

Astfel, cea mai mare valoare $y = \sqrt{25} = 5$ dacă $4x - 3\sqrt{1-x^2} = 0$, de unde $4x = 3\sqrt{1-x^2}$, sau $16x^2 = 9 - 9x^2$, sau $x = \frac{3}{5}$.

Prin urmare, cea mai mare valoare a funcției este $y = 5$ pentru $x = \frac{3}{5}$.

Exemplul 11. Să calculăm cea mai mică valoare a funcției:

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12} - \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$$

pe domeniul ei maxim de definiție.

Domeniul de definiție a funcției îl determinăm din sistemul de inecuații

$$\begin{cases} -x^2 + 4x + 12 \geq 0, \\ -x^2 + 2x + 3 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow D_f = [-1; 3] \quad (1).$$

Vom demonstra, că pentru toate valorile x din domeniul de definiție (1) funcția $y > 0$.

Într-adevăr, inecuația $\sqrt{-x^2 + 4x + 12} > \sqrt{-x^2 + 2x + 3} \Leftrightarrow x > 4,5$ (2).

Deoarece toate numerele din intervalul (1) verifică inecuația (2), atunci $y > 0$ (în domeniul său de definiție).

Avem

$$y^2 = \left[\sqrt{(x+2)(6-x)} - \sqrt{(x+1)(3-x)} \right]^2 = \\ = \left[\sqrt{(x+1)(6-x)} - \sqrt{(x+2)(3-x)} \right]^2 + 3 \geq 3.$$

Deci, $y^2 \geq 3$. Însă deoarece $y > 0$, atunci $y \geq \sqrt{3}$.

Astfel cea mai mică valoare a funcției este egală cu $\sqrt{3}$. Ne convingem iarăși că aceasta se obține numai pentru $x = 0$.

Exemplul 12. Să calculăm cea mai mare valoare a funcției $y = x^2\sqrt{a^2 - x^2}$.

Funcțiile y și $\frac{1}{4}y^2$ obțin cea mai mare valoare pentru una și aceeași valoare a argumentului

x . Avem $\frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{4}x^4(a^2 - x^2) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{2}x^2(a^2 - x^2)$.

Suma $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + (a^2 - x^2) = a^2$ este o mărime constantă, de aceea funcția $\frac{1}{4}y^2$ obține cea mai mare valoare pentru $\frac{1}{2}x^2 = a^2 - x^2$, adică pentru $x^2 = \frac{2a^2}{3}$. Astfel, cea mai mare

valoare $y = \frac{2a^2}{3} \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{2|a^3|}{3\sqrt{3}}$ pentru $x^2 = \frac{2a^2}{3}$.

Încă o situație multe ori complicată în determinarea extremelor unei funcții prin metodele analizei matematice, este determinarea extremelor funcțiilor trigonometrice.

Derivarea transformă $\sin x$ în $\cos x$ și viceversa, care în linii mari păstrează *mulțimea valorilor*, dar nu simplifică expresiile trigonometrice. Dacă funcția mai conține și puteri sau fracții cu funcțiile trigonometrice la numitor ecuația $f'(x) = 0$, folosită pentru determinarea punctelor critice, se complică la maximum. Și aici, în multe situații, transformările algebrice și utilizarea transformărilor funcțiilor trigonometrice în funcția inițială ne permit să determinăm extremele funcției mult mai simplu.

Exemplul 13. Să determinăm pentru care valori a lui x funcția $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = 2 \cos^2 x - 3\sqrt{3} \cos x - \sin^2 x + 5$$

obține cea mai mare și cea mai mică valori.

