

IMPLEMENTAREA METODEI BROWN-ROBINSON ÎN SOLUȚIONAREA JOCURILOR MATRICEALE CU SUMĂ NULĂ

Liubomir CHIRIAC, doctor habilitat, profesor universitar

<https://orcid.org/0000-0002-5786-5828>

Natalia JOSU, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0000-0002-3687-5437>

Catedra Informatică și Tehnologii Informaționale
Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă" din Chișinău

Rezumat. Articolul abordează implementarea metodei Brown–Robinson pentru soluționarea jocurilor matriceale cu sumă nulă. Sunt prezentate fundamentele teoretice ale metodei Brown–Robinson și descris algoritmul iterativ utilizat în acest caz. În baza unui exemplu practic, se evidențiază detaliat modul de aplicare al metodei și importanța rezultatelor obținute.

Cuvinte-cheie: teoria jocurilor, joc matriceal; joc cu sumă nulă; metoda Brown–Robinson; metodă iterativă; strategie optimă; preț superior al jocului, preț inferior al jocului.

IMPLEMENTATION OF THE BROWN–ROBINSON METHOD FOR SOLVING ZERO-SUM MATRIX GAMES

Abstract. This article examines the implementation of the Brown–Robinson method for solving zero-sum matrix games. It presents the theoretical foundations of the method and describes the iterative algorithm employed in this context. A practical example illustrates the step-by-step application of the method and highlights the significance of the results obtained. The study emphasizes the method's effectiveness in identifying optimal strategies and its relevance within game theory.

Keywords: game theory; matrix game; zero-sum game; Brown–Robinson method; iterative method; optimal strategy; upper value of the game; lower value of the game.

Introducere

Teoria jocurilor constituie un domeniu fundamental al matematicii aplicate, având aplicație directă în economie, științe sociale, informatică, inginerie și biologie. Jocurile cu sumă zero, în particular cele cu doi jucători și reprezentare matriceală, constituie un caz special dar extrem de studiat datorită aplicabilității și clarității structurale. În astfel de jocuri, câștigul unuia dintre jucători corespunde exact pierderii celuilalt, iar soluționarea acestuia se concentrează pe identificarea strategiilor optime ale jucătorilor și a valorii/prețului jocului. În cazul în care jocul nu are soluție în strategii pure, se impune utilizarea strategiilor mixte pentru determinarea strategiilor optime [1].

De-a lungul timpului, au fost dezvoltate mai multe metode pentru soluționarea jocurilor matriceale: metoda grafică, aplicabilă doar pentru jocurile de dimensiunea 2×2 , $2 \times n$ sau $m \times 2$, care pot fi reduse la dimensiunea 2×2 , metoda analitică aplicabilă doar pentru jocurile de dimensiunea 2×2 , metode bazate pe programare liniară [2] etc.

Metoda Brown-Robinson permite estimarea valorii jocului și a strategiilor optime fie prin *utilizarea frecvențelor relative ale strategiilor*, fie prin *raportarea sumelor cumulate de câștiguri și pierderi la numărul de iterații*, fără a necesita cunoștințe prealabile despre comportamentul adversarului.

Scopul acestui articol este de a oferi o prezentare amplă a metodei Brown-Robinson, atât din perspectivă teoretică, cât și aplicativă, incluzând o descriere detaliată a unui exemplu numeric complet, realizat în MS Excel.

Considerații teoretice

Se consideră un joc finit cu sumă nulă, între doi jucători, fără punct de echilibru, care poate fi reprezentat matriceal astfel:

Tabelul 1. Matricea de plăți extinsă a unui joc strategic

		Strategiile jucătorului al doilea				
		q	q_1	q_2	$\dots$	q_n
Strategiile primului jucător	p	A_i/B_j	B_1	B_2	$\dots$	B_n
	p_1	A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
	p_2	A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
	p_m	A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

În absența punctului de echilibru, soluția jocului se determină utilizând strategiile mixte. O strategie mixtă a unui jucător constă în alegerea strategiilor sale pure cu anumite probabilități asociate. Astfel, o *strategie mixtă* a jucătorului A poate fi notată cu $S_A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$, iar o *strategie mixtă* a jucătorului B poate fi reprezentată prin $S_B = (B_1, B_2, \dots, B_n)$. Pentru p, q au loc egalitățile $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, $0 \leq p \leq 1$ și $\sum_{j=1}^n q_j = 1$, $0 \leq q \leq 1$.

