

CZU: 514+512.64+372.851

DOI: 10.36120/2587-3636.v39i1.14-22

REZOLVAREA PROBLEMELOR NEGEOMETRICE CU PARAMETRI PRIN METODE GEOMETRICE

Laurențiu CALMUȚCHI, dr. hab., prof.univ.

<https://orcid.org/0000-0001-6665-7927>

Ozkan TURAN, doctorand

<https://orcid.org/0000-0002-4571-2015>

Catedra Matematică și Fizică, UPSC

Rezumat. Articolul de față, explorează o modalitate inovatoare de abordare a metodelor geometrice pentru a rezolva probleme negeometrice care implică parametri. Vom evidenția unele concepte fundamentale, tehnicile geometrice aplicate și exemplele relevante care demonstrează eficiența acestor metode

Cuvinte-cheie: Probleme cu parametri, metode geometrice, probleme negeometrice, expresii algebrice, reprezentări grafice, analiză geometrică.

SOLVING NON-GEOMETRIC PROBLEMS WITH PARAMETERS BY GEOMETRIC METHODS

Abstract: This article explores an innovative approach to geometrical methods to solve non-geometric problems involving parameters. We will highlight some fundamental concepts, applied geometric techniques and relevant examples that demonstrate the effectiveness of these methods.

Keywords: problems with parameters, geometric methods, non-geometric problems, algebraic expressions, graphic representations, geometric analysis.

Introducere

Problemele cu parametri reprezintă o provocare semnificativă în matematică, apărând frecvent în diverse domenii, de la algebra elementară până la analiza complexă și optimizare. Aceste probleme implică de obicei determinarea valorilor unui parametru (sau a unui set de parametri) pentru care o ecuație, o inecuație sau un sistem de ecuații are o anumită proprietate (de exemplu, existența unei soluții, un anumit număr de soluții, soluții într-un anumit interval, etc.).

Abordarea clasică a acestor probleme se bazează în principal pe metode algebrice și analitice. Cu toate acestea, există o abordare alternativă, adesea subestimată, care constă în utilizarea tehnicilor geometrice. Această abordare nu numai că poate oferi o perspectivă mai intuitivă asupra problemei, dar poate duce și la soluții mai elegante și mai simple. Cunoașterea tehnicilor și abordărilor speciale pentru rezolvarea problemelor matematice permite nu numai rezolvarea corectă a acestora, ci și rezolvarea lor într-un mod simplu și original [1, 2].

Ipoteza cercetării: rezolvarea problemelor algebrice cu parametri, folosind metoda geometrică, este ghidată de o reprezentare vizuală a condițiilor sub forma unui desen sau

scheme, care ajută la o mai bună înțelegere a stării problemei, le face mai vizuale, evidente, simplifică foarte mult soluția și duce la un răspuns mai rapid.

Scopul principal este de a evidenția avantajele acestei abordări, inclusiv clarificarea relațiilor complexe, identificarea condițiilor de existență a soluțiilor și facilitarea unei înțelegeri mai profunde a comportamentului problemei în funcție de variația parametrilor.

Metode aplicate

Deși problemele algebrice sunt în mod tradițional rezolvate cu instrumente algebrice și analitice, propunem o strategie alternativă care transformă problema într-un context geometric, permițând o vizualizare mai intuitivă și o rezolvare potențial mai elegantă. Vom demonstra, prin exemple concrete, modul în care reprezentările geometrice, cum ar fi graficele funcțiilor, inegalitățile și transformările geometrice, pot oferi o perspectivă profundă asupra naturii soluțiilor și a influenței parametrilor.

