

CZU: 517.11:37.091.3

DOI: 10.36120/2587-3636.v39i1.7-13

METODE ȘI PROCEDEE DE DEMONSTRAȚIE A INEGALITĂȚILOR TRIGONOMETRICE

Ilie LUPU, dr. hab., prof. univ.

<https://orcid.org/0000-0003-1375-3071>

Mihaela HAJDEU, dr., lect. univ.

<https://orcid.org/0000-0001-8189-7558>

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău

Rezumat. Acest articol tratează aspecte teoretice și metodologice de demonstrație a inegalităților trigonometrice, asigurând trecerea la învățământul formativ, la formarea competenței matematice, ceea ce este posibil numai prin rezolvarea unui număr optimal de probleme și exerciții, folosind diverse metode și procedee în rezolvarea lor, prin însușirea unor metode specifice anumitor clase de probleme.

Cuvinte-cheie: inegalități trigonometrice, metode, procedee, învățământ matematic, competență.

METHODS AND PROCEDURES FOR DEMONSTRATION OF TRIGONOMETRIC INEQUALITIES

Abstract. This article deals with theoretical and methodological aspects of demonstrating trigonometric inequalities, ensuring the transition to formative education, to the formation of mathematical skills, which is possible only by solving an optimal number of problems and exercises, using various methods and procedures in their solution, by mastering methods specific to certain classes of problems.

Keywords: trigonometric inequalities, methods, procedures, mathematical education, competence.

Pornind de la etimologia cuvântului „trigonometrie” care provine artificial din cuvintele grecești: „*trigon*” - triunghi și „*metresis*” – măsurare, trigonometria a apărut ca știință a rezolvării triunghiurilor, adică determinarea valorilor necunoscute ale unui triunghi pe baza informațiilor date ale celorlalte valori ale acestuia, care ulterior s-a dezvoltat ca știință a funcțiilor trigonometrice. Deoarece orice problemă de calcul în geometrie poate fi redusă la rezolvarea triunghiurilor, trigonometria acoperă toată planimetria și stereometria în aplicațiile sale și este utilizată pe scară largă în toate domeniile științelor naturii și tehnologiei. Prin urmare considerăm oportun să aderăm la ideea dezvoltată de grecii antici, care considerau trigonometria ca fiind cea mai importantă dintre științe, întrucât geometria este regina matematicii, iar trigonometria este regina geometriei. Astfel, fără a contesta grecii antici, vom considera trigonometria una dintre cele mai importante secțiuni ale curriculumului școlar și ale întregii științe matematice în ansamblu.

Conform curriculumului și manualelor de matematică pentru treapta liceală, studiul inegalităților trigonometrice este structurat pe mai multe direcții:

- rezolvarea inegalităților;
- rezolvarea sistemelor de inegalități;

- demonstrarea inegalităților.

O analiză a literaturii educaționale și metodologice privind studiul inegalităților trigonometrice arată că se acordă multă atenție primelor două domenii [1].

De remarcat că rezolvarea inegalităților trigonometrice creează premisele pentru sistematizarea cunoștințelor elevilor legate de tot materialul educațional de trigonometrie (de exemplu: proprietățile funcțiilor trigonometrice, metodele de transformare a expresiilor trigonometrice etc.) și face posibilă stabilirea de conexiuni eficiente cu materialul studiat la algebră (ecuații, inecuații, expresii algebrice etc.), într-un cuvânt contribuie la dezvoltarea competenței matematice în ansamblu.

Demonstrarea unei inegalități cu variabile se reduce la demonstrarea faptului că valoarea unei expresii este mai mare/mică decât valoarea altei expresii pentru orice valori admisibile ale variabilelor ce apar în scrierea lor sau pentru condițiile indicate.

Vom analiza câteva metode de demonstrație a inegalităților:

- Alcătuirea diferenței dintre membrul stâng și membrul drept al inegalității și determinarea semnelui acesteia [2, 3].
- Considerarea uneia sau a mai multor inegalități evidente, aducându-le la inegalitatea care urmează a fi demonstrată.
- Transformarea inegalității date într-o inegalitate evidentă, presupunând că cea dată este adevărată.
- Aplicarea unor inegalități remarcabile și a proprietăților mediilor [4].

Inegalități trigonometrice

Exemplul 1. De demonstrat că $\sin^3 \alpha - \sin^6 \alpha \leq \frac{1}{4}$.