Cazul I: Implementarea metodei Brown–Robinson în soluționarea jocurilor matriceale pe baza analizei câștigurilor și pierderilor cumulate ale jucătorilor

Algoritmul metodei presupune calcularea câștigurilor cumulate ale jucătorului A și a pierderilor cumulate ale jucătorului B la fiecare iterație, cu actualizarea continuă a valorilor pentru determinarea treptată a strategiilor optime ale ambilor jucători [3]. Valoarea aproximativă inferioară a jocului după k iterații se calculează ca valoarea minimă a acestor câștiguri cumulate, raportată la numărul de iterații $v_1(k) = \frac{1}{k} \min_j a_j(k)$ (1), iar valoarea aproximativă superioară a jocului după k iterații se calculează ca valoarea maximă a pierderilor cumulate, raportată la numărul de iterații $v_2(k) = \frac{1}{k} \max_i b_i(k)$ (2).

- ✓ $a_j(k)$ – reprezintă câștigul cumulativ a jucătorului A după k iterații, atunci când jucătorul B a folosit strategia sa pură B_j ;

- ✓ $b_i(k)$ – reprezintă pierderea cumulativă a jucătorului B după k iterații, atunci când jucătorul A a folosit strategia sa pură A_i ;

Astfel, $v_1(k)$ oferă estimarea inferioară a valorii jocului, iar $v_2(k)$ estimarea superioară a valorii jocului. Prețul jocului $v^*(k)$ reprezintă media aritmetică și se determină conform formulei $v^*(k) = \frac{v_1(k) + v_2(k)}{2}$ (3). Procesul iterativ se oprește atunci când se îndeplinește condiția $D_k = |v_2(k) - v_1(k)| \leq \varepsilon$ (4), unde ε reprezintă pragul de precizie, adică nivelul de exactitate cu care se solicită calcularea soluției.

Cazul II: Implementarea metodei Brown–Robinson în soluționarea jocurilor matriceale pe baza utilizării frecvențelor relative ale strategiilor

Așa cum matricea A reflectă câștigurile primului jucător, în continuare se va calcula valoarea așteptată a câștigului jucătorului A în două situații:

- ✓ când A acționează cu strategii mixte și B cu strategii pure;
- ✓ când A acționează cu strategii pure și B cu strategii mixte.

A acționează cu strategii mixte și B cu strategii pure

Valoarea așteptată a câștigului jucătorului A , la pasul k , se va calcula utilizând distribuția probabilistică p_{ik} , obținută pe baza frecvențelor relative ale strategiilor pure A_i (strategiile mixte ale jucătorului A) aplicate până la iterația respectivă, în combinație cu strategiile pure ale jucătorului B , corespunzătoare coloanelor B_j din matricea de câștig: $v_1(k) = \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot p_{ik}$ (5).

- ✓ a_{ij} – câștigul jucătorului A pentru combinația de strategii A_i și B_j ;
- ✓ p_{ik} – probabilitatea cu care jucătorul A a ales strategia pură A_i până la iterația k ;
- ✓ valoarea minimă se ia în raport cu toate strategiile pure B_j ale jucătorului B pentru a reflecta cel mai defavorabil răspuns al acestuia.

Prin urmare, $v_1(k)$ exprimă câștigul minim așteptat al jucătorului A , adică valoarea inferioară a câștigului corespunzător celei mai nefavorabile strategii pure B_j , pe care B o poate adopta la iterația k . În același timp, din perspectiva lui jucătorului B , aceeași valoare $v_1(k)$ reprezintă pierderea minimă așteptată, adică situația în care el reușește să piardă cât mai puțin, corespunzător celei mai favorabile strategii pure B_j , pe care B o poate adopta la iterația k .