Metoda geometrică (transformarea și vizualizarea) deține ideea centrală de a transforma problema negeometrică într-o problemă geometrică echivalentă. Aceasta se realizează, de obicei, prin următoarele etape:

- *Reprezentarea grafică:* Transformarea ecuațiilor sau inegalităților în reprezentări grafice în planul cartezian sau în spații multidimensionale;
- *Interpretarea geometrică a parametrilor:* Identificarea modului în care variația parametrilor afectează reprezentările grafice (de exemplu, translații, rotații, dilatări);
- *Analiza geometrică a condițiilor problemei:* Reformularea condițiilor problemei în termeni geometrice (de exemplu, intersecția a două curbe, distanța dintre un punct și o dreaptă, aria unei figuri);
- *Construcția și analiza geometrică:* Utilizarea instrumentelor geometrice (rigla, compasul, software geometric) pentru a vizualiza și analiza problema;
- *Deducerea soluțiilor:* Identificarea soluțiilor problemei inițiale prin interpretarea geometrică a soluțiilor problemei transformate;
- *Utilizarea teoremelor geometrice:* Folosirea teoremelor cunoscute (de exemplu, teorema lui Pitagora) pentru a deduce relații între parametrii problemei.

Toate acestea implică utilizarea figurilor geometrice, diagramelor și reprezentărilor vizuale pentru a analiza și rezolva problem [3].

Pentru a ilustra eficacitatea metodei geometrice, vom analiza câteva exemple concrete:

Exemplul 1. Pentru ce valori a parametrului a ecuația $|x + 3| + |x - 1| = a$ nu are soluții, are o singură soluție, două soluții, o infinitate de soluții?

Soluție: În limbaj geometric ecuația $|x + 3| + |x - 1| = a$ înseamnă, că trebuie de găsit așa un punct $M(x)$, suma distanțelor de la care până la punctele $A(-3)$ și $B(1)$ să fie egală cu a . Din fig. 1 se vede, că $AB = 4$, prin urmare:



Figura 1

Dacă $a < 4$, atunci așa punct $M(x)$, suma distanțelor lor de la care până la punctele $A(-3)$ și $B(1)$ să fie egală cu a , nu există, deoarece pentru punctele segmentului AB suma distanțelor până la A și B este egală cu 4, iar pentru punctele situate în exteriorul segmentului AB , suma distanțelor este mai mare decât 4. Prin urmare, pentru $a < 4$ ecuația nu are soluții.

Dacă $a > 4$, atunci întotdeauna există două puncte $M_1(x_1)$ și $M_2(x_2)$, situate în exteriorul segmentului AB și simetrice în raport cu segmentul AB , suma distanțelor de la fiecare din care până la punctele A și B să fie egală cu a .

Dacă $a = 4$, atunci există o infinitate de puncte $M(x)$, suma distanțelor de la fiecare din care până la punctele A și B să fie egală cu 4 (toate aparțin segmentului AB). În acest caz ecuația are o infinitate de soluții.

Să observăm că nu există un punct, distanța de la care până la punctele A și B să fie egală cu a . Dacă există așa punct, atunci și simetricul acestui punct în raport cu AB , ar fi o soluție. Prin urmare ecuația nu poate avea o singură soluție.

Răspuns: Pentru $a < 4$, ecuația nu are soluții, pentru $a > 4$ ecuația are 2 soluții, pentru $a = 4$ ecuația are o infinitate de soluții, o singură soluție ecuația nu poate avea nici pentru o valoare a parametrului a .

Exemplul 2. De aflat toate valorile parametrului t , pentru fiecare din care sistemul de ecuații

$$\begin{cases} (2t - 3)x + 5y \leq 4t, \\ 4x + (3t - 4)y \leq 3 \\ (2t + 1)x + 2y \geq 4t + 1. \end{cases} \quad (1)$$

are exact o singură soluție.

Soluție: Să observăm că pentru orice valoare fixată pentru parametrul t , fiecare inecuație a sistemului dat reprezintă un semiplan împreună cu marginea sa. Aceste trei semiplane au un singur punct comun, dacă dreptele ce determină aceste trei plane au un singur punct comun.