Metoda I. Scriem membrul stâng al inegalității (1) astfel: $\sin^3 \alpha \cdot (1 - \sin^3 \alpha)$. Deoarece $\sin^3 \alpha + (1 - \sin^3 \alpha) = 1$ este o mărime constantă, rezultă că membrul stâng al inegalității (1) va obține cea mai mare valoare pentru $\sin^3 \alpha = 1 - \sin^3 \alpha$, adică pentru $\sin^3 \alpha = \frac{1}{2}$. Astfel, membrul stâng va obține valoarea maximă egală cu: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Prin urmare, $\sin^3 \alpha - \sin^6 \alpha \leq \frac{1}{4}$.

Metoda II. $\sin^6 \alpha - \sin^3 \alpha + \frac{1}{4} = \left(\sin^3 \alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, de unde rezultă că:

$$\sin^3 \alpha - \sin^6 \alpha \leq \frac{1}{4}.$$

Exemplul 2. De demonstrat că $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$, dacă $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Metoda I. Știm că: $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \quad (1)$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$

unde a, b, c sunt laturile unui triunghi, iar $p = \frac{a+b+c}{2}$. Din (1) rezultă că $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$, adică trebuie să demonstrăm că $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \leq \frac{1}{8}$.

Aplicând relație dintre media aritmetică și media geometrică, obținem:

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{1}{2}[(p-a) + (p-b)] \Leftrightarrow \text{De demonstrat}$$

(semnul egalității este valabil numai pentru $a = b$)

$$\Leftrightarrow \sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{1}{2}(2p-a-b) \Leftrightarrow \sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{c}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{c} \leq \frac{1}{2} \quad (2)$$

În mod analog:

$$\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a} \leq \frac{1}{2}, \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{(p-c)(p-a)}}{b} \leq \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Înmulțind membru cu membru inegalitățile (2), (3) și (4), obținem: $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \leq \frac{1}{8}$, ceea ce trebuia de demonstrat.

Metoda II. Știm că $\cos \alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) - \frac{a^2}{2bc}$. Însă $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$, deci,

$$\cos \alpha \geq 1 - \frac{a^2}{2bc} \Leftrightarrow 1 - \cos \alpha \leq \frac{a^2}{2bc} \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a^2}{2bc} \Leftrightarrow \sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}} \quad (5)$$

În mod analog obținem:

$$\sin \frac{\beta}{2} \leq \frac{b}{2\sqrt{ac}}, \quad (6)$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{c}{2\sqrt{ab}}. \quad (7)$$

Înmulțind membru cu membru inegalitățile (5), (6) și (7), obținem: $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$. Semnul egalității este valabil numai pentru $\alpha = \beta = \gamma$.

Metoda III. Evident că $2\sqrt{ab} \leq a+b$, $2\sqrt{bc} \leq b+c$, $2\sqrt{ac} \leq a+c$. Înmulțind membru cu membru aceste inegalități, avem:

$$8abc \leq (a+b)(b+c)(a+c). \quad (8)$$

Se știe că:

$$a = 2R \sin \alpha, b = 2R \sin \beta, c = 2R \sin \gamma, \quad (9)$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului cu laturile a, b, c .

Din relațiile (8) și (9) rezultă:

$$8 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq (\sin \alpha + \sin \beta)(\sin \beta + \sin \gamma)(\sin \alpha + \sin \gamma) \text{ sau}$$

$$\begin{aligned} & 64 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \leq \\ & \leq 8 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2} \sin \frac{\alpha+\gamma}{2} \cos \frac{\alpha-\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Deoarece: $\sin \frac{\alpha+\beta}{2} = \cos \frac{\gamma}{2}$, $\sin \frac{\beta+\gamma}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}$, $\sin \frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos \frac{\beta}{2}$, vom avea:

$$8 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2} \cos \frac{\alpha-\gamma}{2}.$$

Însă $\cos \frac{\alpha-\beta}{2} \leq 1$, $\cos \frac{\beta-\gamma}{2} \leq 1$, $\cos \frac{\alpha-\gamma}{2} \leq 1$, prin urmare:

$$8 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Metoda IV.

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} &= \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right] \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{4} \left(\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \left[\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2} \right]^2 - \frac{\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}}{4} \right\} = \\ &= \frac{1}{8} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2} \right]^2 \leq \frac{1}{8} \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \leq \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Exemplul 3. De demonstrat că $\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \geq 6$, dacă α, β, γ sunt unghiurile unui triunghi.

Știm că $x + y + z \geq 3\sqrt{xyz}$, dacă $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

$$\text{Deci, } \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}} \quad (*)$$

Cum, $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$, din relația (*) rezultă inegalitatea:

$$\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} = 6.$$

Exemplul 4. De demonstrat că $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta > 1$, dacă α și β sunt două din unghiurile unui triunghi ascuțitunghic.