A acționează cu strategii pure și B cu strategii mixte

Valoarea așteptată a câștigului jucătorului A , se va calcula în acest caz utilizând distribuția probabilistică q_{jk} , obținută pe baza frecvențelor relative ale strategiilor pure B_j (strategiile mixte ale jucătorului B) aplicate până la iterația respectivă, în combinație cu strategiile pure ale jucătorului A , corespunzătoare liniilor A_i din matricea de câștig: $v_2(k) = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot q_{jk}$ (6).

- ✓ a_{ij} – câștigul jucătorului A pentru combinația de strategii A_i și B_j ;

- ✓ q_{jk} – probabilitatea cu care jucătorul B a ales strategia mixtă B_j până la iterația k ;
- ✓ valoarea maximă se ia în raport cu toate strategiile pure A_i ale jucătorului A pentru a reflecta cel mai favorabil răspuns al acestuia.

Prin urmare, $v_2(k)$ exprimă câștigul maxim așteptat al jucătorului A , adică valoarea superioară a câștigului corespunzător celei mai favorabile strategii pure A_i , pe care A o poate adopta la iterația k . În același timp, din perspectiva lui jucătorului B , aceeași valoare $v_2(k)$ reprezintă pierderea maximă așteptată, adică situația în care el poate să piardă cel mai mult, corespunzător celei mai nefavorabile strategii pure A_i , pe care A o poate adopta la iterația k .

Valoarea aproximativă a jocului se calculează după formula $v^*(k) = \frac{\max_k v_2(k) + \min_k v_1(k)}{2}$ (7), adică media dintre cel mai mare câștig $v_2(k)$ și cel mai mic câștig $v_1(k)$ calculat până la iterația k . Odată cu creșterea numărului de iterații, atât $v_1(k)$ cât și $v_2(k)$ converg către valoarea exactă a jocului v .

Și în acest caz se menține aceeași condiție de oprire, conform căreia procesul iterativ se încheie.

Un neajuns al metodei iterative Brown–Robinson, ce ține de utilizarea frecvențelor relative ale strategiilor, constă în faptul că la o anumită iterație valorile aproximative ale jocului pot stagna, adică valoarea inferioară a jocului $v_1(k)$ rămâne cea mai mică valoare, iar valoarea superioară a jocului $v_2(k)$ rămâne cea mai mare valoare pe parcursul întregului proces iterativ. Într-o asemenea situație, chiar dacă algoritmul continuă, convergența către prețul exact al jocului nu se realizează. Această limitare se datorează faptului că jucătorii nu explorează în mod uniform ansamblul strategiilor disponibile, ceea ce face ca estimarea să fie sensibilă la unele strategii.

În contextul unui joc cu sumă nulă, în care participă doi jucători, sunt valabile următoarele afirmații:

- ✓ Câștigul minim așteptat al jucătorului $A \leftrightarrow$ Pierderea minimă așteptată a jucătorului B ;
- ✓ Câștigul maxim așteptat al jucătorului $A \leftrightarrow$ Pierderea maximă așteptată a jucătorului B ;
- ✓ B urmărește să minimizeze câștigul jucătorului $A \leftrightarrow B$ urmărește să-și minimizeze pierderea proprie, în funcție de strategiile alese de jucătorul A ;
- ✓ A urmărește să maximizeze pierderea jucătorului $B \leftrightarrow A$ urmărește să-și maximizeze câștigul propriu, în funcție de strategiile alese de jucătorul B ;
- ✓ Câștigul așteptat al jucătorului $A \leftrightarrow$ Pierderea așteptată a jucătorului B ;
- ✓ Prețul jocului v satisface întotdeauna condiția $v_1(k) \leq v \leq v_2(k)$, unde v reprezintă valoarea exactă a jocului.

Aplicație practică

Fie jocul caracterizat de matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Utilizând metoda iterativă Brown-Robinson să se determine:

- Strategia optimă mixtă a primului jucător;
- Strategia optimă mixtă a jucătorului al doilea;
- Prețul jocului v .

Soluție: Pentru a ilustra metoda iterativă Brown-Robinson, se va soluționa același joc matriceal analizat în [1], soluționat utilizând metoda analitică. Din [1] avem că prețul inferior al jocului $\alpha = 4$, prețul superior al jocului $\beta = 6$, deci $\alpha < \beta$ ($4 < 6$). Deoarece $\alpha \neq \beta$, jocul nu are soluție optimă în strategii pure.

