

CERCETAREA ȘI REZOLVAREA UNOR ECUAȚII ÎN INELUL CLASELOR DE RESTURI

Valeriu BORDAN, doctor, conferențiar universitar

<https://orcid.org/0009-0008-4415-3750>

Mihaela HAJDEU, doctor, lector universitar

<https://orcid.org/0000-0001-8189-7558>

Catedra Matematică și Fizică

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău

Rezumat. În această lucrare sunt cercetate unele ecuații în inelul claselor de resturi după un modul. Se demonstrează că aceste ecuații posedă o singură soluție doar în inelul claselor de resturi după modulul 5. Se arată că compatibilitatea acestor ecuații în structura de inel are o legătură cu perechile de elemente consecutive reciproc inversabile din aceste inelele.

Cuvinte cheie: inelul claselor de resturi după un modul n , ecuație algebrică, soluție a ecuației în inel, ecuație incompatibilă, elemente consecutive reciproc inversabile.

RESEARCH AND SOLVING SOME EQUATIONS IN THE RING OF RESIDUE CLASSES

Summary. In this paper are investigated some equations in the ring of residue classes. It is shown that these equations possess a single solution only in the ring of residue classes modulo 5. It is shown that the compatibility of these equations in the ring structure is related to the pairs of consecutive mutually invertible elements in these rings.

Keywords: ring of residue classes modulo n , algebraic equation, solution of ring equation, incompatible equation, mutually invertible consecutive elements.

Se știe că teoria ecuațiilor algebrice cu coeficienți ce aparțin unui corp comutativ reprezintă un domeniu important și mult studiat în algebra tradițională.

Diverse probleme de matematică, uneori chiar foarte complicate se rezolvă prin diferite metode, dar în cele mai dese cazuri se reduc la determinarea soluțiilor unei ecuații algebrice peste o structură de corp comutativ sau în general peste un inel [1], [2], [8].

De asemenea multe probleme din alte domenii ca fizica, statistica matematica, economia, teoria jocurilor, programare se rezolvă cu ajutorul unor ecuații algebrice [3], [4].

Obiectivul de bază al acestei lucrări este de a arăta importanța unor proprietăți ale structurii algebrice, adică ale domeniului căruia aparțin coeficienții ecuației algebrice cercetate [5], [6] și cum depind de acestea numărul rădăcinilor ecuației.

Este cunoscut faptul că pentru o ecuație algebrică peste un domeniu de integritate, numărul rădăcinilor ei nu întrece gradul acestei ecuații. Iar în cazul când structura algebrică este doar inel, care nu este domeniu de integritate, atunci numărul rădăcinilor poate fi mai mare decât gradul ecuației algebrice date.

Exemple. a) în inelul claselor de resturi după modulul 8, $Z_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ ecuația de gradul 2, $x^2 + \bar{7} = \bar{0}$ are 4 soluții, $x \in \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$;

b) în inelul claselor de resturi după modulul 16, $Z_{16} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{15}\}$, ecuația de gradul 2, $x^2 + \bar{4}x = \bar{0}$ are la fel 4 soluții, $x \in \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{12}\}$;

c) în inelul matricelor pătrate de ordinul 2 peste inelul claselor de resturi după modulul 2, $(M_2(Z_2), +, \cdot)$, care evident că nu este un inel integru, considerând ecuația algebrică de gradul doi $x^2 + x = \bar{0}$, se arată că din mulțimea elementelor inelului $M_2(Z_2)$ rădăcini pentru ecuația dată sunt toate elementele idempotente din acest inel, adică acele elemente pentru care $x^2 = x$. Iar mulțimea elementelor idempotente din acest inel este următoarea [4]:

$$M_I = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \right\}.$$

Prin urmare, ecuația are 8 rădăcini, iar gradul ei este doi.

Din aceste exemple, dar și din altele care pot fi aduse, vedem cât de importantă este structura algebrică în care se cercetează ecuația algebrică [7], [9].

În continuare vom efectua o cercetare a inelelor de clase de resturi după un modul, în care două ecuații algebrice de gradul doi posedă soluție unică. De asemenea sunt formulate câteva concluzii cu privire la compatibilitatea acestor ecuații în inelele de clase de resturi și sunt rezolvate unele exemple, luând la bază cele demonstrate.

Menționăm că compatibilitatea acestor ecuații în structura de inel are o legătură interesantă cu perechile de elemente consecutive reciproc inversabile din aceste inele. Mai exact, vom arăta că numărul de soluții ale ecuației coincide cu numărul de perechi de elemente consecutive reciproc inversabile din inelul de clase de resturi.

