TEOREMA CELOR TREI PERPENDICULARE ŞI RECIPROCELE EI

Andrei HARITON, profesor
Laurenţiu CALMUŢCHI, profesor
Universitatea de Stat din Tiraspol

Abstract: *The article below draws our attention on the problem that most of the I-st year students don't know the theorem of three perpendiculars and its reciprocals. We consider that the deficient assimilation of this very theorem has as a main reason its lame methodological exposition in the school manuals of mathematics. Here are formulated 7 reciprocal forms of the theorem of those three perpendiculars establishing which of them is a theorem.*

În procesul studierii disciplinei universitare *CMŞ* (Complemente de matematică şcolară) şi disciplinei *Geometrie elementară* noi am observat că majoritatea studenţilor anului I de studii nu cunosc teorema celor trei perpendiculare, reciprocele ei.

Teorema este inclusă, conform curriculum-ului 2010 la matematică, în programa clasei a X-a, dar nu este o temă nouă în cursul şcolar de matematică. Prin urmare, această teoremă şi aplicaţiile ei ar trebui să fie bine însuşite de către absolvenţii liceali. Însă realitatea este alta.

Considerăm că unul din motivele însuşirii insuficiente a teoremei respective este expunerea nereuşită în plan metodic a acesteia în manualele şcolare de matematică.

<u>În manualul [1, p. 257] citim:</u>

<u>Teorema 7</u> (*teorema celor trei perpendiculare*).

Dacă proiecţia a_1 pe planul α a unei drepte *a* este perpendiculară pe o dreaptă *b* din planul α, atunci şi dreapta *a* este perpendiculară pe dreapta *b*.

Teorema 8 (*reciproca teoremei 7*).

Dacă dreapta *a* este perpendiculară pe o dreaptă *b* din planul α şi nu este perpendiculară pe plan, atunci proiecţia a_1 a dreptei *a* pe planul α este perpendiculară pe dreapta *b*.

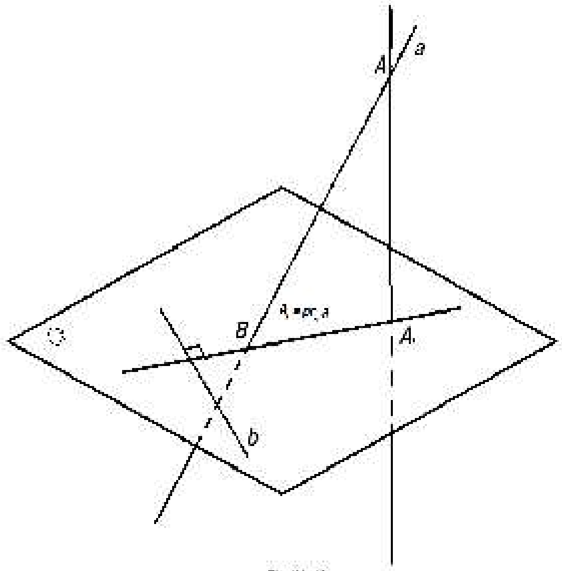


Fig. XII. 12

<u>În manualul [2, p. 200] citim:</u>

Teorema 16.5 (*teorema celor trei perpendiculare*).

Dreapta ce aparţine planului şi care trece prin baza oblicii perpendicular către proiecţia acestei oblici este perpendiculară către această oblică.

