CZU: 519.83:519.17 DOI: 10.36120/2587-3636.v39i1.69-80

ASPECTE METODOLOGICE PRIVIND REZOLVAREA JOCURILOR MATRICEALE CU SUMĂ NULĂ ÎN STRATEGII PURE ȘI MIXTE DE DIMENSIUNEA 2*2

Natalia JOSU, dr., conf. univ.
https://orcid.org/0000-0002-3687-5437
Catedra Informatică și Tehnologii Informaționale
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău

Rezumat. În acest articol este prezentată metodologia de soluționare a jocurilor matriceale, abordând două tipuri distincte de situații: jocurile cu punct șa rezolvate în strategii pure și jocurile de dimensiune 2×2 soluționate utilizând strategii mixte. În prima parte, se analizează condițiile de existență a punctului șa și procedurile de determinare a strategiilor optime în cazul acestora. În a doua parte, sunt detaliate metodele grafice și analitice pentru rezolvarea jocurilor de dimensiune 2×2, atunci când punctul șa lipsește, cu accent pe utilizarea strategiilor mixte pentru identificarea soluțiilor optime. Articolul oferă atât fundamente teoretice, cât și aplicații practice, contribuind la o înțelegere aprofundată a teoriei jocurilor cu sumă nulă.
Cuvinte cheie: teoria jocurilor, joc matriceal, punct șa, strategie pură, strategie mixtă, soluție optimă, echilibru Nash.

METHODOLOGICAL ASPECTS ON SOLVING ZERO-SUM MATRIX GAMES IN PURE AND MIXED STRATEGIES OF SIZE 2*2

Abstract. In this paper the methodology for solving matrix games is presented, addressing two distinct types of situations: saddle-point games solved in pure strategies and 2×2 dimensional games solved using mixed strategies. In the first part, the conditions for the existence of the saddle point and the procedures for determining the optimal strategies in their case are analyzed. In the second part, graphical and analytical methods for solving 2×2 dimensional games are detailed when the saddle point is missing, with an emphasis on the use of mixed strategies to identify optimal solutions. The article provides both theoretical foundations and practical applications, contributing to a thorough understanding of zero-sum game theory.
Keywords: game theory, matrix game, saddle point, pure strategy, mixed strategy, optimal solution, Nash equilibrium.

Introducere

Teoria jocurilor propune diverse clasificări ale jocurilor strategice, bazate pe criterii precum: numărul de jucători, strategiile disponibile, tipul funcției de câștig, natura interacțiunii dintre jucători, caracteristicile câștigului, numărul de mutări sau nivelul informației disponibile [1, 2]. Aceste clasificări sunt esențiale pentru înțelegerea dinamicii jocurilor strategice, ajutând la identificarea tipului de soluție optimă și la formularea strategiilor corespunzătoare.

După cum s-a menționat în lucrarea [1], „jocurile matriceale reprezintă un subiect de interes special în teoria jocurilor. Motivul principal ar fi simplitatea reprezentării relațiilor strategice între jucători, determinarea cu ușurință a echilibrului Nash, reducerea numărului de strategii a unei matrice complexe utilizând metoda dominării”.

Se consideră un joc finit cu doi jucători *A* și *B*, în care *A* posedă *m* strategii pure, iar *B* – *n* strategii pure. Un astfel de joc de dimensiunea $m \times n$ se numește *joc matriceal*, iar funcția de câștig se reprezintă sub forma unui tabel de plăți, adică o matrice de câștig (payoff matrix) de dimensiunea $m \times n$, $A = a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Această formă matriceală de reprezentare a jocului se mai numește și *forma normală*.

Tabelul 1. Matricea de plăți a unui joc strategic [1]

	Strategiile jucătorului B				
Strategiile jucătorului A	A_i/B_j	B_1	B_2	$\cdots$	B_n
	A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
	A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
	A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

„Elementul a_{ij} reprezintă câștigul jucătorului *A* la alegerea strategiilor A_i și B_j. Fiind un joc cu sumă nulă, matricea *A* se scrie în raport cu un singur jucător și anume *A*. Pentru jucătorul *B* toate elementele matricei de plăți au semn contrar. Jucătorul *A* se mai numește jucător *maximizant*, iar *B* – jucător *minimizant*” [1]. Astfel scopul jucătorului *A* este maximizarea câștigului, iar scopul jucătorului *B* este minimizarea pierderii (minimizarea câștigului primului jucător). Jocul matriceal cu *sumă nulă* (câștigul unui jucător reprezintă pierderea echivalentă a celuilalt) se întitulează altfel și ca „*joc antagonist*”:

- „Jocurile cu sumă nulă *cu punct șa* pot fi soluționate cu ușurință prin determinarea valorii inferioare și superioare a jocului. În acest caz, se spune că soluția jocului se va determina în *strategii pure*.
- Jocurile cu sumă nulă *fără punct șa* pot fi soluționate în *strategii mixte* și pot fi clasificate în: jocuri de dimensiunea 2×2, $2 \times n$, $m \times 2$ și $m \times n$” [1].