Alcătuiim sistemul format din trei ecuații liniare

$$\begin{cases} (2t - 3)x + 5y = 4t, \\ 4x + (3t - 4)y = 3 \\ (2t + 1)x + 2y = 4t + 1. \end{cases} \quad (2)$$

Să excludem din acest sistem variabilele x și y . După unele transformări, obținem ecuația:

$$42t^2 - 17t - 25 = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații sunt $t = 1$ și $t = -\frac{25}{42}$.

Pentru $t = 1$, obținem $x = 1$ și $y = 1$.

Dacă și $t = -\frac{25}{42}$, atunci sistemul (2) are o infinitate de soluții.

Răspuns: Pentru $t = 1$: $x = y = 1$.

Exemplul 3. Pentru ce valori a parametrului t , modulul diferenței rădăcinilor ecuației $x^2 - 6x + 12 + t^2 - 4t = 0$ primește cea mai mare valoare?

Soluție: Modulul diferenței a două numere reprezintă distanța între două numere pe axa de coordonate.

În partea stângă a ecuației date formăm pătrate complete:

$$(x^2 - 6x + 9) + (t^2 - 4t + 4) - 1 = 0,$$

$$(x - 3)^2 + (t - 2)^2 = 1.$$

Aceasta este ecuația cercului cu centrul în punctul $(3; 2)$ și raza egală cu 1 în sistemul de coordonate Oxt .

Rădăcinile ecuației sunt egale cu abscisele punctelor de intersecție a cercului și a drepte paralele cu axa absciselor. Distanța

cea mai mare dintre puncte va fi atunci când aceste puncte vor fi extremitățile diametrului cercului, care este egal cu 2.

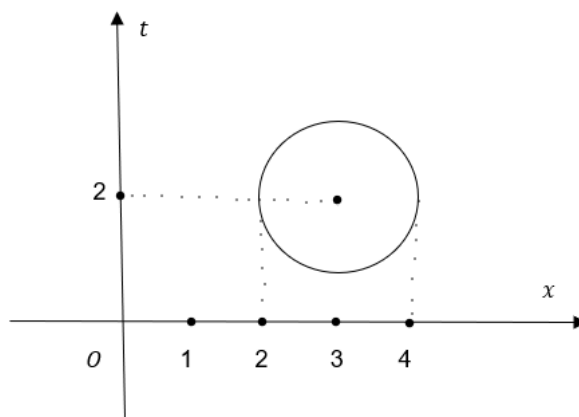


Figura 2

$$x_1 = 2, x_2 = 4; |x_2 - x_1| = 2.$$

Să determinăm valorile pentru t :

$$1) x = 2; (2 - 3)^2 + (t - 2)^2 = 1; 1 + (t - 2)^2 = 1; (t - 2)^2 = 0; t = 2.$$

$$2) x = 4; (4 - 3)^2 + (t - 2)^2 = 1; t - 2 = 0; t = 2.$$

Răspuns: $t = 2$.

Exemplul 4. De aflat toate valorile parametrului t pentru fiecare din care sistemul

$$\begin{cases} (x + 2t - 1)^2 + (y + 5t - 2)^2 = 4 \\ (x - 3t + 1)^2 + (y - 6t + 5)^2 = 9. \end{cases}$$

are o singură soluție:

Soluție: Să observăm că sistemul dat este format din două ecuații, fiecare din care reprezintă ecuația unui cerc.

Prima ecuație a sistemului reprezintă cercul cu centrul $(-2t + 1; -5t + 2)$ și raza egală cu 2. A doua ecuație a sistemului reprezintă cercul cu centrul în punctul $(3t - 1; 6t - 5)$ și raza egală cu 3.

În limbajul geometric, condiția problemei puse în problema dată este de a determina toate valorile parametrului t pentru care aceste două cercuri sunt tangente, adică au un singur punct comun. Aceasta este posibil în două cazuri: distanța dintre centrele cercurilor este egală cu suma razelor (tangente în exterior) sau cu diferența razelor (tangente în interior).