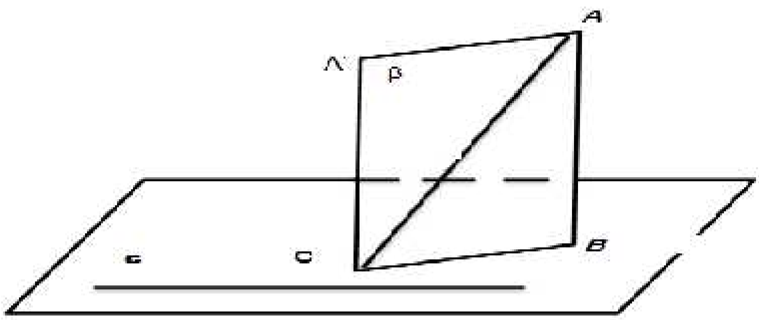


Fig.239

<u>În manualul [3, p. 30] citim:</u>

<u>Teorema celor trei perpendiculare.</u>

Dacă o dreaptă *d* este perpendiculară pe un plan α şi prin piciorul ei trece o dreaptă *a*, conţinută în plan, perpendiculară pe o altă dreaptă *b* conţinută în plan, o dreaptă *c* care uneşte orice punct *M* al perpendicularei *d* pe plan, cu intersecţia *P* a celor două perpendiculare din plan, este perpendiculară pe a treia dreaptă *b*.

(Se dă $d \perp \alpha,\ a \subset \alpha,\ b \subset \alpha,\ a \perp b$. Se cere $c \perp b$).

În continuare: *Reciproce ale teoremei celor trei perpendiculare*:

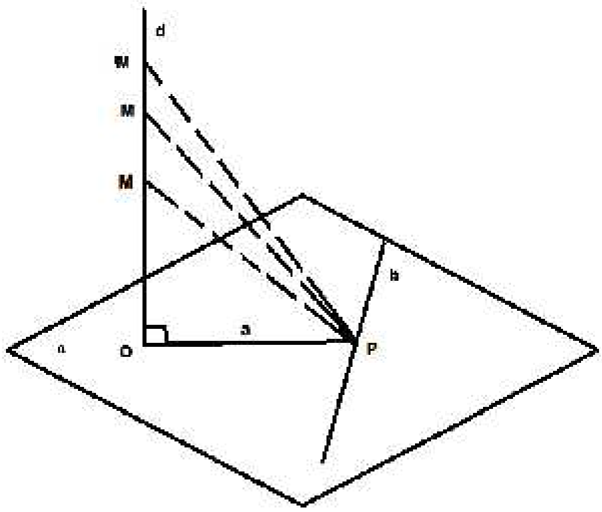


Fig. 6.1

1. Se dă $d \perp \alpha,\ a \subset \alpha,\ b \subset \alpha,\ c \perp b$. Se cere $a \perp b$;
2. Se dă $d \perp a,\ c \perp b,\ a \perp b,\ a \subset \alpha,\ b \subset \alpha$. Se cere $d \perp \alpha$.

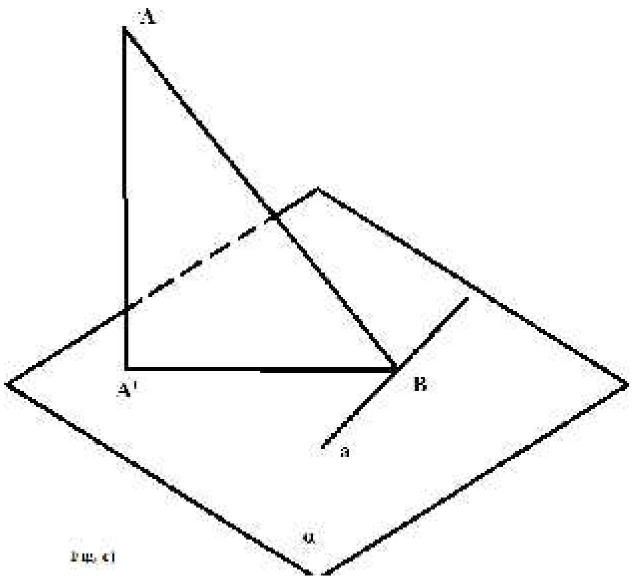
<u>*De ce apar două teoreme reciproce la teorema celor trei perpendiculare?*</u>

Pentru că ipoteza este formată din două propoziţii şi am văzut că în clasa VI-a într-o astfel de situaţie pot apărea două reciproce.

<u>**În manualul [4, p. 160] citim:**</u>

<u>***Teorema celor trei perpendiculare.***</u>

Fie α un plan, A un punct, $A \notin \alpha$ şi o dreaptă, $a \subset \alpha$. Dacă $AA' \perp \alpha,\ A' \in \alpha$ şi $A'B \perp a,\ B \in a$, atunci $AB \perp a$.