După cum s-a punctat în [1] „jocurile de dimensiunea $2 \times n$, $m \times 2$ pot fi rezolvate cu ușurință prin aplicarea metodei grafice sau pot fi reduse la un joc de dimensiunea 2×2, care poate fi soluționat atât aplicând metoda grafică cât și metoda analitică. În ceea ce privește jocurile matriceale de dimensiunea $m \times n$, acestea pot fi reduse la rezolvarea unei probleme de programare liniară”.

În cele ce urmează, se va ilustra modul de rezolvare a jocurilor matriceale cu punct șa în strategii pure și a jocurilor de dimensiunea 2×2 în strategii mixte.

Metode de soluționare a jocurilor matriceale

1. ***Jocuri cu sumă nulă cu punct șa – soluția se va determina în strategii pure***

Principiul maximin (din perspectiva jucătorului *A*) – strategia primului jucător vizează maximizarea câștigului minim garantat obținut de la al doilea jucător, în timp ce strategia celui de al doilea jucător constă în reducerea la minim a câștigului maxim pe care trebuie să-l acorde primului jucător. Prin urmare, dacă jucătorul *A* alege strategia A_i, se presupune că jucătorul *B* va opta pentru acea strategie B_j, care va conduce la obținerea unui câștig cât mai mic pentru jucătorul *A*. În acest scop:

- se va determina valoarea minimă pe fiecare linie din matricea *A* și anume $\alpha_i = \min_j(a_{ij}), i = 1..m, j = 1..n$;
- așa cum jucătorul *A* are ca scop maximizarea câștigului, acesta va alege dintre cele *m* strategii pure, acea strategie A_i, care reprezintă valoarea maximă dintre toate valorile minime α_i, adică $\alpha = \max_i(\alpha_i) = \max_i\left(\min_j(a_{ij})\right), i = 1..m, j = 1..n$.
- α – reprezintă câștigul garantat pe care primul jucător și-l poate asigura. Această valoare este numită *prețul inferior al jocului* sau *valoarea inferioară a jocului*.

Strategia, care îi asigură primului jucător un câștig egal cu α reprezintă *strategia optimă* a primului jucător și se mai numește strategie *maximin* iar α mai este numită *valoare maximin*.

Principiul minimax (din perspectiva jucătorului *B*) – al doilea jucător dorește să suporte o pierdere a_{ij} cât mai mică, adică să ofere primului jucător un câștig a_{ij} cât mai mic. Prin urmare, dacă jucătorul *B* alege strategia B_j, se presupune că jucătorul *A* va opta pentru acea strategie A_i, care va conduce la obținerea unui câștig cât mai mare. În acest scop pentru a determina strategia optimă pentru al doilea jucător se vor urma pașii:

- se va determina valoarea maximă pe fiecare coloană din matricea *A* și anume $\beta_j = \max_i(a_{ij}), i = 1..m, j = 1..n$;
- așa cum jucătorul *B* are ca scop minimizarea pierderii (minimizarea câștigului jucătorului *A*), acesta va alege dintre cele *n* strategii pure, acea strategie B_j, care reprezintă valoarea minimă dintre toate valorile maxime β_j, adică $\beta = \min_j(\beta_j) = \min_j\left(\max_i(a_{ij})\right), i = 1..m, j = 1..n$.
- β – reprezintă pierderea garantată pentru al doilea jucător. Această valoare este numită *prețul superior al jocului* sau *valoarea superioară a jocului*.

Strategia B_j, care îi asigură jucătorului *B* o pierdere egală cu β reprezintă *strategia optimă* pentru jucătorul al doilea și se mai numește strategie *minimax*, iar β mai este numită valoare *minimax*.

Pentru un joc matriceal are loc întotdeauna inegalitatea $\alpha \leq \beta$. Dacă $\alpha = \beta$ jocul matriceal se va numi *joc cu punct șa*, iar soluția jocului se va determina în strategii pure. Strategiile A_i și B_j corespunzătoare punctului șa (punctului de echilibru) a_{ij} se numesc *strategii optime*, iar perechea (A_i, B_j) soluția jocului în strategii pure sau echilibru Nash. Ele determină valoarea jocului v (prețul jocului), care este egală cu elementul corespunzător punctului şa şi are loc egalitatea $\alpha = \beta = v$. Dacă $v > 0$, atunci jocul este avantajos pentru jucătorul A, altfel pentru jucătorul B. Un joc poate avea mai multe puncte şa toate asigurând însă aceeaşi valoare a jocului [3].

Exemplul 1. Se consideră jocul caracterizat de matricea $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$. Având ca referință matricea plăților A, se cere să se determine:

1. Prețul inferior al jocului α;
2. Prețul superior al jocului β;
3. Strategia *maximin* (strategia optimă) a jucătorului A;
4. Strategia *minimax* (strategia optimă) a jucătorului B;
5. Punctul şa al jocului dacă există;
6. Prețul jocului v;
7. Perechea de strategii optime.