În primul caz obținem:

$$\sqrt{(3t-1+2t-1)^2 + (6t-5+5t-2)^2} = 5 \quad \text{sau} \quad \sqrt{(5t-2)^2 + (11t-7)^2} = 5.$$

Rădăcinile acestei ecuații sunt $t = \frac{14}{73}$ și $t = 1$

În al doilea caz obținem:

$$\sqrt{(5t-2)^2 + (11t-7)^2} = 1. \text{ Această ecuație nu are rădăcini reale.}$$

Răspuns: $\frac{14}{73}$; 1

Exemplul 5. De aflat cea mai mică valoare a parametrului a , pentru care sistemul de ecuații are o singură soluție:

$$\begin{cases} (x+4+2a)^2 + (y+1+a)^2 \leq \frac{(a+1)^2}{80} \\ x-2y \geq -1 \end{cases}$$

Soluție: Inecuația $(x+4+2a)^2 + (y+1+a)^2 \leq \frac{(a+1)^2}{80}$ reprezintă un disc cu centrul în punctul $A(-4-2a; -1-a)$ și raza $\frac{|a+1|}{4\sqrt{5}}$.

Inecuația $-2y \geq -1$, $y \leq 0.5x + 0.5$ reprezintă un semiplan cu marginea:

$$d: y = 0.5x + 0.5.$$

Sistemul de inecuații are o singură soluție, dacă discul și dreapta d au un singur punct comun, punctul de tangență M .

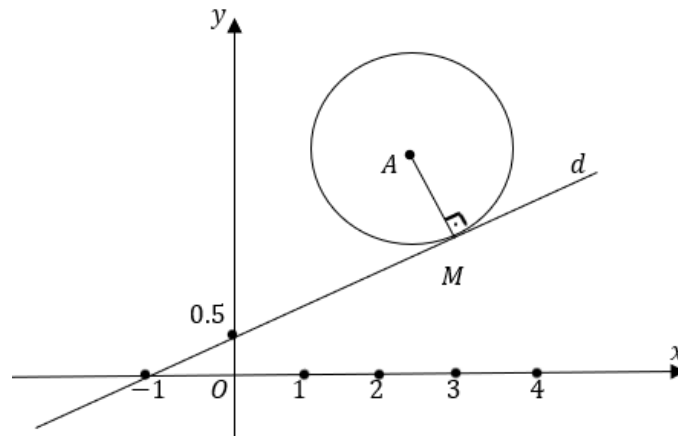


Figura 3

Deoarece $d: y = 0.5x + 0.5$, atunci $k_d = 0.5$. Așa cum $AM \perp d$, urmează $k_{AM} = -2$.

Condiția ca sistemul să aibă o singură soluție este ca sistemul

$$\begin{cases} y - y_A = K_{AM}(x - x_A) \\ x - 2y = -1 \\ AM = \sqrt{(x+4+2a)^2 + (y+1+a)^2} = \frac{|a+1|}{4\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 1 + a = -2(x + 4 + 2a) \\ x - 2y = -1 \\ \sqrt{(x+4+2a)^2 + (y+1+a)^2} = \frac{|a+1|}{4\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 9 + 5a = 0 \\ x - 2y = -1 \\ (x + 4 + 2a)^2 + (y + 1 + a)^2 = \frac{(a+1)^2}{80} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2a - 3,8 \\ y = -a - 1,4 \\ (-2a - 3,8 + 4 + 2a)^2 + (-a - 1,4 + 1 + a)^2 = \frac{(a+1)^2}{80} \end{cases}$$

$$(0,2)^2 + (-0,4)^2 = \frac{(a+1)^2}{80}, 0,2 = \frac{(a+1)^2}{80}, (a+1)^2 = 16,$$

$$|a+1| = 4, a = 3, a = -5.$$

Cea mai mică valoare este $a = -5$.

Răspuns: $a = -5$.

Exemplul 6. Pentru ce valori a parametrului t ecuația $|x - 2t| + |4x + t| = 27$ are exact două soluții?