Să observăm că ipoteza teoremei celor trei perpendiculare conţine trei propoziţii:

(1) $AA' \perp \alpha$; (2) $A'B \perp a$; (3) $a \subset \alpha$.

Schimbând oricare dintre cele trei propoziţii cu concluzia teoremei ($AB \perp a$) (c), obţinem trei reciproce:

Reciproca 1		*Reciproca 2*		*Reciproca 3*	
(1)$AA' \perp \alpha$ ($A' \in \alpha$) (3) $a \subset \alpha$ (c) ($AB \perp a$) ($B \in a$)	$\Rightarrow A'B \perp a$	(3) $a \subset \alpha$ (2) $A'B \perp a$ ($A' \in \alpha, B \in a$) (c) ($AB \perp a$)	$\Rightarrow AA' \perp \alpha$	(1)$AA' \perp \alpha$ ($A' \in \alpha$) (c) ($AB \perp a$) ($B \in a$) (2) $A'B \perp a$	$\Rightarrow a \subset \alpha$

Demonstraţi că reciproca 1 este adevărată, iar celelalte două sunt false.

Reciproca 1 va fi numită în continuare <u>teorema reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare</u>.

Aţi observat că din ipoteza reciprocei 2 rezultă $AA' \perp \alpha$. Întărind ipoteza 2 cu încă o propoziţie, $AA' \perp A'B$, obţinem următoarea teoremă, utilă pentru a demonstra că o dreaptă este perpendiculară pe un plan.

<u>Teoremă (reciproca întărită a teoremei celor trei perpendiculare).</u>

Fie α un plan, A un punct, $A \notin \alpha$ şi o dreaptă, $a \subset \alpha$. Dacă $AB \perp a$ ($B \in a$), $A'B \perp a$ ($A' \in \alpha$) şi $AA' \perp A'B$, atunci $AA' \perp \alpha$.

<u>În manualul [5, p. 77] citim:</u>

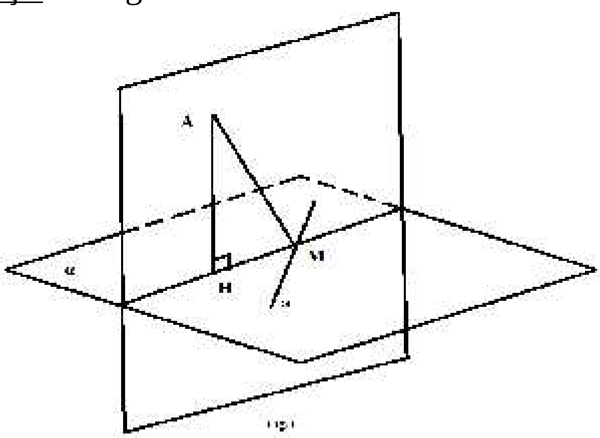
<u>Teoremă</u>. O dreaptă situată într-un plan este perpendiculară pe o oblică atunci şi numai atunci când această dreaptă este perpendiculară pe proiecţia oblicii.

<u>În manualul [6, p. 44] citim:</u>

<u>Teorema celor trei perpendiculare</u>.

Dreapta ce aparţine planului şi care trece prin baza oblicii perpendicular către proiecţia acestei oblici pe acest plan este perpendiculară şi către oblică.

<u>Demonstraţie</u>. Pe fig.1:



AH - perpendiculară către planul α ($AH \perp \alpha$); *AM* - oblică; *HM* - proiecţia oblicii *AH* pe planul α; *a* - dreapta ce aparţine planului α ($a \subset \alpha$) ce trece prin punctul *M* perpendicular către proiecţia *HM*.

<u>Vom demonstra că $a \perp AM$.</u>

Examinăm planul *AMH*: $a \perp AMH$, deoarece $a \perp MH$ şi $a \perp AH$, *MH* şi *AH* - drepte concurente ce aparţin planului *AMH*. Din cele spuse rezultă: *a* este perpendiculară către orice dreaptă ce aparţine planului *AMH*, prin urmare $a \perp AM$.