Cazul I: Implementarea metodei Brown–Robinson în soluționarea jocurilor matriceale pe baza analizei câștigurilor și pierderilor cumulate ale jucătorilor

Pentru a evidenția modul de aplicare a formulelor definite pentru cazul I, primele două iterații se vor calcula manual, urmând ca iterațiile următoare să fie realizate în MS Excel.

1. Se va presupune în continuare că la prima iterație, jucătorul A adoptă/alege strategia sa *maximin* A_1 (poate alege o oricare altă strategie). În acest caz, el poate obține câștigurile $(3, 9)$ asociate strategiilor pure (B_1, B_2) a jucătorului B .
2. Pentru a-și minimiza pierderea, jucătorul B va adopta strategia sa *minimax* și anume va selecta strategia corespunzătoare valorii $\min_j(a_{ij}) = \min(3, 9) = 3$, adică strategia B_1 . În această situație, pierderile jucătorului B vor fi $(3, 6)$ în funcție de strategiile pure (A_1, A_2) ale jucătorului A .
3. Pentru iterația 1 se va determina $v_1(k)$, $v_2(k)$ și $v^*(k)$ conform formulelor 1, 2 și 3 astfel:

$$k := 1 \quad v_1(1) = \frac{1}{1} \cdot \min(3, 9) = 3 \quad v_2(1) = \frac{1}{1} \cdot \max(3, 6) = 6 \quad v^*(1) = \frac{3 + 6}{2} = 4,5$$

4. Se va calcula diferența de convergență D_k după formula 4: $D_1 = |v_2(1) - v_1(1)| = 3$.
5. Pentru iterația doua, $k := 2$ jucătorul A va alege strategia sa *maximin*. Așa cum acesta optează pentru maximizarea câștigului, va selecta strategia A_2 așa cum $\max(3, 6) = 6$.
6. Pentru a completa strategia A_2 la iterația doua, se va aduna strategia anterioară, adică cea de la iterația 1 cu strategia A_2 din matricea de plăți. $A_1 = (3, 9)$ – strategia anterioară, de la iterația 1; $A_2 = (6, 4)$ – strategia inițială a jucătorului A , din matricea jocurilor; $A_{2_nou} = (3 + 6 = 9, 9 + 4 = 13)$ – strategia primului jucător la iterația 2.
7. Pentru a-și minimiza pierderea, jucătorul B va adopta la iterația doua strategia sa *minimax* și anume B_1 , deoarece $\min(9, 13) = 9$. Pentru a completa strategia B_1 la iterația doua, se va aduna strategia anterioară, adică cea de la iterația 1 cu strategia B_1 din matricea de plăți. $B_1 = (3, 6)$ – strategia anterioară, la iterația 1; $B_1 = (3, 6)$ – strategia jucătorului

B din matricea de plăți; $B_{1_nou} = (3 + 6 = 9, 6 + 6 = 12)$ – strategia jucătorului B la iterația doua. În această situație, pierderile jucătorului B vor fi $(6, 12)$ în funcție de strategiile pure (A_1, A_2) ale jucătorului A .

8. Pentru iterația 2 se va determina $v_1(k)$, $v_2(k)$ și $v^*(k)$ conform formulelor 1, 2 și 3 astfel:

$$k := 2 \quad v_1(2) = \frac{1}{2} \cdot \min(9, 13) = 4.5 \quad v_2(1) = \frac{1}{2} \cdot \max(6, 12) = 6 \quad v^*(2) = \frac{4.5 + 6}{2} = 5.25$$

9. Se va calcula diferența de convergență D_k , pentru $k := 2$: $D_2 = |v_2(2) - v_1(2)| = 1.5$.

Continuând acest proces iterativ, se va determina strategia optimă mixtă a primului jucător, strategia optimă mixtă a jucătorului al doilea și prețul jocului v cu exactitatea solicitată în condiția problemei. Același rezultat a fost obținut și în [1] utilizând metoda analitică. Soluția completă este prezentată în tabelul 2.