Problema 1. Determinați inelele claselor de resturi $Z_n, n > 1$ în care ecuația $x^2 + x = \bar{1}$ are o singură soluție.

Soluție. Admitem că $\bar{a} \in Z_n$ este soluție a acestei ecuații, adică $\bar{a}^2 + \bar{a} = \bar{1}$.

Arătăm că în acest caz $-(\bar{a} + \bar{1})$ la fel este soluție a ecuației. Observăm că $(-(\bar{a} + \bar{1}))^2 = (\bar{a} + \bar{1})^2 = \bar{a}^2 + 2\bar{a} + \bar{1} = \bar{1} + \bar{a} + \bar{1} = \bar{1} + \bar{a} + \bar{1} = \bar{1}$. Astfel $(-(\bar{a} + \bar{1}))^2 + (-(\bar{a} + \bar{1})) = \bar{1}$. Deoarece soluția ecuației este unică, avem $\bar{a} = -(\bar{a} + \bar{1})$ sau $2\bar{a} + \bar{1} = \bar{0}$. Pe de altă parte $4\bar{a}^2 + 4\bar{a} = \bar{4}$ sau $(2\bar{a} + \bar{1})^2 = \bar{5}$.

Cum $2\bar{a} + \bar{1} = \bar{0}$, rezultă că $\bar{5} = \bar{0}$, deci $n = 5$.

Astfel am arătat că Z_5 este unicul inel de clase de resturi în care ecuația $x^2 + x = \bar{1}$ are singură soluție, $x = \bar{2}$.

Observăm că dacă $\bar{a}$ este soluție a ecuației date, atunci inversul lui $\bar{a}$ în acest inel este $\bar{a} + \bar{1}$.

Astfel, obținem următoarea concluzie:

Concluzia 1. Inelul Z_5 este unicul inel de clase de resturi, care are o singură pereche de elemente consecutive reciproc inversabile (acestea fiind $\bar{2}$ și $\bar{3}$).

Concluzia dată ne permite să formulăm o problemă similară, care poate fi propusă studenților sau elevilor de a fi rezolvată de sinestătător.

Problema 2. Arătați că inelul claselor de resturi Z_5 este unicul inel de clase de resturi în care ecuația $x^2 + 4x = \bar{1}$ are o singură soluție.

Soluție. Considerăm inelul claselor de resturi $Z_n, n > 1$, iar $\bar{a} \in Z_n$ soluție a ecuației $x^2 + 4x = \bar{1}$. Cum ecuația dată este echivalentă în Z_5 cu ecuația $x^2 - x = \bar{1}$, obținem $\bar{a}^2 - \bar{a} = \bar{1}$. Arătăm că în cazul dat $\bar{1} - \bar{a}$ la fel este soluție a acestei ecuații.

$$(\bar{1} - \bar{a})^2 - (\bar{1} - \bar{a}) = \bar{1} - 2\bar{a} + \bar{a}^2 - \bar{1} + \bar{a} = \bar{a}^2 - \bar{a} = \bar{1}.$$

Deoarece ecuația $x^2 - x = \bar{1}$ admite o singură soluție, este necesar să avem $\bar{1} - \bar{a} = \bar{a}$. Prin urmare $2\bar{a} - \bar{1} = \bar{0}$. Cum $\bar{a}^2 - \bar{a} = \bar{1}$, obținem $4\bar{a}^2 - 4\bar{a} = \bar{4}$ sau $(2\bar{a} - \bar{1})^2 = \bar{5}$. Rezultă din nou că $\bar{5} = \bar{0}$, deci $n = 5$. Astfel am arătat că Z_5 este unicul inel de clase de resturi în care ecuația $x^2 + 4x = \bar{1}$ are soluție unică, soluția fiind $x = \bar{3}$.

Din cele demonstrate mai sus rezultă următoarele:

Concluzia 2. Dacă în inelul $Z_n, n > 1, n \neq 5$ există o pereche de elemente consecutive reciproc inversabile, atunci această pereche nu este unică.

Această afirmație rezultă din faptul că, dacă în inelul $Z_n, n > 1, n \neq 5$ ecuațiile $x^2 + x = \bar{1}$ și $x^2 - x = \bar{1}$ sunt compatibile, atunci ele posedă cel puțin 2 soluții diferite $\bar{a}, \bar{b} \in Z_n$ pentru care avem perechile consecutive de elemente reciproc inversabile $\bar{a}$ și $\bar{a} + \bar{1}$, respectiv $\bar{b}$ și $\bar{b} + \bar{1}$. Analog pentru ecuația $x^2 - x = \bar{1}$, obținem perechile consecutive de elemente inversabile $\bar{a}$ și $\bar{a} - \bar{1}$, $\bar{b}$ și $\bar{b} - \bar{1}$.