Avem:

$$\begin{aligned} y &= 2 \cos^2 x - 3\sqrt{3} \cos x - \sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x + 4 = 3 \cos^2 x - 3\sqrt{3} \cos x + \\ &+ 4 = \left(3 \cos^2 x - 3\sqrt{3} \cos x + \frac{9}{4} \right) + 4 - \frac{9}{4} = \left(\sqrt{3} \cos x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

De aici se vede ușor, că cea mai mică valoare y este egală cu $7/4$ și se obține când $\sqrt{3} \cos x = 3/2$, sau pentru $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Din ultima variantă a expresiei analitice pentru funcție se observă, că cea mai mare valoare a funcției este egală cu $(-\sqrt{3} - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4} = 7 + 3\sqrt{3}$, care se obține pentru $\cos x = -1$, deci pentru $x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exemplul 14. Să calculăm cea mai mică valoare a funcției:

$$y = (\sin x + \cos x)^2 + \frac{1}{(\sin x \cos x)^2},$$

pe domeniul ei maxim de definiție.

Din nou domeniul de definiție a acestei funcții este un sistem de intervale cu capetele în zerourile funcțiilor $y = \sin x$ și $y = \cos x$, de forma $\frac{k\pi}{2} < x < \frac{(k+1)\pi}{2}$ și $\frac{(k+1)\pi}{2} < x < \frac{(k+2)\pi}{2}$, unde $k \in \mathbb{Z}$.

Scriem funcția dată astfel: $y = [\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})]^2 + \frac{4}{\sin^2 2x}$.

Deoarece y este sumă de două pătrate perfecte, valoarea minimă a funcției se va obține pentru cazul în care fiecare expresie va avea valoarea minimă.

$[\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})]^2 \geq 0$, deci valoarea minimă a acestei expresii este 0 și se obține pentru $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Funcția $\frac{4}{\sin^2 2x}$ are valoarea minimă 4, pentru

$$\sin^2 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Pentru $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, pătratele perfecte iau valoare minimă.

Prin urmare, în aceste puncte, funcția obține minimum.

Deci, în aceste puncte valoarea minimală a funcției este 4.

Exemplul 15. Să calculăm cea mai mare valoare a funcției $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ pentru $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$.

Avem:

$$\begin{aligned} z &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \left(\cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2} \right) \\ z &\leq 2 \sin \frac{x+y}{2} \left(1 + \cos \frac{x+y}{2} \right) = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{x+y}{4} \\ z &\leq 4 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos^2 \frac{x+y}{4} = 8 \sin \frac{x+y}{4} \cos^3 \frac{x+y}{4} \end{aligned}$$

Deoarece $\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x+y \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{x+y}{4} \leq \frac{\pi}{2}$.

Deci, $\sin \frac{x+y}{4} \geq 0, \cos \frac{x+y}{4} \geq 0$. Prin urmare $z^2 \leq 64 \sin^2 \frac{x+y}{4} \cdot \left(\cos^2 \frac{x+y}{2} \right)^3$

$$\frac{z^2}{64 \cdot 27} \leq \sin^2 \frac{x+y}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} \cos^2 \frac{x+y}{2} \right)^3.$$

Însă:

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{64 \cdot 27} &\leq \sin^2 \frac{x+y}{4} \cdot \frac{1}{3} \cos^2 \frac{x+y}{4} \cdot \frac{1}{3} \cos^2 \frac{x+y}{4} \cdot \frac{1}{3} \cos^2 \frac{x+y}{4} \\ \sin^2 \frac{x+y}{4} + \frac{1}{3} \cos^2 \frac{x+y}{4} + \frac{1}{3} \cos^2 \frac{x+y}{4} + \frac{1}{3} \cos^2 \frac{x+y}{4} &= 1 \\ \Rightarrow \sin^2 \frac{x+y}{4} &= \frac{1}{3} \cos^2 \frac{x+y}{4} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{x+y}{4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Deoarece, $0 \leq \frac{x+y}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x+y}{4} \geq 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x+y}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Atunci $\frac{x+y}{4} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x+y}{4} = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Deoarece $0 \leq \frac{x+y}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = 0, \frac{x+y}{4} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x+y = \frac{2\pi}{3}$.