Tabelul 2. Metoda Brown-Robinson. Cazul I

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
10	k	A_i	B_1	B_2	$\min(B_1, B_2)$	B_j	A_1	A_2	$\max(A_1, A_2)$	$v_1(k)$	$v_2(k)$	$v(k)$	D_k
11	1	1	3	9	3	1	3	6	6	3,00000	6,00000	4,50000	3,0000000
12	2	2	9	13	9	1	6	12	12	4,50000	6,00000	5,25000	1,5000000
13	3	2	15	17	15	1	9	18	18	5,00000	6,00000	5,50000	1,0000000
14	4	2	21	21	21	2	18	22	22	5,25000	5,50000	5,37500	0,2500000
15	5	2	27	25	25	2	27	26	27	5,00000	5,40000	5,20000	0,4000000
16	6	1	30	34	30	1	30	32	32	5,00000	5,33333	5,16667	0,3333333
17	7	2	36	38	36	1	33	38	38	5,14286	5,42857	5,28571	0,2857143
18	8	2	42	42	42	2	42	42	42	5,25000	5,25000	5,25000	0,0000000

- ✓ k – numărul iterației;
- ✓ A_i – numărul strategiei pure selectată de jucătorul A ;
- ✓ B_1, B_2 – câștigul cumulativ a jucătorului A corespunzător strategiilor pure ale jucătorului B ;
- ✓ B_j – numărul strategiei pure selectată de jucătorul B ;
- ✓ A_1, A_2 – pierderea cumulativă a jucătorului B corespunzător strategiilor pure ale jucătorului A ;
- ✓ $v_1(k)$ – valoarea aproximativă inferioară a jocului după k iterații;
- ✓ $v_2(k)$ – valoarea aproximativă superioară a jocului după k iterații;
- ✓ $v^*(k)$ – prețul jocului.

Din Tabelul 2 se poate observa că strategia A_1 a fost utilizată de 2 ori ($= \text{COUNTIF}(B11:B18; 1)$), iar strategia A_2 a fost selectată de 6 ($= \text{COUNTIF}(B11:B18; 2)$) ori din totalul de 8 iterații. În continuare se va determina $p_1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ și $p_2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Astfel, strategia optimă a primului jucător poate fi scrisă astfel $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. În mod analog se vor determina q_1 și q_2 . Strategia B_1 a fost adoptată de 5 ori ($= \text{COUNTIF}(F11:F18; 1)$), iar strategia B_2 a fost selectată de 6 ori ($= \text{COUNTIF}(F11:F18; 2)$) din totalul de 8 iterații. Astfel, $q_1 = \frac{5}{8}$ și $q_2 = \frac{3}{8}$, iar strategia

optimă a jucătorului al doilea este $S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$. Prețul jocului $v^*(8) = 5.25$. La fel putem determina valoarea inferioară a jocului $v_1(8) = \frac{\min(B_1, B_2)}{8} = \frac{\min(42, 42)}{8} = \frac{42}{8} = 5.25$ și valoarea superioară a jocului $v_2(8) = \frac{\max(A_1, A_2)}{8} = \frac{\max(42, 42)}{8} = \frac{42}{8} = 5.25$. Pentru verificare avem:

✓ Prețul jocului în raport cu strategiile pure A_1, A_2 și mixte $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$:

$$v(q, A_1) = 3 \cdot \frac{5}{8} + 9 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8} + \frac{27}{8} = \frac{42}{8} = \frac{21}{4} \quad \text{și} \quad v(q, A_2) = 6 \cdot \frac{5}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{30}{8} + \frac{12}{8} = \frac{42}{8} = \frac{21}{4};$$

✓ Prețul jocului în raport cu strategiile pure B_1, B_2 și mixte $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$:

$$v(p, B_1) = 3 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{18}{4} = \frac{21}{4} \quad \text{și} \quad v(p, B_2) = 9 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4} + \frac{12}{4} = \frac{21}{4};$$

✓ Prețul jocului v^* în raport cu strategiile mixte ale jucătorilor A și B poate fi calculat după formula $v^*(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i \cdot q_j$. Pentru jocul caracterizat de matricea $A =$