Soluție: Conform matricei plăților, se observă că jucătorul A dispune de trei strategii pure şi jucătorul B, de asemenea, are la dispoziție trei strategii pure. Pentru comoditate, calculele au fost realizate în MS Excel.

Tabelul 2. Soluția jocului matriceal. Exemplul 1

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	$\alpha_i = \min\limits_j(a_{ij})$	$\alpha = \max\limits_i(\alpha_i)$	
A_1	7	9	10	7	7	Strategia optimă a jucătorului A - A_1
A_2	3	4	8	3		
A_3	7	5	8	5		
$\beta_j = \max\limits_i(a_{ij})$	7	9	10		Prețul inferior al jocului	
$\beta = \min\limits_j(\beta_j)$	7			Prețul superior al jocului	$\alpha = \beta = v = 7$	
Strategia optimă a jucătorului B - B_1				Perechea de strategii optime a jocului	$(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{B_1})$	Punctul şa: $\boldsymbol{a_{11}}$

Pe baza rezultatelor obținute putem formula următoarele concluzii:

1. Prețul inferior al jocului $\alpha = 7$;
2. Prețul superior al jocului $\beta = 7$;
3. Strategia *maximin* (strategia optimă) a jucătorului A este A_1;
4. Strategia *minimax* (strategia optimă) a jucătorului B este B_1;
5. Deoarece $\alpha = \beta$ avem că jocul are punct şa şi anume elementul $a_{11} = 7$;
6. În acest caz prețul jocului $v = \alpha = \beta = 7$;
7. Perechea de strategii optime pentru jocul definit de matricea de căştiguri A este (A_1, B_1). Soluția jocului poate fi scrisă sub forma $(A_{opt}, B_{opt}, v) = (A_1, B_1, 7)$.

2. *Jocuri cu sumă nulă fără punct șa – soluția se va determina în strategii mixte*

Prețul jocului v, satisface întotdeauna condiția $\alpha \leq v \leq \beta$. Prin urmare, prețul jocului este întotdeauna cuprins între limitele valorii inferioare și superioare.

Un interes deosebit în teoria jocurilor îl prezintă jocurile matriceale fără punct șa. Pentru astfel de jocuri, întotdeauna are loc condiția $\alpha < \beta$.

În cazul unui joc fără punct șa, starea de echilibru poate fi atinsă doar prin utilizarea de către jucători a strategiilor mixte. O *strategie mixtă* implică mai multe strategii pure, care sunt folosite cu probabilități diferite, iar decizia privind strategia care va fi aplicată la următoarea mutare este păstrată în secret de către jucători. Strategiile pure incluse în strategiile mixte optime cu probabilități diferite de zero se numesc *strategii active.*

Teoria jocurilor matriceale permite determinarea setului de strategii pure, care formează o strategie mixtă optimă, estimarea probabilităților de utilizare a acestora și prețul jocului v. În continuare se va nota strategia mixtă a primului jucător cu $p = p_1, p_2, \dots, p_m$, $p_i \geq 0, i = 1,2, \dots, m$, iar strategia mixtă a jucătorului al doilea cu $q = q_1, q_2, \dots, q_n$, $q_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n$. Pentru p, q au loc egalitățile $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ și $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$. Soluția jocului este definită ca perechea de strategii optime (p^*, q^*) pentru care se atinge o stare de echilibru, iar valoarea jocului v este determinată de expresia $v = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i^* q_j^*$. Prețul jocului v se mai numește *câștig mediu* al jucătorului A când acesta folosește strategia mixtă p, iar jucătorul B strategia mixtă q.

Astfel, o *strategie mixtă* a jucătorului A constă în aplicarea strategiilor pure $A_1, A_2, \dots, A_m$ cu anumite probabilități și acest lucru poate fi notat astfel: $\begin{pmatrix} A_1, A_2, \dots, A_m \\ p_1, p_2, \dots, p_m \end{pmatrix}$. În mod analog o *strategie mixtă* a jucătorului B constă în aplicarea strategiilor pure $B_1, B_2, \dots, B_n$ cu anumite probabilități: $\begin{pmatrix} B_1, B_2, \dots, B_n \\ q_1, q_2, \dots, q_n \end{pmatrix}$. În acest caz matricea de plăți extinsă va avea forma:

Tabelul 3. Matricea de plăți extinsă

		Strategiile jucătorului B				
		q	q_1	q_2	$\cdots$	q_n
Strategiile jucătorului A	**p**	A_i/B_j	B_1	B_2	$\cdots$	B_n
	p_1	A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
	p_2	A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
	p_m	A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

2.1. *Metoda analitică de soluționare a jocurilor matriceale de dimensiunea* 2×2

Fie jocul caracterizat de matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Soluția optimă în strategii mixte constă în determinarea unor strategii optime de tipul $S_A = (p_1, p_2)$ și $S_B = (q_1, q_2)$.