<u>**Observaţie:**</u> Această teoremă se numeşte <u>*teorema celor trei perpendiculare*</u>, deoarece în ea e vorba despre corelaţia dintre perpendicularele *AH*, *HM*, *AM*.

<u>Teorema reciprocă</u>: Dreapta ce aparţine planului şi care trece prin baza oblicii perpendicular către oblică este perpendiculară şi către proiecţia ei.

Anterior am expus formulările teoremei celor trei perpendiculare în şase din cele mai vestite manuale şcolare editate în ultimii 30 ani în Moldova, România şi Rusia.

Aceste manuale sunt relativ bine cunoscute şi utilizate în Moldova.

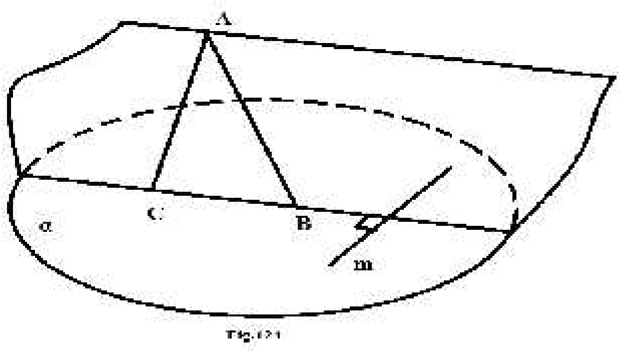
Vom expune acum unele observaţii cu caracter general respectiv la valoarea metodică a acestor manuale privitor la formarea noţiunii TTP.

- Cea mai reuşită expunere a TTP o găsim în manualul [6, p. 44].

Autorii, utilizând noţiunile „oblică”, „proiecţia oblicii pe plan”, formulează în modul cel mai succint TTP, demonstraţia acestei teoreme, formulează şi explică calea de demonstraţie evidentă a reciprocei. Se subliniază care sunt cele trei perpendiculare despre care e vorba în TTP: *AH, HM, AM*.

- O reuşită expunere a TTP întâlnim şi în [5, p.77].

Autorii manualului utilizează noţiunile „oblică” şi „proiecţia oblicii pe plan”. Nu e reuşită din punct de vedere metodic expunerea concomitentă a teoremei directe şi reciproce sub formă de condiţie necesară şi suficientă. TTP este o teoremă grea pentru elevi şi e mai bine a nu grăbi expunerea reciprocii. Să mai observăm că în acest manual se propune următoarea figură pentru a ilustra TTP (dreapta $m \perp BC$ nu trece prin *B*):



- Observăm că expunerea TTP în manualul [2, p. 200] se deosebeşte puţin de expunerea din manualul [6, p. 44].
- Expunerea TTP în manualul [1, p. 252], a reciprocei TTP şi demonstraţia acestora coincid în mare măsură cu cele expuse în manualul [5, p. 77] cu deosebirea că teorema directă este separată de cea reciprocă şi e utilizată o figură mai puţin

reuşită. Aici nu e reuşită deloc utilizarea expresiei „…dreapta *a*… nu este perpendiculară pe plan…” la formularea teoremei reciproce.

- Expunerea TTP în manualul [3, p. 30] merită o atenţie deosebită: aici întâlnim prima încercare printre expunerile TTP în manualele analizate de a explica, din punctul de vedere al logicii matematice, numărul reciprocelor unei teoreme în dependenţă de structura logică a ipotezei teoremei. Nu e bine însă că formularea TTP a provocat, fără a fi utilizate noţiunile „oblică” şi „proiecţia oblicii pe plan”, un surplus de cuvinte în textul acestei teoreme.

  Nu s-a examinat reciproca principală a TTP, care conform simbolicii manualului numit este: $c \perp b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha \Rightarrow d \perp \alpha$, $a \perp b$.

