ASPECTE METODOLOGICE ÎN PREDAREA TEMEI „VOLUMUL POLIEDRELOR”

***Angela NITREAN**, profesoare, grad didctic I, Liceul Teoretic ”Petru Rareş”, or.Soroca, masterandă UST*

***Mitrofan CIOBAN,** academician, UST*

Rezumat: În lucrare predarea modulului „Volumul poliedrelor” se cercetează ca o parte componentă a compatimentului „Măsurarea mărimilor geometrice”.

Cuvinte-cheie: poliedru, volum, măsură

Summary: In the paper the module "Volume of Polyhedra" is studed as a part of the section "Measurement of geometrical quantities".

Keywords: polyhedron, volume, measure

1. Introducere

Scopul principal al sistemului educaţional constă în formarea omului, producerea anumitor schimbări în ceea ce priveşte dezvoltarea lui intelectuală, în formarea de competenţe care ar contribui efectiv la activitatea ulterioară a lui pe tot parcursul vieţii. Unele dintre principiile generale ale învăţămîntului sunt:

- Principiul însuşirii conştiente, temeinice şi active a cunoştinţelor;
- Principiul accesibilităţii şi individualizării învăţării;
- Principiul sistematizării şi continuităţii în procesul de învăţare;
- Principiul intuitiv al învăţămîntului;

- Principiul legării teoriei cu practica.

Pornind de la aceste principii, este necesar ca predarea fiecărei discipline să aibă un caracter interdisciplinar şi un aspect integrator. Principiul integrator al învăţământului a fost elaborat cu privire la bazele metodologice ale activităţii extracurriculare la matematică în lucrarea [3]. Aspectul integrator presupune:

- Legătură strînsă între disciplinele curriculumului şcolar;
- Relaţii între teme şi module în interiorul fiecărei discipline;
- Reflectarea rolului fiecărui modul în pregătirea generală ulterioară.

Pentru a realiza principiile şi aspectul integrator al modulului „Volumul poliedrelor" este necesar a realiza următoarele obiective:

1. Formarea conceptului de volum şi dezvoltarea ulterioară a conceptului de măsurare a mărimilor geometrice şi fizice;
2. Însuşirea noţiunilor de măsurare a mărimilor şi, în particular, de măsurare a volumelor;
3. Calculul volumelor pentru anumite tipuri de corpuri geometrice;
4. Aplicarea unor algoritmi specifici calculului volumelor poliedrelor în rezolvări de probleme în situaţii reale şi/sau modelate.

2. Referitor la conceptul de măsurare a volumului

Conceptul de măsurare a volumelor este un caz particular al conceptului de măsurare a mărimilor. Fiecare profesor de matematică are datoria de a cunoaşte acest concept general.

Pentru a măsura unele mărimi este necesar:

- Să cunoaştem proprietăţile generale ale acestora;
- Să cunoaştem „*operaţia de sumă*" a două sau mai multe mărimi de tipul dat;
- Să fie determinat cînd două mărimi de acest tip sunt „*egale după formă şi mărime*" (*congruente*);
- Să fie dată o „*mărime*", care determină unitatea de măsură.

Prin urmare, dacă $\mathcal{K}$ este o clasă de figuri geometrice, atunci pentru a efectua măsurarea figurilor din $\mathcal{K}$ este necesar să fie dat:

1. Pentru orice două figuri F_1,F_2 $\in \mathcal{K}$ este bine determinat dacă F_1 şi F_2 sunt congruente sau nu. Dacă F_1este congruentă cu F_2 , atunci se notează $F_1 \equiv F_2$.
2. Pentru orice două figuri F_1,F_2 $\in \mathcal{K}$ este determinat dacă există sau nu suma lor. Dacă F este suma figurilor F_1 şi F_2, atunci notăm $F = F_1 \oplus F_2$. Întotdeauna, $F_1 \oplus F_2 = F_1 \cup F_2$.

În aceste condiţii o măsură a mărimilor din $\mathcal{K}$ este o corespondenţă la care fiecărei figuri $F \in \mathcal{K}$ i se ataşează un număr $m(F) > 0$ cu proprietăţile:

Proprietatea 1. Dacă $F_1 \equiv F_2$, atunci $m(F_1) = m(F_2)$.

Proprietatea 2. Dacă $F = F_1 \oplus F_2$, atunci $m(F) = m(F_1) + m(F_2)$.

Proprietatea 3. Dacă există o figură elementară $F_0 \in \mathcal{K}$ pentru care $m(F_0) = 1$, atunci spunem că figura F_0 determină unitatea de măsură.