Probabilitățile de aplicare ale strategiilor pure respectă următoarele relații $p_1 + p_2 = 1$ și $q_1 + q_2 = 1$. În acest caz vom avea:

- Dacă jucătorul A utilizează strategia sa mixtă optimă, iar jucătorul B utilizează strategia sa activă pură B_1, atunci prețul jocului v este egal cu $a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v$.
- Dacă jucătorul A utilizează strategia sa mixtă optimă, iar jucătorul B utilizează strategia sa activă pură B_2, atunci prețul jocului v este egal cu $a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v$.
- Din sistemul de ecuații $\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$ $(\mathbf{1})$ se va determina p_1, p_2 și v. Astfel, $p_1 = \frac{a_{22}-a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{21}+a_{12})}$; $p_2 = \frac{a_{11}-a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{21}+a_{12})}$ și câștigulu mediu (prețul jocului) $v = \frac{a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{21}+a_{12})}$.
- Strategia optimă mixtă pentru al doilea jucător se va determina din sistemul de ecuații $\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$ $(\mathbf{2})$. Astfel, $q_1 = \frac{a_{22}-a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})} = \frac{v-a_{12}}{a_{11}-a_{12}}$; $q_2 = \frac{a_{11}-a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})} = \frac{a_{11}-v}{a_{11}-a_{12}}$. Prețul jocului v este același.

Exemplul 2. Fie jocul caracterizat de matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Având ca referință matricea plăților A, se cere să se determine:

1. Prețul inferior al jocului α;
2. Prețul superior al jocului β;
3. Strategia optimă mixtă a primului jucător;
4. Strategia optimă mixtă a jucătorului al doilea;
5. Prețul jocului v.

Soluție: Pe baza rezultatelor din tabelul de mai jos se constată următoarele:

Tabelul 2. Soluția jocului matriceal. Exemplul 2

A_i \ B_j	B_1	B_2	$\alpha_i = \min\limits_j(a_{ij})$	$\alpha = \max\limits_i(\alpha_i)$
A_1	3	9	**3**	**4**
A_2	6	4	**4**	
$\beta_j = \max\limits_i(a_{ij})$	**6**	**9**		Prețul inferior al jocului
$\beta = \min\limits_j(\beta_j)$	**6**		Prețul superior al jocului	$\alpha \neq \beta$

1. Prețul inferior al jocului $\alpha = 4$;
2. Prețul superior al jocului $\beta = 6$.

Așa cum $\alpha \neq \beta$, jocul nu are soluție optimă în strategii pure. Soluția optimă se va căuta în strategii mixte. La fel observăm că $\alpha < \beta$ $(4 < 6)$.

3. Strategia optimă mixtă a primului jucător – utilizând formulele de calcul definite anterior pentru p_1, p_2 și v avem:

$p1 := \dfrac{a[2,2]-a[2,1]}{a[1,1]+a[2,2]-a[1,2]-a[2,1]};$	$p1 := \dfrac{1}{4}$
$p2 := \dfrac{a[1,1]-a[1,2]}{a[1,1]+a[2,2]-a[1,2]-a[2,1]}$	$p2 := \dfrac{3}{4}$
$v := \dfrac{a[2,2]\cdot a[1,1]-a[1,2]\cdot a[2,1]}{a[1,1]+a[2,2]-a[1,2]-a[2,1]}$	$v := \dfrac{21}{4}$

p_2 poate fi calculat și din formula $p_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Astfel, strategia optimă mixtă a primului jucător este $S_A = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$. Pentru verificare substituim în sistemul **(1)** elementele matricei a_{ij}, valorile pentru p_1, p_2 și obținem $\begin{cases} 3\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{3}{4}=\frac{21}{4} \\ 9\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{3}{4}=\frac{21}{4} \\ \frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1 \end{cases}$.

4. Strategia optimă mixtă a jucătorului al doilea – utilizând formulele de calcul definite anterior pentru q_1, q_2 avem:

$q1 := \dfrac{a[2,2]-a[1,2]}{a[1,1]+a[2,2]-a[1,2]-a[2,1]}$	$q1 := \dfrac{5}{8}$ $q_1 = \dfrac{v-a_{12}}{a_{11}-a_{12}} = \dfrac{\frac{21}{4}-9}{3-9} = \dfrac{5}{8}$
$q2 := \dfrac{a[1,1]-a[2,1]}{a[1,1]+a[2,2]-a[1,2]-a[2,1]}$	$q2 := \dfrac{3}{8}$ $q_2 = \dfrac{a_{11}-v}{a_{11}-a_{12}} = \dfrac{3-\frac{21}{4}}{3-9} = \dfrac{3}{8}$

q_2 poate fi calculat și din formula $q_2 = 1 - q_1 = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$. Astfel, strategia optimă mixtă a jucătorului al doilea este $S_B = \left(\frac{5}{8}; \frac{3}{8}\right)$. Pentru verificare substituim în sistemul **(2)** elementele matricei a_{ij}, valorile pentru q_1, q_2 și obținem $\begin{cases} 3\cdot\frac{5}{8}+9\cdot\frac{3}{8}=\frac{21}{4} \\ 6\cdot\frac{5}{8}+4\cdot\frac{3}{8}=\frac{21}{4} \\ \frac{5}{8}+\frac{3}{8}=1 \end{cases}$. Conform rezultatelor obținute se observă că $v \in [\alpha, \beta]$; $v \in [4, 6]$ și $\alpha \le v \le \beta$; $4 \le \frac{21}{4} \le 6$.