- Manualul 4 este cel mai nou dintre manualele care abordează problemele de care ne ocupăm. Am aşteptat ca expunerea TTP în acest manual să fie din punct de vedere ştiinţifico-metodic mult mai reuşit ca în manualele anterioare, însă nu e aşa. Autorii acestui manual nu utilizează noţiunile de „oblică” şi „proiecţia oblicii pe plan”, ceea ce conduce la înţelegerea mai uşoară a TTP şi la memorizarea ei. Formularea propusă a TTP cu punct la mijloc şi cu „dacă” după acest punct complică separarea părţii explicative de ipoteza teoremei.

  E salutabilă încercarea autorilor acestui manual de a examina toate reciprocele TTP şi a stabili care dintre ele sunt teoreme şi care – nu.

În afară de cele trei propoziţii reciproce numite pentru TTP, mai sunt încă patru reciproce, printre care şi teoreme. Spre regret, autorii acestui manual nu le observă. Trebuie spus că nu le observă nici autorii manualului [1]. Autorii manualelor [1] şi [4] nu au consultat manualul şcolar [3], în care sunt expuse două teoreme reciproce la TTP – manual bine cunoscut prin utilizarea sa în România şi în Moldova.

- Curriculumul şcolar nou [7, clasa a XI-a] vizează, în cadrul teoremei celor trei perpendiculare, doar studierea unei reciproce!
- În temeiul celor expuse rezultă următoarea concluzie: Pe parcursul perioadei precedente - manualele şcolare de matematică [1], [4] şi [3] - în didactica matematicii au fost acumulate mai multe procedee reuşite de studiere a TTP. Concepţia logico-mulţime permite a expune această teoremă extrem de importantă în matematică mult mai efectiv. Drept concluzie generală vom expune o variantă efectivă de învăţare a teoremei celor trei perpendiculare şi reciprocele acesteia.

TTP: Dreapta ce aparţine planului şi care trece prin baza oblicii perpendicular către proiecţia acestei oblici pe acest plan este perpendiculară şi către oblică.

Demonstraţie:

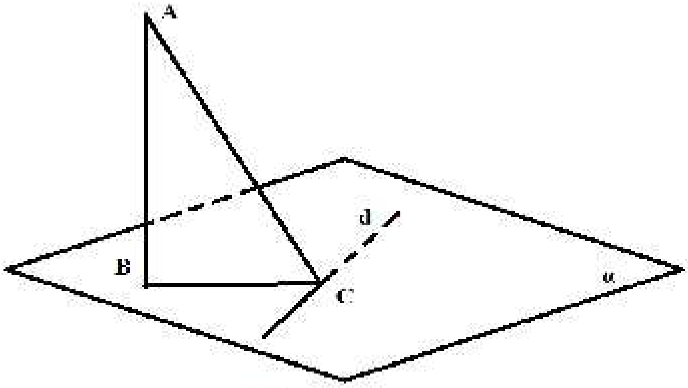


Fig.1

AC - oblică; *BC* - proiecţia oblicii *AC* pe planul α; *d* - dreapta ce aparţine planului α ($d \subset \alpha$) şi care trece prin punctul *C* perpendicular către proiecţia *BC*; *AB* - perpendiculară către planul ~ (AB ⊥ ~) .

Examinăm planul *ABC*.

Din $AB \perp \alpha$; $d \subset \alpha$; o dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară pe orice dreaptă a planului: rezultă $AB \perp d$ ($d \perp AB$).

Din $d \perp BC$; $d \perp AB$ rezultă $d \perp$ (planul *ABC).*

Din $d \perp$ (planul *ABC); AC*$\subset$(planul *ABC*); o dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară pe orice dreaptă a planului: rezultă $d \perp AC$.

Reciprocele TTP: Pentru a determina care din reciprocele TTP sunt teoreme e bine a scrie simbolic această teoremă.

Partea explicativă a teoremei este: planul α, oblica AC, $c \in \alpha$, $d \subset \alpha$.

Ipoteza teoremei conţine propoziţiile: $AB \perp \alpha$, $BC \subset \alpha$., $d \perp BC$.

Concluzia teoremei: $d \perp AC$.

Formula teoremei: $(AB \perp \alpha)\ (BC \subset \alpha)\ (d \perp BC) \Rightarrow (d \perp AC)$.