Concluzia 3. Dacă $n > 1$ este număr natural par, atunci inelul Z_n nu are nici o pereche de elemente consecutive reciproc inversabile, adică ecuațiile $x^2 + x = \bar{1}$ și $x^2 - x = \bar{1}$ sunt incompatibile în aceste inele.

Aceasta rezultă din faptul că, dacă $n > 1$ este număr natural par, atunci produsul a oricăror două elemente consecutive generează o clasă de resturi nu numere întregi pare, care după un modul par n , nu pot fi congruente cu 1. Prin urmare, ecuațiile date nu vor avea soluții în aceste inele de clase de resturi după acest modul.

Cunoaștem că o importanță deosebită în inelele de clase de resturi îl joacă câmpurile (corpurile comutative), adică inele Z_n , pentru care $n = p$ - număr prim. În cazul câmpurilor prezintă interes întrebările:

a) Dacă există câmpuri $Z_p, p > 5$, în care ecuațiile $x^2 + x = \bar{1}$ și $x^2 - x = \bar{1}$ să nu aibă soluții?

b) Dacă există inele Z_n , care nu-s câmpuri, în care ecuațiile $x^2 + x = \bar{1}$ și $x^2 - x = \bar{1}$ să aibă soluții? Evident că soluția dacă există, nu va fi unică.

La ambele întrebări formulate mai sus răspunsul este afirmativ și rezultă din următoarele observații:

Observația 1. Există câmpuri Z_p , $p > 5$, în care ecuațiile $x^2 + x = \bar{1}$ și $x^2 - x = \bar{1}$ sunt incompatibile. De exemplu, câmpurile Z_7, Z_{13} și altele nu conțin perechi de elemente consecutive reciproc inversabile, prin urmare, rezultă că ecuațiile cercetate sunt incompatibile în aceste câmpuri.

Observația 2. Există inele de clase de resturi Z_n , $n > 5$, care nu-s câmpuri, în care ecuațiile $x^2 + x = \bar{1}$ și $x^2 - x = \bar{1}$ sunt compatibile, având, evident, cel puțin două soluții.

Ca exemplu poate fi adus inelul claselor de resturi Z_{55} , care nu este câmp, în care ecuația $x^2 + x = \bar{1}$ are soluțiile $\{\bar{7}, \bar{47}\}$, iar ecuația $x^2 - x = \bar{1}$ are soluțiile $\{\bar{8}, \bar{48}\}$. Cu alte cuvinte, în inelul Z_{55} există două perechi de elemente consecutive reciproc inversabile: $(\bar{7}, \bar{8})$ și $(\bar{47}, \bar{48})$.

Exemplul 1. Știind că în inelul Z_{41} o soluție a ecuației $x^2 + x = \bar{1}$ este elementul $a = \bar{6}$, aflați cealaltă soluție a acestei ecuații.

Soluție. În baza celor menționate, deoarece $a = \bar{6}$ este o soluție a ecuației $x^2 + x = \bar{1}$ rezultă că $b = -(\bar{6} + \bar{1})$ la fel este soluție, deci $b = -\bar{7} = \bar{34}$. Într-adevăr $\bar{34} \cdot \bar{35} = \bar{1}$ în acest inel. Astfel mulțimea soluțiilor ecuației date este $\{\bar{6}, \bar{34}\}$.

Exemplul 2. Știind că în inelul Z_{29} o soluție a ecuației $x^2 - x = \bar{1}$ este elementul $a = \bar{6}$, aflați cealaltă soluție a acestei ecuații.

Soluție. Deoarece $a = \bar{6}$ este o soluție a ecuației $x^2 - x = \bar{1}$ rezultă că $b = \bar{1} - \bar{a} = -\bar{5} = \bar{24}$ la fel este soluție, deci $b = \bar{24}$. Într-adevăr, $\bar{24} \cdot \bar{23} = \bar{1}$ în acest inel. Prin urmare, în inelul Z_{29} mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 - x = \bar{1}$ este $\{\bar{6}, \bar{24}\}$.

Exemplul 3. Știind că în inelul Z_{19} o soluție a ecuației $x^2 + x = \bar{1}$ este $a = \bar{14}$, aflați cealaltă soluție a ei.