5. Prețul jocului $v = \frac{21}{4}$.

Soluția jocului în strategii mixte poate fi scrisă sub forma: $\{S_A, S_B, v\} = \left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right); \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right); \frac{21}{4}\right\}$.

2.2. ***Metoda grafică de soluționare a jocurilor matriceale de dimensiunea*** $\mathbf{2 \times 2}$

Se consideră jocul caracterizat de matricea de plăți $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

- Din perspectiva primului jucător avem graficul din figura 1.

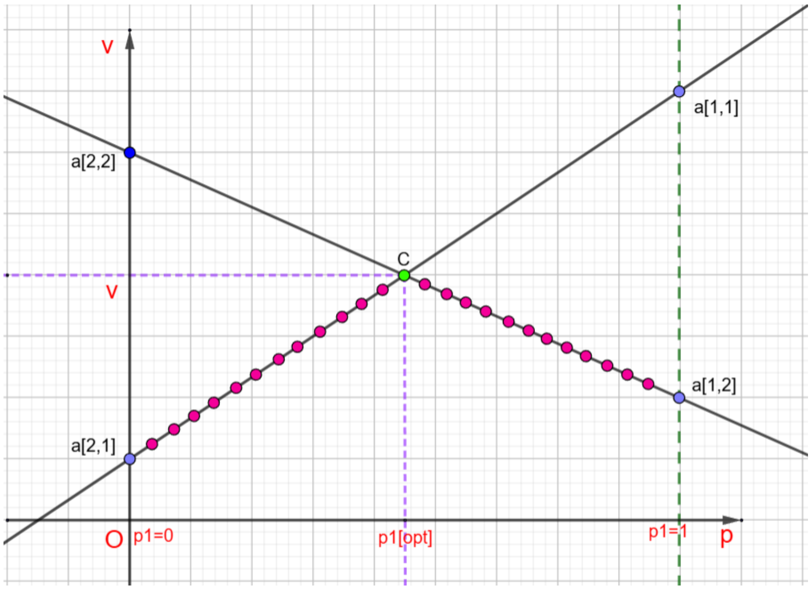

Figura 1. Metoda grafică din perspectiva primului jucător

- Pe axa absciselor se indică probabilitatea $p_1 \in [0,1]$, unde $p_1 = 0$ corespunde strategiei A_2, iar $p_1 = 1$ corespunde strategiei A_1;
- Pe axa ordonatelor se reprezintă câștigurile așteptate ale jucătorului A în raport cu probabilitatea p_1 și strategiile posibile ale adversarului;
- Punctul de intersecție a celor două drepte $C(p_{1\_opt}, v)$ indică punctul de echilibru al jocului pentru primul jucător. Pe axa absciselor acest punct definește probabilitatea optimă pentru primul jucător de a alege strategia A_1, iar pe axa ordonatelor reprezintă valoarea câștigului minim maximizat (valoarea jocului);
- Punctul $C(p_{1\_opt}, v)$ oferă soluția optimă în strategii mixte pentru jucătorul A, garantându-i un câștig minim v, indiferent de strategia adversarului.

Pentru a câștiga cât mai mult, primul jucător folosește principiul „maximin". La început, în funcție de strategia celui de-al doilea jucător, alege valorile minime, apoi din toate aceste valori o alege pe cea mai mare [4]. Funcțiile de câștig pentru jucătorul A, în raport cu p_1, sunt definite de relațiile $v_1 = p_1 \cdot a_{11} + (1 - p_1) \cdot a_{21}$ și $v_2 = p_1 \cdot a_{12} + (1 - p_1) \cdot a_{22}$, unde $a_{i,j}$ – elementele matricei de plăți; v_1 – câștigul asociat strategiei A_1 și v_2 – câștigul asociat strategiei A_2. Intersecția dreptelor v_1 și v_2 determină punctul optim $C(p_{1\_opt}, v)$, care satisface relația $p_{1\_opt} \cdot a_{11} + (1 - p_{1\_opt}) \cdot a_{21} = p_{1\_opt} \cdot a_{12} + (1 - p_{1\_opt}) \cdot a_{22}$, deci $v_1 = v_2$.

➢ Din perspectiva jucătorului al doilea avem graficul din figura 2.