$\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, strategia mixtă a jucătorului A - $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ și strategia mixtă a jucătorului

B - $S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$, v^* se va determina astfel:

$$v^*(p, q) = p_1 \cdot (a_{11}q_1 + a_{12}q_2) + p_2 \cdot (a_{21}q_1 + a_{22}q_2) = \frac{1}{4} \left(3 \cdot \frac{5}{8} + 9 \cdot \frac{3}{8} \right) + \frac{3}{4} \left(6 \cdot \frac{5}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} \right) = 5.25.$$

Orice abatere de la strategiile optime ale jucătorilor conduce la obținerea unor câștiguri mai mici pentru un jucător și respectiv a unor pierderi mai mari pentru adversar, ceea ce confirmă stabilitatea soluției de echilibru.

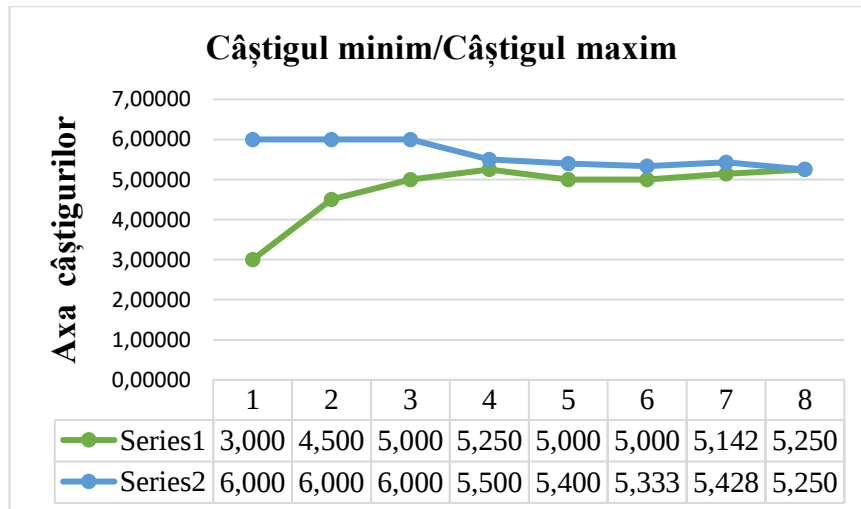


Figura 1. Metoda iterativă Brown-Robinson

În graficul din figura 1 este ilustrată convergența câștigului minim v_1 și a câștigului maxim v_2 către valoarea jocului v^* pe parcursul iterațiilor metodei Brown-Robinson, implementată pe baza câștigurilor cumulate de primul jucător și pierderilor cumulate de al doilea jucător.

Soluția jocului, cazul I: $\left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right); \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right); 5.25\right\}$

Cazul II: Implementarea metodei Brown–Robinson în soluționarea jocurilor matriceale pe baza utilizării frecvențelor relative ale strategiilor

Pentru a evidenția modul de aplicare a formulelor 5 și 6, primele două iterații se vor calcula manual, urmând ca iterațiile următoare să fie realizate în MS Excel.

1. Se va presupune că la prima iterație jucătorul A adoptă strategia sa *maximin* A_1 (poate alege o oricare altă strategie). În acest caz, el poate obține câștigurile $(3, 9)$ asociate strategiilor pure (B_1, B_2) ale jucătorului B . La rândul lui, jucătorul B va adopta strategia ce-i va minimiza pierderea $\min(3, 9) = 3$, adică strategia B_1 , care îi va aduce câștigurile $(3, 6)$ asociate strategiilor pure (A_1, A_2) .

2. Se va construi vectorul p cu coordonatele p_i , unde fiecare p_i reprezintă frecvența relativă de alegere a strategiei A_i până la pasul curent. Fiecare p_i se va determina după formula $p_i(k) = \frac{N_i(k)}{k}$, unde $N_i(k)$ reprezintă numărul de utilizări a strategiei A_i până la pasul k .

În mod analog se va construi vectorul q cu coordonatele q_j , unde fiecare q_j reprezintă frecvența relativă de alegere a strategiei B_j până la pasul curent. Fiecare q_j se va determina după formula $q_j(k) = \frac{N_j(k)}{k}$, unde $N_j(k)$ reprezintă numărul de utilizări a strategiei B_j până la pasul k .