Soluție. Cum $a = \bar{14}$ este soluție a ecuației $x^2 + x = \bar{1}$ rezultă că $b = -(\bar{14} + \bar{1})$ la fel este soluție, deci $b = -\bar{15} = \bar{4}$. Fără dificultate se verifică că, într-adevăr $\bar{4} \cdot \bar{5} = \bar{1}$ în inelul Z_{19} .

Exemplul 4. Știind că în inelul Z_{19} o soluție a ecuației $x^2 + \bar{18}x = \bar{1}$ este elementul $a = \bar{5}$, aflați cealaltă soluție a acestei ecuații.

Soluție. Ecuația $x^2 + \bar{18}x = \bar{1}$ este echivalentă în acest inel cu $x^2 - x = \bar{1}$. Atunci $b = \bar{1} - \bar{a} = \bar{15}$ la fel este soluție, deci $b = \bar{15}$ este a doua soluție a ecuației date.

Exemplul 5. Arătați că inelul Z_{71} are două perechi consecutive de elemente reciproc inversabile.

Soluție. Existența perechilor consecutive de elemente reciproc inversabile în acest inel rezultă din compatibilitatea ecuațiilor $x^2 + x = \bar{1}$, $x^2 - x = \bar{1}$ în inelul dat.

Astfel pentru a afla perechile de elemente consecutive reciproc inversabile din acest inel e suficient să rezolvăm una din ecuațiile date. Observăm că una din soluțiile ecuației $x^2 + x = \bar{1}$ în inelul Z_{71} este $a = \bar{8}$. Atunci $b = -(\bar{1} + \bar{a}) = \bar{62}$ la fel este soluție. Deci, $b = \bar{62}$ este a doua soluție a ecuației date.

Astfel cele două perechi de elemente consecutive reciproc inversabile ale inelului Z_{71} sunt $\overline{8}, \overline{9}$ și respectiv, $\overline{62}, \overline{63}$.

În încheiere, menționăm că ecuațiile rezolvate în inelul claselor de resturi după un modul, precum și cercetarea efectuată poate fi de un real folos pentru elevii și studenții pasionați de teoria ecuațiilor algebrice, a polinoamelor, a inelelor de clase de resturi, a câmpurilor și poate fi extinsă asupra altor tipuri de ecuații algebrice, atât în inele de clase de resturi după un modul, cât și în alte tipuri de inele sau alte structuri algebrice.

Bibliografie

1. BORDAN, V., HAJDEU, M. Despre soluțiile unor ecuații în inelul claselor de resturi modulo n . În: *Materialele Conferinței științifice internaționale, „Matematica Lumii Noi – STEAM, în context global”*. Ediția a III-a, 24-25 mai 2024. Focșani, Județul Vrancea, Romania, 2024. p. 69-72. ISBN 978-9975-3674-3-1.
2. BORDAN, V. *Aplicarea metodei resturilor la rezolvarea unor probleme din teoria elementară a numerelor*. În: *Materialele Conferinței republicane a cadrelor didactice*, 28-29 februarie, 2020. Vol. I. Didactica științelor exacte. Chișinău: UST, 2020. pp. 52-55. ISBN 978-9975-305-9.
3. BORDAN, V. *Rezolvarea unor probleme în inelul claselor de reziduri Z_n* . În: *Materialele Conferinței științifico-didactice naționale cu participare internațională*. Chișinău: UST, 2013. pp.13-16.
4. MUSTEA, T., BORDAN, V. (coordonator). *Polinoame peste un inel în care numărul de rădăcini întrece gradul polinomului*. În: *Materialele Conferinței științifice studențești cu participare internațională*, Ediția a LXX-a. Vol. I., 28 aprilie, 2021. Chișinău: Universitatea de Stat din Tiraspol, 2021. pp. 104-106. ISBN 978-9975-76-338-7.
5. DRULEA, M. *Culegere de probleme de algebră pentru liceu: Vol. II*. Baia Mare, 2000.
6. NĂSTĂSESCU, C., NIȚĂ, C., VRACIU, C. *Aritmetică și algebră*. Editura Didactică și Pedagogică. București, 1993. 259 p.
7. PERJU, C., PERJU, R. *Probleme de matematică pentru admitere în învățământul superior*. Editura Militară. București, 1981.
8. STAMATE, I., STOIAN, I. *Culegere de probleme de algebră*. București, 1971.
9. ВИЛЕНКИН, Н. Я., КАЗАЧЕК, Н. А., ПЕРЛАТОВ, Г. Н. *Алгебра и теория чисел*. Москва, 1984.

Recepționat / Received: 12.09.2025

Acceptat / Accepted: 28.09.2025

Email: bordan.valeriu@upsc.md

hajdeu.mihaela@upsc.md