- Pe axa absciselor se indică probabilitatea $q_1 \in [0,1]$, unde $q_1 = 0$ corespunde strategiei B_2, iar $q_1 = 1$ corespunde strategiei B_1;
- Pe axa ordonatelor se reprezintă câștigurile așteptate ale jucătorului B în raport cu probabilitatea q_1 și strategiile mixte ale adversarului;

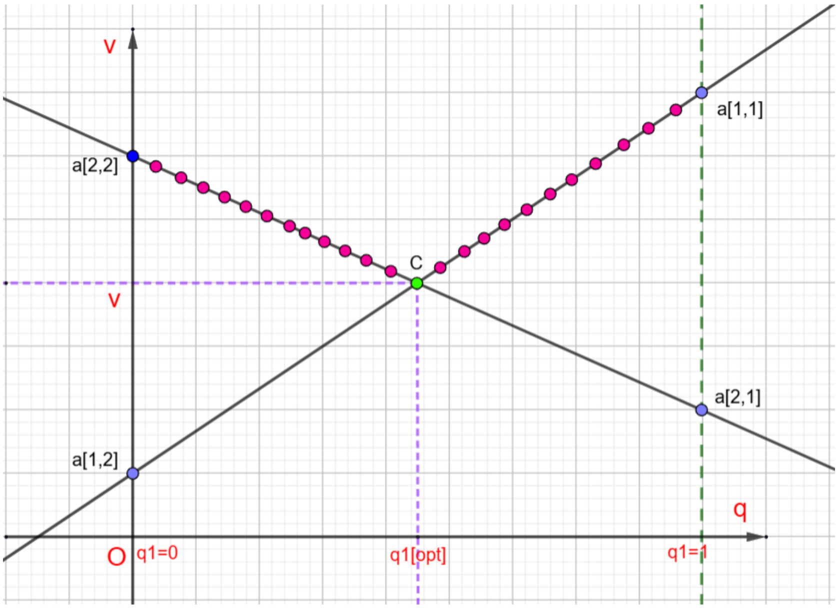

Figura 2. Metoda grafică din perspectiva jucătorului al doilea

- Intersecția celor două drepte $C(q_{1\_opt}, v)$ indică punctul de echilibru al jocului pentru al doilea jucător. Pe axa absciselor acest punct definește probabilitatea optimă pentru al doilea jucător de a alege strategia B_1, iar pe axa ordonatelor reprezintă valoarea pierderii maxim minimizate (valoarea jocului);
- Punctul de intersecție oferă soluția optimă în strategii mixte pentru jucătorul B, garantându-i o pierdere minimă v, indiferent de strategia adversarului.

Pentru a pierde cât mai puțin, al doilea jucător folosește principiul „minimax". La început, în funcție de strategia primului jucător, alege valorile maxime, apoi din toate aceste valori o alege pe cea mai mică. Funcțiile de câștig pentru jucătorul B, în raport cu q_1, sunt definite de relațiile $v_1 = q_1 \cdot a_{11} + (1 - q_1) \cdot a_{12}$ și $v_2 = q_1 \cdot a_{21} + (1 - q_1) \cdot a_{22}$, unde $a_{i,j}$ – elementele matricei de plăți; v_1 – câștigul asociat strategiei B_1 și v_2 – câștigul asociat strategiei B_2. Intersecția dreptelor v_1 și v_2 determină punctul optim $C(q_{1\_opt}, v)$, care satisface relația $q_{1\_opt} \cdot a_{11} + (1 - q_{1\_opt}) \cdot a_{12} = q_{1\_opt} \cdot a_{21} + (1 - q_{1\_opt}) \cdot a_{22}$, deci $v_1 = v_2$.

Exemplul 3. Se va examina aceeași matrice din exemplul 2 și anume $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Utilizând metoda grafică și având ca referință matricea plăților A să se determine: Strategia optimă mixtă a primului jucător; Strategia optimă mixtă a jucătorului al doilea; Prețul jocului v.

Soluție: În figura 3 sunt reprezentate următoarele informații:

- ✓ Punctele a_{11}, a_{12}, a_{21} și a_{22} de pe grafic reprezintă valorile de plată pentru fiecare combinație de strategii pure;