Soluție: Introducem în plan un sistem rectangular de coordonate tOx . Construim dreptele $x = 2t$ și $x = -\frac{t}{4}$ în sistemul de coordonate tOx . Dreptele $x = 2t$ și $x = -\frac{t}{4}$ împart planul în patru părți $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Pentru fiecare punct din α $x - 2t \geq 0, 4x + t \geq 0$, pentru punctele din β $x - 2t \geq 0, 4x + t \leq 0$, pentru punctele din γ $x - 2t \leq 0, 4x + t \leq 0$ și pentru punctele din δ $x - 2t \leq 0, 4x + t \geq 0$.

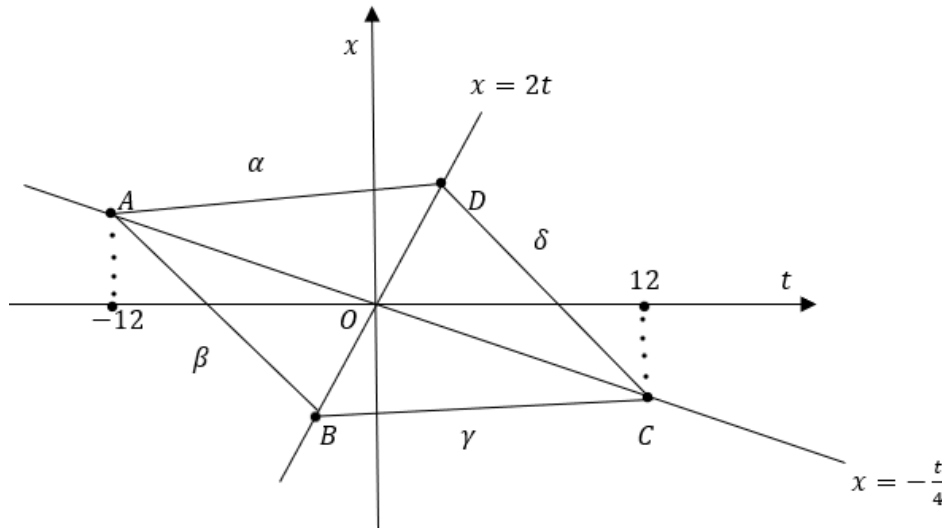


Figura 4

Din definiția modului avem:

$$|t| = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases}$$

Rezolvăm ecuația inițială în fiecare din cazurile:

1) $(t, x) \in \alpha$, Atunci

$$x - 2t + 4x + t = 27 \Leftrightarrow 5x - t = 27 \Leftrightarrow x = \frac{27 + t}{5} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}t + \frac{27}{5}. (d_1)$$

2) $(t, x) \in \beta$, Atunci

$$x - 2t - 4x - t = 27 \Leftrightarrow 3x - 3t = 27 \Leftrightarrow x = -t - 9. (d_2)$$

3) $(t, x) \in \gamma$, Atunci

$$-x + 2t - 4x - t = 27 \Leftrightarrow -5x + t = 27 \Leftrightarrow x = \frac{t-27}{5} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}t - \frac{27}{5}. (d_3)$$

4) $(t, x) \in \delta$, Atunci

$$-x + 2t + 4x + t = 27 \Leftrightarrow 3x + 3t = 27 \Leftrightarrow x = -t + 9. (d_4)$$

Construim dreptele d_1, d_2, d_3, d_4 în sistemul de coordonate tOx .

Dreptele $x = \frac{1}{5}t + \frac{27}{5}$, $x = \frac{1}{5}t - \frac{27}{5}$ și dreptele $x = -t - 9$, $x = -t + 9$ sunt paralele două câte două și intersectându-se formează o mulțime de puncte, ce reprezintă paralelogramul $ABCD$, în care $A(-12, 3)$, $C(12, -3)$. Din Fig. 4 se vede că dreapta $t = c$, unde $c \in \mathbb{R}$ intersectează mulțimea construită în două puncte pe intervalul $(-12, 12]$.

Răspuns: Ecuația are două rădăcini pentru $t \in (-12, 12]$.