Metoda I. Din formula $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ obținem:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}. \quad (1)$$

Deoarece α și β sunt unghiuri ale unui triunghi ascuțitunghic, rezultă că $90^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$. Prin urmare, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) < 0$. Ținând cont că $\operatorname{tg} \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \beta > 0$, avem:

$$-\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} > 0. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) obținem că $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta > 1$.

Metoda II. Scriem inegalitatea $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta > 1$ astfel:

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} > 1. \quad (3)$$

Deoarece $\cos \alpha > 0$ și $\cos \beta > 0$, inegalitatea (1) ia forma $\sin \alpha \sin \beta > \cos \alpha \cos \beta \Leftrightarrow \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta < 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta) < 0$ – inegalitate adevărată, întrucât $90^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$.

Metoda III.

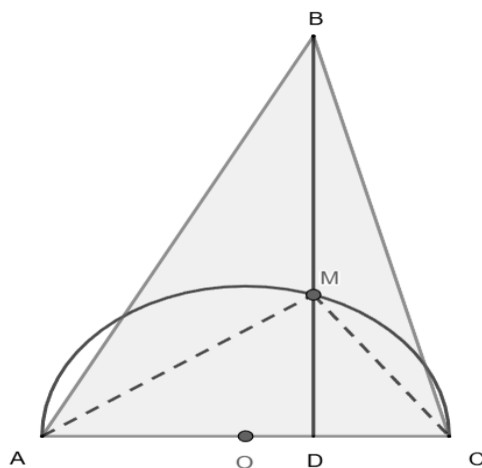


Figura 1

Pe latura AC a triunghiului ABC construim un semicerc care intersectează înălțimea BD a triunghiului ABC în punctul M (Fig. 1).

Avem

$$\frac{MD}{AD} = \frac{DC}{MD},$$

de unde $\frac{MD}{AD} \cdot \frac{MD}{DC} = 1$.

Cum $BD > MD$, rezultă că $\frac{BD}{AD} \cdot \frac{BD}{DC} > 1$.

Dacă $\alpha = \widehat{BAC} = \widehat{BAD}$, iar $\beta = \widehat{ACB} = \widehat{DCB}$, atunci $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{AD}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{BD}{DC}$, prin urmare $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta > 1$.

Exemplul 5. De demonstrat inegalitatea $\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha \geq \frac{1}{8}$. Pentru care valori ale lui α are loc egalitatea?

Evident că: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = 1$.

$$\text{Însă } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha \geq 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha \geq \frac{\sin^2 2\alpha}{2} \geq \frac{1}{2};$$

$$(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)^2 = \sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha + 2 \sin^4 \alpha \cos^4 \alpha \geq \frac{1}{4}.$$

Deoarece $\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha \geq 2 \sin^4 \alpha \cos^4 \alpha$, rezultă că $\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha \geq \frac{1}{8}$.

Egalitatea are loc pentru $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Exemplul 6. De demonstrat că $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$, dacă α, β, γ sunt unghiurile unui triunghi.

$$\text{Știm că: } \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (1)$$

Deoarece $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, rezultă $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, prin urmare obținem:

$$\cos \frac{\alpha+\beta}{2} = \sin \frac{\gamma}{2}. \quad (2)$$

Însă $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1$. Atunci din relațiile (1) și (2) avem: $\cos \alpha + \cos \beta \leq 2 \sin \frac{\gamma}{2}$. Deci,
 $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 2 \sin \frac{\gamma}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \left(3 - 1 + 4 \sin \frac{\gamma}{2} - 4 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{3}{2} -$
 $\frac{1}{2} \left(1 - 2 \sin \frac{\gamma}{2} \right)^2 \leq \frac{3}{2}.$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\alpha = \beta$ și $2 \sin \frac{\gamma}{2} = 1$, adică triunghiul este echilateral.

Exemplul 7. De demonstrat că $\arctg \frac{4}{3} > \arctg \frac{1}{4} + 2 \arctg \frac{1}{3}$. (1)

Notăm: $\arctg \frac{4}{3} = \alpha$, $\arctg \frac{1}{4} = \beta$, $\arctg \frac{1}{3} = \gamma$.

Atunci $\tg \alpha = \frac{4}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\tg \beta = \frac{1}{4}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{6}$, deoarece $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\tg \gamma = \frac{1}{3}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{6}$.

Astfel, $(\beta + 2\gamma) \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ – intervalul de creștere pentru funcția tangentă este și intervalul de descreștere pentru funcțiile cotangentă și cosinus.