Forme reciproce în acest caz sunt:

1. $d \perp AC \Rightarrow (AB \perp \alpha)\ (BC \subset \alpha)\ (d \perp BC)$
2. $(d \perp AC)\ (BC \subset \alpha)\ (d \perp BC) \Rightarrow (AB \perp \alpha)$
3. $(AB \perp \alpha)\ (d \perp AC)\ (d \perp BC) \Rightarrow (BC \subset \alpha)$
4. $(AB \perp \alpha)\ (BC \subset \alpha)\ (d \perp AC) \Rightarrow (d \perp BC)$
5. $(d \perp AC)\ (d \perp BC) \Rightarrow (AB \perp \alpha)\ (BC \subset \alpha)$
6. $(d \perp AC)\ (BC \subset \alpha) \Rightarrow (AB \perp \alpha)\ (d \perp BC)$
7. $(d \perp AC)\ (AB \perp \alpha) \Rightarrow (BC \subset \alpha)\ (d \perp BC)$

Vom formula prin cuvinte cele 7 forme reciproce ale TTP şi vom stabili care din ele este teoremă:

1. Din: dreapta d trece prin baza oblicii AC perpendicular către oblică, rezultă: punctul $B \in \alpha$ este proiecţie ortogonală a punctului A pe planul α, BC este proiecţia oblicii AC pe planul α, dreapta d este perpendiculară către BC.

2. Din: dreapta d trece prin baza oblicii AC perpendicular către oblică, proiecţia BC a oblicii AC pe planul α, dreapta d este perpendiculară către BC, rezultă: punctul B este proiecţie ortogonală a punctului A pe planul α.

3. Din: Punctul B este proiecţie ortogonală a punctului A pe planul α, dreapta d trece prin baza oblicii AC perpendicular către oblică, dreapta d este perpendiculară către BC, rezultă: BC este proiecţia oblicii AC pe planul α.

4. Din: Punctul B este proiecţie ortogonală a punctului A pe planul α, proiecţia BC a oblicii AC pe planul α, dreapta d trece prin baza oblicii AC perpendicular către oblică, rezultă: dreapta d este perpendiculară către BC.

5. Din: dreapta d trece prin baza oblicii AC perpendicular către oblică, dreapta d este perpendiculară către BC, rezultă: punctul B este proiecţie ortogonală a punctului A pe planul α, BC este proiecţia oblicii AC pe planul α.

6. Din: dreapta d trece prin baza oblicii AC perpendicular către oblică, proiecţia BC a oblicii AC pe planul α, rezultă: punctul B este proiecţie ortogonală a punctului A pe planul α, dreapta d este perpendiculară către BC.

7. Din: dreapta d trece prin baza oblicii AC perpendicular către oblică, punctul B este proiecţie ortogonală a punctului A pe planul α, rezultă: BC este proiecţia oblicii AC pe planul α, dreapta d este perpendiculară către BC.

Toate aceste propoziţii sunt juste.

Concluzie: O astfel de analiză e recomandabilă pentru majoritatea teoremelor şcolare, îndeosebi la scrierea manualelor de matematică.

BIBLIOGRAFIE

1. Achiri, I. ş.a. – Matematică, manual pentru clasa X-a, Editura „Prut Internaţional”, 2002.
2. Погорелов, А. – Геометрия учебное пособие для 6-10 классов средней школы, М., Просвещение, 1987.
3. Cuculescu, I.ş.a. - Matematică, manual pentru clasa VIII-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1992.
4. Radu, D., Radu, E. - Matematică, manual pentru clasa VIII-a, Editura „Tera”, Bucureşti, 2006.
5. Клопский, В. şi a. – Geometria, manual pentru clasele 9-10 ale şcolii medii, Chişinău, Lumina, 1982.
6. Атанасян, Л. и др. – Геометрия, учебник для 10-11 классов средней школы, М., Просвещение, 1994.
7. Curriculum şcolar pentru disciplina Matematica, clasele X-XII, Chişinău, 2010.