Exemplul 7. De aflat toate valorile parametrului a , pentru fiecare dintre care sistemul de

$$\text{inecuații are soluții: } \begin{cases} \sqrt{(x-2a)^2 + (y-a)^2} \leq \frac{|a|}{6\sqrt{5}} \\ x - 2y \geq 1 \end{cases}$$

Soluție: Inecuația $(x-2a)^2 + (y-a)^2 \leq \frac{a^2}{180}$ reprezintă un disc cu centrul în punctul $(2a, a)$ și raza $\frac{|a|}{6\sqrt{5}}$. Inecuația $x - 2y \geq 1$ reprezintă un semiplan cu marginea $y = 0.5x - 0.5$.

Sistemul are soluții dacă discul și semiplanul au puncte comune. Pentru aceasta distanța de la centrul discului până la dreapta $y = 0.5x - 0.5$ trebuie să fie mai mare decât raza discului. Această distanță între dreptele paralele $y = 0.5x$ și $y = 0.5x - 0.5$

$$\rho = \frac{0.5}{\sqrt{(0.5)^2 + 1^2}} = \frac{0.5}{\sqrt{0.25 + 1}} = \frac{0.5}{0.5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

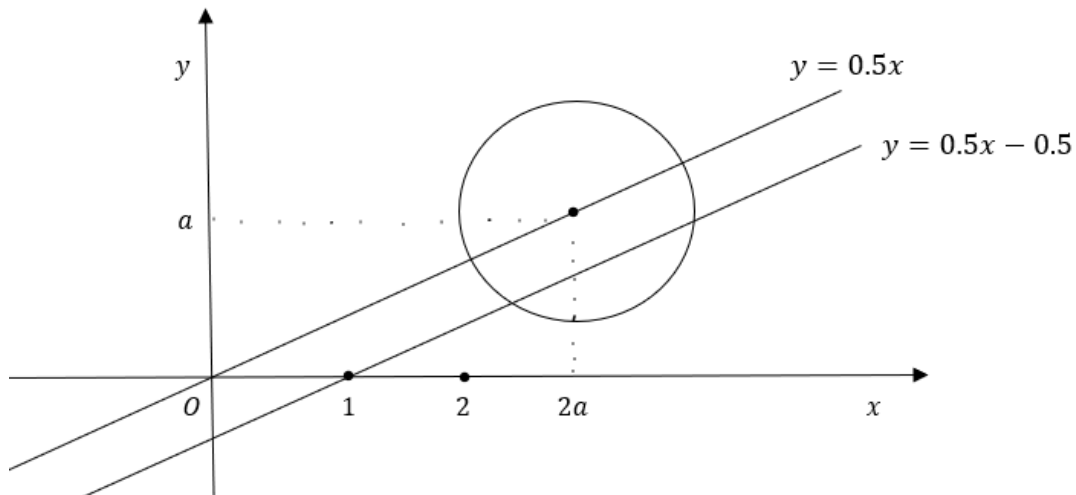


Figura 5

Sistemul are soluții pentru punctele $\frac{1}{5} \leq \frac{|a|}{6\sqrt{5}}$, $|a| \geq 6$, $a \geq 6 \cup a \leq -6$.

Răspuns: $a \leq -6$, $a \geq 6$ [4,5].

Rezultate și discuții

Metodele geometrice oferă o abordare eficientă și intuitivă pentru rezolvarea problemelor negeometrice cu parametri. Prin utilizarea acestor metode, cercetătorii pot obține soluții clare și vizuale, facilitând înțelegerea și aplicarea conceptelor complexe.

Problemele negeometrice cu parametri sunt frecvent întâlnite în diverse domenii ale științei și ingineriei. Aceste probleme pot include ecuații algebrice, optimizare și analize statistice. *Metodele geometrice* oferă o abordare vizuală și intuitivă pentru a înțelege și a rezolva aceste probleme.