$k := 1$: La prima iterație vectorul p are forma $p = (1; 0)$ și $q = (1; 0)$. Aplicând formulele 5, 6 și 7 se va determina $v_1(1)$, $v_2(1)$ și $v^*(1)$.

$$S_1^{(1)}(A) = 3 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 3$$

$$S_1^{(1)}(B) = 3 \cdot 1 + 9 \cdot 0 = 3$$

$$S_2^{(1)}(A) = 9 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 9$$

$$S_2^{(1)}(B) = 6 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 6$$

$$v_1(1) = \min(3, 9) = 3$$

$$v_2(1) = \max(3, 6) = 6$$

$$v^*(1) = \frac{\max_k v_2(k) + \min_k v_1(k)}{2} = \frac{6 + 3}{2} = 4.5$$

3. $k := 2$: La iterația a doua, jucătorul A va adopta strategia A_2 , așa cum $\max(3, 6) = 6$. Pentru a completa strategia A_2 se va proceda în mod analog ca și în cazul I. Astfel, $A_{2_nou} = (9, 13)$. Deoarece jucătorul B dorește să minimizeze pierderea, va alege strategia B_1 , așa cum $\min(9, 13) = 9$, iar $B_{2_nou} = (6, 12)$.

În continuare se vor determina coordonatele vectorilor p și q . Așa cum strategia A_1 a fost selectată o singură dată, avem $p_1 = \frac{1}{2}$. Strategia A_2 a fost adoptată la fel o singură dată, deci $p_2 = \frac{1}{2}$. Astfel, vectorul p ia forma: $p = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

În același mod determinăm valorile vectorului q . Strategia B_1 a fost aplicată de două ori, iar strategia B_2 nu a fost aplicată. Astfel, vectorul q ia forma $q = (2/2, 0/2) = (1; 0)$. Aplicând formulele 5, 6 și 7 se va determina $v_1(2)$, $v_2(2)$ și $v^*(2)$.

$$S_1^{(2)}(A) = 3 \cdot 0.5 + 6 \cdot 0.5 = 4.5 \quad S_1^{(2)}(B) = 3 \cdot 1 + 9 \cdot 0 = 3$$

$$S_2^{(2)}(A) = 9 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.5 = 6.5 \quad S_2^{(2)}(B) = 6 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 6$$

$$v_1(2) = \min(4.5, 6.5) = 4.5 \quad v_2(2) = \max(3, 6) = 6$$

$$v^*(2) = \frac{\max_k v_2(k) + \min_k v_1(k)}{2} = \frac{\max(6, 6) + \min(3, 4.5)}{2} = \frac{6 + 3}{2} = 4.5$$

4. $k := 3$: La iterația a treia, jucătorul A va adopta la fel strategia A_2 , așa cum $\max(6, 12) = 12$. Astfel, $A_{3_nou} = (15, 17)$. Deoarece jucătorul B dorește să-și minimizeze pierderea, va alege strategia B_1 , așa cum $\min(15, 17) = 15$, iar $B_{3_nou} = (9, 18)$.

În continuare se vor determina coordonatele vectorilor p și q . Așa cum strategia A_1 a fost selectată doar odată, avem $p_1 = \frac{1}{3}$. Strategia A_2 a fost adoptată de două ori, deci $p_2 = \frac{2}{3}$. Astfel, vectorul p ia forma: $p = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

În același mod determinăm valorile vectorului q . Strategia B_1 a fost utilizată de trei ori, iar strategia B_2 nu a fost aplicată. Astfel, vectorul q ia forma: $q = (\frac{3}{3}, \frac{0}{3}) = (1; 0)$. Aplicând formulele 5, 6 și 7 se va determina $v_1(3)$, $v_2(3)$ și $v^*(3)$.

$$S_1^{(3)}(A) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = 5 \quad S_1^{(3)}(B) = 3 \cdot 1 + 9 \cdot 0 = 3$$

$$S_2^{(3)}(A) = 9 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{17}{3} \quad S_2^{(3)}(B) = 6 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 6$$

$$v_1(3) = \min\left(5, \frac{17}{3}\right) = 5 \quad v_2(3) = \max(3, 6) = 6$$

$$v^*(3) = \frac{\max_k v_2(k) + \min_k v_1(k)}{2} = \frac{\max(6, 6, 6) + \min(3, 4.5, 5)}{2} = \frac{6 + 3}{2} = 4.5$$

Continuând acest proces iterativ, se va determina strategia optimă mixtă a primului jucător, strategia optimă mixtă a jucătorului al doilea și prețul jocului v^* cu exactitatea solicitată în condiția problemei. Soluția completă este prezentată în tabelul 3.