Deoarece la etapa inițială pentru $-1 \leq \cos \frac{x-y}{2} \leq 1$ s-a luat valoarea maximă $\cos \frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x-y}{2} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Deoarece $\begin{matrix} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi \end{matrix} \Rightarrow \frac{x-y}{2} = 0 \Rightarrow x-y = 0 \Rightarrow x = y$. Atunci împreună cu relația $x+y = \frac{2\pi}{3}$ și se obține că doar punctul $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ poate fi punct de maxim.

$$\begin{aligned} z &\leq 8 \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos^3 \frac{\pi}{6} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \\ z_{\max} &= \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Calculul celei mai mari și celei mai mici valori a unei funcții este doar una din aplicațiile *mulțimii valorilor funcțiilor elementare*. În matematica preuniversitară putem identifica multiple situații, când abilitățile de calcul a acestei caracteristici ale funcțiilor este solicitată direct sau indusă de condițiile exercițiului, cum ar fi:

- studiul complet al unei funcții;
- calculul limitelor de funcții;

- calculul valorilor funcțiilor și derivatelor funcțiilor pe un interval al domeniului de definiție;
- rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor și totalităților de ecuații și inecuații de diferite tipuri;
- calculul integralelor definite etc.

În consecință, exersarea separată a abilităților de calcul a mulțimii valorilor unei funcții va permite nu numai înțelegerea profundă a acestui concept, ci și valorificarea multor din abilitățile matematice ale elevilor deja existente și dezvoltarea altora, care încă urmează să fie acumulate.

Bibliografie

1. MECC al RM. *Curriculum național: Învățământul primar*. Marin M. [et al.]; Ch.: Tipografia Centrală, 2018. 212 p. disponibil pe https://mec.gov.md/sites/default/files/curriculum_primare_site.pdf ISBN 978-9975-3258-0-6.
2. MECC al RM. *Matematică: Curriculum național: Clasele 5-9: Curriculum disciplinar: Ghid de implementare*. Achiri I. (coord.) [et al.]. Chișinău: Lyceum, 2020. 180 p. disponibil pe https://mecc.gov.md/sites/default/files/matematica_gimnaziu_ro.pdf ISBN 978-9975-3438-7-9.
3. MECC al RM. *Matematică: Curriculum național: Clasele 10-12: Curriculum disciplinar: Ghid de implementare*. Achiri I. (coord.) [et al.]. Chișinău: Lyceum, 2020. 192 p. disponibil pe [https://mec.gov.md/sites/default/files/matematica_liceu_ro.pdf](https://mec.gov.md/sites/default/files/matematica liceu_ro.pdf) ISBN 978-9975-3438-6-2.
4. ACHIRI, I., BRAICOV, A., ȘPUNTENCO, O. *Matematică: Manual pentru clasa a 9-a*. Ch: Prut Internațional, 2024 (Blitz Poligraf). 176 p. ISBN 978-9975-54-782-6.
5. LUPU, I., HAJDEU, M. Metodele de rezolvare a problemelor de matematică nonstandard - factor important în formarea competenței matematice la elevi. In: *Acta et commentationes (Științe ale Educației)*, 2020, nr. 2(20), pp. 24-34. ISSN 1857-0623. DOI: <https://doi.org/10.36120/2587-3636>.
6. LUPU, I. *Metodologia rezolvării problemelor cu un grad sporit de dificultate*. Ch.: Combinatul poligrafic, 2011. 224 p., ISBN 978-9975-54-032-2.
7. ПОТАПОВ, М., АЛЕКСАНДРОВ, В., ПАСИЧЕНКО, П. *Алгебра и анализ элементарных функций*. 2-е изд., перераб. и доп., Москва: Столетие, 1996. 733 с. ISBN 5-7459-0058-X.
8. ЛАППО, Л., ПОПОВ, М. *Математика, профильный уровень*, Москва: Экзамен, 2017. ISBN 978-5-377-11175-7.