Demonstrăm că $\tg \alpha > \tg(\beta + 2\gamma)$.

$$\text{Avem: } \tg \alpha = \frac{4}{3}; \quad \tg(\beta + 2\gamma) = \frac{\tg \beta + \tg 2\gamma}{1 - \tg \beta \tg 2\gamma} = \frac{\tg \beta + \frac{2 \tg \gamma}{1 - \tg^2 \gamma}}{1 - \tg \beta \cdot \frac{2 \tg \gamma}{1 - \tg^2 \gamma}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}}}{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}}} = \frac{16}{3}.$$

Deoarece $\frac{4}{3} > \frac{16}{13}$, rezultă că $\tg \alpha > \tg(\beta + 2\gamma)$. Deci, $\alpha > \beta + 2\gamma$.

Exemplul 8. De demonstrat că $\arccos \frac{3}{5} + \arccos \frac{12}{13} + \arcsin \frac{1}{4} > \frac{\pi}{2}$.

Vom arăta că $\arccos \frac{3}{5} + \arccos \frac{12}{13} > \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{4}$.

Notăm: $\arccos \frac{3}{5} = \alpha$, $\arccos \frac{12}{13} = \beta$, $\arcsin \frac{1}{4} = \gamma$. Atunci $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
 $\cos \beta = \frac{12}{13}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{6}$; $\sin \gamma = \frac{1}{4}$, $\frac{\pi}{3} < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Deci: $\frac{\pi}{4} < \alpha + \beta < \frac{2\pi}{3}$, $0 < \frac{\pi}{2} - \gamma < \frac{\pi}{6}$, unde
 $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right)$ și $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ sunt intervale de descreștere ale funcției cosinus.

Pentru a demonstra că $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2} - \gamma$ este necesar să demonstrăm că:

$$\cos(\alpha + \beta) < \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right), \text{ sau } \cos(\alpha + \beta) < \sin \gamma.$$

Avem că $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{36}{65} - \frac{20}{65} = \frac{16}{65}$;
 $\sin \gamma = \frac{1}{4}$. Deoarece $\frac{16}{65} < \frac{1}{4}$, rezultă că $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2} - \gamma$.

Exemplul 9. De demonstrat că $2 \operatorname{arcctg} 4 > \frac{\pi}{4} - \operatorname{arcctg} 3$.

Notăm: $\operatorname{arcctg} 4 = \alpha$, $\operatorname{arcctg} 3 = \beta$. Atunci, $\operatorname{ctg} \alpha = 4$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$; $\operatorname{ctg} \beta = 3$,

$0 < \beta < \frac{\pi}{6}$. Deci, $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{4} - \beta < \frac{\pi}{4}$, unde $(0; \frac{\pi}{3})$ și $(\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4})$ sunt intervale de descreștere a funcției cotangentă. Pentru a demonstra că $2\alpha > \frac{\pi}{4} - \beta$ este necesar și suficient să demonstrăm că $\operatorname{ctg} 2\alpha < \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - \beta)$.

$$\text{Avem: } \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{16}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{8};$$

$$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \beta)} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \beta} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2.$$

Deoarece $\frac{15}{8} < 2$, rezultă că $\operatorname{ctg} 2\alpha < \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - \beta)$, deci $2\alpha > \frac{\pi}{4} - \beta$.

În concluzie, menționăm că metodele de rezolvare a exemplurilor din acest articol vor fi de un real folos atât studenților, viitori profesori de matematică, cât și elevilor de liceu și vor contribui nu doar la formarea competențelor de analiză și rezolvare a problemelor, dar și la aprofundarea cunoștințelor generale, ce țin de studierea funcțiilor trigonometrice și aplicațiile acestora la demonstrația inegalităților.

Bibliografie

1. LUPU, I. *Metodologia rezolvării problemelor de demonstrație la matematică*. Chișinău: Prut International, 2008. 140 p. ISBN 9789975699259.
2. ВАХОВСКИЙ, К.Б., РЫВКИН, А.А. *Задачи по элементарной математике повышенной трудности*. Москва: Издательство: Наука, 1969. 495 с.
3. ВЕРЕСОВА, Е.Е., ДЕНИСОВА, Н.С. ПОЛАНОВА, Т.Н. *Практикум по решению математических задач*. Москва: Просвещение, 1979. 240 с.
4. СИВАШИНСКИЙ, И.Х. *Задачи по математике для внеклассных занятий (9-10 классы)*. Москва: Просвещение, 1968. 311 с.

Recepționat / Received: 05.02.2025

Acceptat / Accepted: 18.03.2025

Email: mihaelahajdeu93@gmail.com