Așa cum se observă din tabelul 3, prețul jocului în acest caz rămâne constant $v^* = 4.5$, așa cum $v_1(1)$ reprezintă cea mai mică valoare din șirul iterativ obținut, iar $v_2(1)$ reprezintă cea mai mare valoare. În asemenea cazuri, deși condiția de oprire este formal îndeplinită, metoda nu mai aduce o rafinare progresivă a aproximării, ceea ce poate fi considerat un neajuns practic al procedurii.

Tabelul 3. Metoda Brown-Robinson. Cazul II

Probabilitățile jucătorului A		Suma p_i	Probabilitățile jucătorului B		Suma q_j	Câștigul minim	Câștigul maxim	Prețul jocului	Prețul jocului local	D_k
$p_1(k)$	$p_2(k)$	$p_1 + p_2$	$q_1(k)$	$q_2(k)$	$q_1 + q_2$	$v_1(k)$	$v_2(k)$	$v^*(k)$	$v(k)$	$ v_1(k) - v_2(k) $
1	0	1	1	0	1	3,00000	6,00000	4,50000	4,50000	3,00000
1/2	1/2	1	1	0	1	4,50000	6,00000	4,50000	5,25000	1,50000
1/3	2/3	1	1	0	1	5,00000	6,00000	4,50000	5,50000	1,00000
1/4	3/4	1	3/4	1/4	1	5,25000	5,50000	4,50000	5,37500	0,25000
1/5	4/5	1	3/5	2/5	1	5,00000	5,40000	4,50000	5,20000	0,40000
1/3	2/3	1	2/3	1/3	1	5,00000	5,33333	4,50000	5,16667	0,33333
2/7	5/7	1	5/7	2/7	1	5,14286	5,42857	4,50000	5,28571	0,28571
1/4	3/4	1	5/8	3/8	1	5,25000	5,25000	4,50000	5,25000	0,00000

Soluția jocului, cazul II: $\left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right); \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right); 4.5\right\}$

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale din perspectiva conceptului STEAM și Inteligenței Artificiale”, codul 040101, din cadrul Programului instituțional de cercetare (2024-2027), aprobat prin Ordin MEC nr. 102 din 01.02.2024

Bibliografie

- JOSU, Natalia. Aspecte metodologice privind rezolvarea jocurilor matriceale cu sumă nulă în strategii pure și mixte de dimensiunea 2×2 . In: *Acta et commentationes (Științe ale Educației)*, 2025, nr. 1(39), pp. 69-80. ISSN 1857-0623. DOI: <https://doi.org/10.36120/2587-3636.v39i1.69-80>.
- JOSU, Natalia. Implementarea pachetelor Simplex și Optimisation în soluționarea jocurilor matriceale. In: *Acta et commentationes (Științe ale Educației)*, 2024, nr. 2(36), pp. 107-114. ISSN 1857-0623. DOI: <https://doi.org/10.36120/2587-3636.v36i2.107-114>.
- ЛЕОНОВА, Надежда. *Теория игр и исследование операций антагонистические игры. Учебно-методическое пособие*. «Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна». Высшая школа технологии и энергетики. Санкт-Петербург 2022, 49 с, УДК 519.83 ББК 22.18. Надежда Львовна Леонова. <https://nizrp.narod.ru/metod/kafpriklmatiiif/1654647158.pdf>. (accesat 25.09.2025).

Recepționat / Received: 03.09.2025

Acceptat / Accepted: 27.09.2025

Email: chiriac.liubomir@upsc.md
josu.natalia@upsc.md