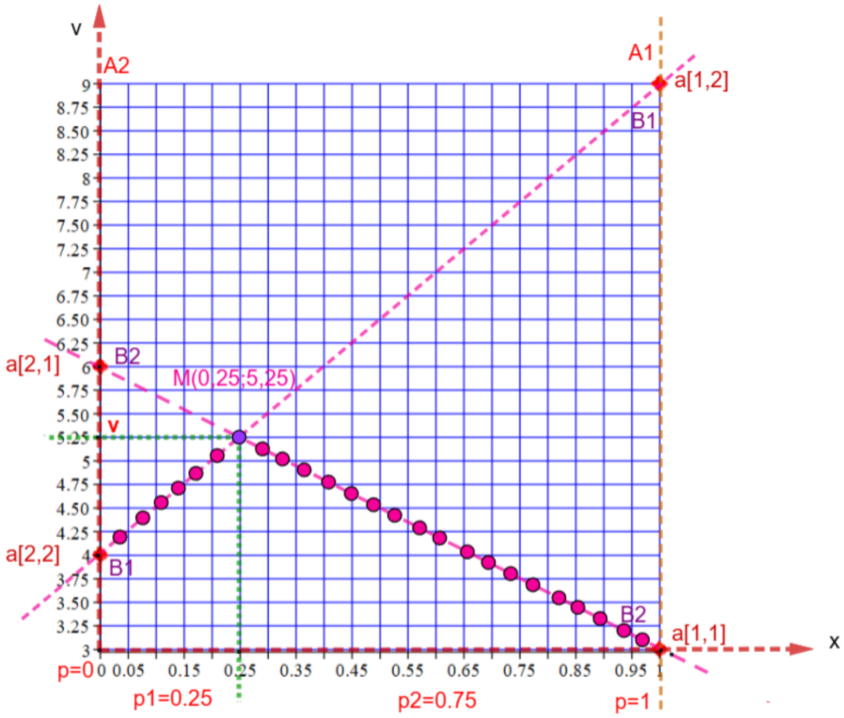

Figura 3. Strategia optimă mixtă a primului jucător. Exemplul 3

- ✓ Axa orizontală reprezintă probabilitatea p, p_1 – probabilitatea asociată strategiei pure A_1 a primului jucător, iar $p_2 = 1 - p_1$ este probabilitatea celei de-a doua strategii;
- ✓ Axa verticală v reprezintă valoarea jocului;
- ✓ Pe axa ordonatelor se va reprezenta a doua strategie a primului jucător A_2, iar pe dreapta $p = 1$ se va reprezenta strategia A_1;
- ✓ Ecuațiile $v_1 = 3p_1 + 6 \cdot (1 - p_1)$ și $v_2 = 9p_1 + 4 \cdot (1 - p_1)$ reprezintă funcțiile obiectiv corespunzătoare strategiilor mixte ale jucătorilor;
- ✓ Intersecția graficelor acestor funcții reprezintă punctul în care ambele strategii conduc la aceeași valoare a jocului, adică soluția optimă.

Astfel, punctul $M(0.25; 5.25)$ ilustrează faptul că jucătorul 1 alege prima strategie cu probabilitatea $p_1 = 0.25$ și a doua strategie cu probabilitatea $p_2 = 0.75$. Prețul jocului este $v = 5.25$, ceea ce înseamnă că aceasta este câștigul minim maximizat al primului jucător.

În figura 4 sunt ilustrate următoarele informații:

- ✓ Punctele a_{11}, a_{12}, a_{21} și a_{22} de pe grafic reprezintă valorile de plată pentru fiecare combinație de strategii pure;
- ✓ Axa orizontală reprezintă probabilitatea q, q_1 – probabilitatea asociată strategiei pure B_1 a jucătorului al doilea, iar $q_2 = 1 - q_1$ este probabilitatea celei de a doua strategii;
- ✓ Axa verticală v reprezintă valoarea jocului;
- ✓ Pe axa ordonatelor se va reprezenta a doua B_2, iar pe dreapta $q = 1$ se va reprezenta strategia B_1;