Soluțiile obținute prin metode geometrice au demonstrat o eficiență crescută în comparație cu abordările tradiționale. De asemenea, vizualizarea geometrică a problemelor a facilitat înțelegerea și comunicarea soluțiilor. Avantajele metodei geometrice se caracterizează prin:

- *Intuiție*: Oferă o înțelegere mai intuitivă a problemei, permițând vizualizarea relațiilor și a comportamentului soluțiilor.
- *Simplitate*: Poate simplifica rezolvarea problemelor complexe, transformându-le în probleme geometrice mai ușor de gestionat.
- *Eleganță*: Conduce adesea la soluții mai elegante și mai concise.
- *Identificarea cazurilor speciale*: Facilitează identificarea cazurilor speciale și a condițiilor limită.

Cu toate acestea metoda geometrică dispune și de unele dezavantaje cum ar fi:

- *Limitări*: Nu este aplicabilă tuturor tipurilor de probleme cu parametri.
- *Dificultate*: Poate necesita abilități de vizualizare și construcție geometrică.
- *Generalizare*: Generalizarea la probleme cu mai mulți parametri poate fi dificilă.

Metoda geometrică poate fi aplicată cu succes în diverse domenii:

- *Algebră*: Rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor cu parametri.
- *Analiză*: Studiul funcțiilor cu parametri și al comportamentului lor asimptotic.
- *Geometrie*: Determinarea locurilor geometrice și a proprietăților figurilor geometrice.
- *Optimizare*: Găsirea valorilor optime ale funcțiilor sub restricții cu parametri.
- *Fizică*: Modelarea fenomenelor fizice cu ajutorul parametrilor și a reprezentărilor geometrice.
- *Economie*: Analiza modelelor economice cu ajutorul parametrilor și a reprezentărilor grafice.

Concluzii și recomandări

Rezolvarea problemelor negeometrice cu parametri prin metode geometrice reprezintă o abordare valoroasă și complementară metodelor algebrice și analitice tradiționale. Deși nu este o soluție universală, această metodă oferă adesea o perspectivă unică și o intuiție profundă asupra problemelor complexe. Prin transformarea problemelor

în context geometric, putem beneficia de vizualizare, simplificare și eleganță în procesul de rezolvare. Încurajăm explorarea și utilizarea acestei metode în diverse domenii ale matematicii și ale științelor aplicate. Metoda geometrică este clară, vă permite să economisiți timp, să puteți și lua în considerare toate soluțiile posibile. Această metodă contribuie nu numai la formarea abilităților de rezolvare a problemelor cu parametri, ci și la dezvoltarea intelectuală a elevilor. Propunem un algoritm pentru rezolvarea problemelor algebrice folosind metoda geometrică:

- Construirea unui model geometric al unei probleme algebrice și traducerea lui în limbajul geometric;
- Rezolvarea problemei geometrice rezultate;
- Cheia rezolvării se găsește în interpretarea geometrică a problemei;
- Traducerea răspunsului primit din limbajul geometric în limbajul natural.

Bibliografie

1. CALMUȚCHI, L. *Metodologia rezolvării problemelor cu parametri*. Chișinău: UST, 2016, 284 p. ISBN 978-9975-76-155-0.
2. CALMUȚCHI, L. TURAN, O. *Methodology for solving problems with parameters*. Chișinău: Pulsul Pieții. 2022, 137 p.
3. БЛИНКОВ А. Д. *Геометрия в негеометрических задачах*. Москва. Издательство МЦНМО, 2016. 155 с. ISBN 978-5-4439-3031-2.
4. ГЛИНКИН, Г. З. *Геометрические решения негеометрических задач*. Москва, Просвещение, 2007. 80 с.
5. ДАЛИНГЕР, В.А. *Задачи с параметрами*. Москва: Издательство Юрайт, 2022. 501 с. ISBN 978-5-534-04757-8.

Recepționat / Received: 27.02.2025

Acceptat / Accepted: 18.03.2025

Email: lcalmutchi@gmail.com