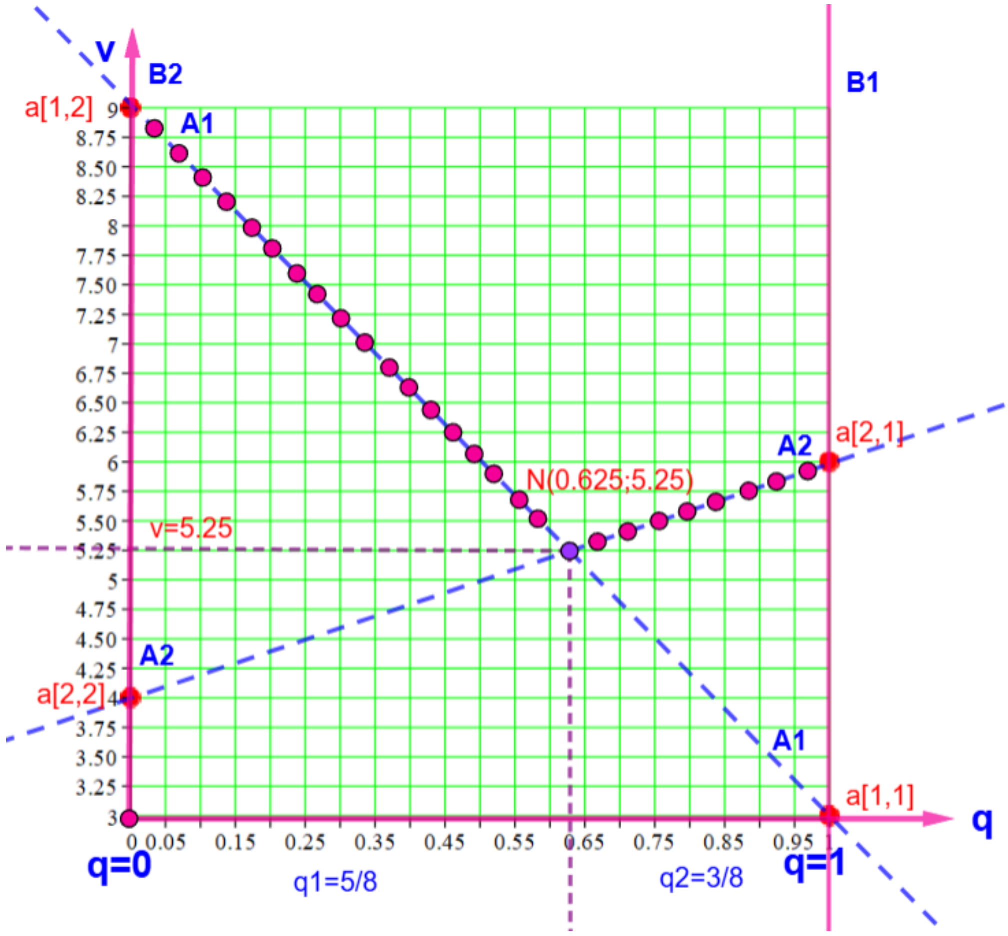

Figura 4. Strategia optimă mixtă a jucătorului al doilea. Exemplul 3

- ✓ Ecuațiile $v_1 = 3q_1 + 9 \cdot (1 - q_1)$ și $v_2 = 6q_1 + 4 \cdot (1 - q_1)$ reprezintă funcțiile obiectiv corespunzătoare strategiilor mixte ale jucătorilor;
- ✓ Intersecția graficelor acestor funcții reprezintă punctul în care ambele strategii conduc la aceeași valoare a jocului, adică soluția optimă.

Astfel, punctul $N(0.625; 5.25)$ ilustrează faptul că jucătorul 2 alege prima strategie cu probabilitatea $q_1 = 0.625$ și a doua strategie cu probabilitatea $q_2 = 0.375$. Prețul jocului este același $v = 5.25$.

Soluția jocului în strategii mixte poate fi scrisă sub forma: $\{S_A, S_B, v\} = \left\{\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{8}; \frac{3}{8}\right), \frac{21}{4}\right\}$.

Concluzii

Pentru determinarea soluției jocurilor matriceale, s-a utilizat procesorul tabelar MS Excel, care a facilitat efectuarea rapidă și exactă a calculelor asociate strategiilor pure și mixte. Funcțiile integrate din MS Excel au permis organizarea eficientă a datelor, verificarea condițiilor de existență a punctului șa și calcularea soluției optime în strategii pure.

Pentru a ilustra grafic soluția jocurilor matriceale de dimensiunea 2×2 a fost utilizată platforma GeoGebra, care a permis o reprezentare grafică clară și exactă a strategiilor jucătorilor, precum și punctul de intersecție a dreptelor asociate funcțiilor de câștig.

Această abordare grafică a facilitat identificarea strategiilor optime mixte și a contribuit la o înțelegere mai profundă a relațiilor dintre strategiile jucătorilor.

Integrarea MS Excel și GeoGebra în procesul de soluționare a jocurilor matriceale a demonstrat beneficiile utilizării tehnologiilor moderne. Aceste instrumente nu doar că au accelerat procesul de rezolvare, dar au oferit și o perspectivă interactivă și intuitivă asupra problemei, consolidând în același timp învățarea practică prin aplicarea directă a teoriei jocurilor în contexte reale.

Studiul metodologiei de soluționare a jocurilor matriceale cu sumă nulă, prin analiza jocurilor cu punct șa și a celor de dimensiune 2×2, demonstrează importanța utilizării strategiilor optime – pure sau mixte – pentru identificarea soluțiilor. Prin prezentarea condițiilor de existență a punctului șa și a metodelor grafice și analitice aplicabile, articolul contribuie semnificativ la înțelegerea și aplicarea teoriei jocurilor, oferind atât perspective teoretice, cât și soluții practice pentru probleme reale.

Bibliografie

1. JOSU, N. Implementarea pachetelor simplex și optimisation în soluționarea jocurilor matriceale. In: *Acta et commentationes (Ştiinţe ale Educaţiei)*, 2024, nr. 2(36), pp. 107-114. ISSN 1857-0623. DOI: https://doi.org/10.36120/2587-3636.v36i2.107-114
2. АЛАДЬЕВ, В. З., БОЙКО, В. К., РОВБА, Е. А. *Программирование и разработка приложений в Maple*. Таллинн, 2007. ISBN 978-985-417-891-2.
3. Cercetări operaționale și teoria deciziei. Capitolul 7. Modelul jocurilor matriceale. https://pdfcoffee.com/cercetari-operaionale-i-teoria-deciziei-capitolul-7-modelul-jocurilor-matriceale-pdf-free.html [accesat la 09.01.2025].
4. ДЕРКАЧ, Д.В. Матричные игры: задания и методические рекомендации по выполнению самостоятельных расчетных работ. Учебно-методическое пособие. Армавир, 2010. 40 с. Disponibil online: https://sinpix.ru/wp-content/uploads/2017/12/171230_MatrIgr_posob2010.pdf [accesat la 09.01.2025].

Recepționat / Received: 23.01.2025
Acceptat / Accepted: 18.03.2025
Email: josu.natalia@upsc.md