Exemplul 2.1. Fie $\mathcal{K}$ totalitatea figurilor finite din plan sau spaţiu. Vom spune că $F_1 \equiv F_2$, dacă F_1 şi F_2 sunt congruente în sens obişnuit. Suma $F_1 \oplus F_2$ a figurilor F_1 şi F_2 există, dacă F_1 şi F_2 nu au puncte comune şi în acest caz, $F_1 \oplus F_2 = F_1 \cup F_2$.
Fie k>0. Dacă $|F|$ este numărul de elemente din F, atunci $m(F) = k \cdot |F|$ va fi o măsură a mărimilor din clasa $\mathcal{K}$. Pentru numărul k iraţional nu există o figură F_0 cu condiţia $m(F_0) = 1$. Astfel de figură F_0 există numai pentru k = $\frac{1}{n}$, unde n este un număr natural.
Exemplul 2.2. Fie $\mathcal{K}$ totalitatea segmentelor din plan sau spaţiu. Pentru aceste figuri este cunoscută relaţia de congruentă $F_1 \equiv F_2$. Suma $a \oplus b$ a două segmente a, b există atunci şi numai atunci când:
- $a \cup b$ este segment;
- a şi b nu au puncte interioare comune.

O măsură $l(x)$ a lungimilor segmentelor ataşează fiecărui segment a un număr $l(a)$, astfel încît:
1. Dacă $a \equiv b$, atunci $l(a) = l(b)$.
2. Dacă $c = a \oplus b$, atunci $l(c) = l(a) + l(b)$.
3. Există un segment e, numit unitate de măsură, pentru care $l(e) = 1$.

Exemplul 2.3. Fie $\mathcal{K}$ totalitatea poligoanelor din plan. Pentru două poligoane P_1 şi P_2 există suma $P_1 \oplus P_2$ dacă şi numai dacă:
- $P_1 \cup P_2$ este un poligon;
-P_1 şi P_2 nu conţin puncte interioare comune.

Atunci o măsură A a ariilor poligoanelor ataşează fiecărui poligon P un număr $A(P) > 0$, astfel încît:
1. Dacă $P_1 \equiv P_2$, atunci $A(P_1) = A(P_2)$.
2. Dacă $P = P_1 \oplus P_2$, atunci $A(P) = A(P_1) + A(P_2)$.
3. Există un pătrat P_0 pentru care $A(P_0) = 1$. Latura pătratului P_0 va fi unitatea de măsură.

Studiul măsurărilor din aceste exemple a fost efectuat pînă în clasa a IX-a. Deci elevii sunt bine familiarizaţi cu măsurarea lungimilor segmentelor şi ariilor poligoanelor. Acest fapt stă la baza formării conceptului de măsurare a volumelor poliedrelor.
Noţiunea generală de măsurare a volumelor se înscrie în linia generală a conceptului general.

Fie acum $\mathcal{K}$ clasa tuturor poliedrelor. Pentru două poliedre P_1 şi P_2 este determinată suma $P_1 \oplus P_2 = P_1 \cup P_2$, atunci şi numai atunci când
- $P_1 \cup P_2$ este un poliedru.
- P_1 şi P_2 nu au puncte comune interioare.

O măsură V a volumelor poliedrelor ataşează fiecărui poliedru P un număr $V(P) > 0$, numit volumul poliedrelor P, astfel încît:
1. Dacă $P_1 \equiv P_2$, atunci $V(P_1) = V(P_2)$.
2. Dacă $P = P_1 \oplus P_2$, atunci $V(P) = V(P_1) + V(P_2)$.
3. Există un cub K_0 pentru care $V(K_0) = 1$. Latura cubului K_0 este unitate de măsură a volumelor.

Aceste exemple se înscriu armonios în conceptul general de măsurare a mărimilor.

3. Referitor la modulul „Volumul poliedrelor".

Acest modul se studiază mai aprofundat în clasa a XII-a. Elevii au luat cunoştinţă de unele corpuri în clasele primare: cubul, paralelipipedul dreptunghic, sfera. Clasificarea după diferite criterii a poliedrelor se efectuează în clasele a V-a - IX-a. În clasa a IX-a elevii au calculat deja volumele unor corpuri, însă formulele respective n-au fost demonstrate. Elevii din clasele primare iau cunoştinţă de noţiunea de volum la nivel intuitiv: **volumul este proprietatea unui corp de a ocupa un loc în spaţiu.** Lichidele iau forma vaselor ce le conţin. Pornind de la acest moment intuitiv, cînd volumul corpului constă din „*cantitatea de lichid care umple interiorul corpului*" se dezvoltă conceptul de măsurare a volumelor. Această mărime reflectă „*capacitatea*" corpului.

Volumul se poate determina prin metode indirecte:

1.*Metoda geometrică*, care utilizează formulele de calcul ale volumului în geometrie, după măsurarea dimensiunilor.

2. *Metoda gravimetrică (dinamică)*, la care se utilizează definiţia volumului învăţată la fizică. Volumul este egal cu raportul dintre masă şi densitate. Masa se determină prin cîntărire, iar densitatea se alege din tabele în funcţie de natura materialului. Această metodă permite să calculăm volumul corpurilor de formă neregulată (principiul lui Arhimede).

3. *Metoda volumetică (statică)* – se determină volumul unui lichid prin comparare cu o măsură etalon (*vas gradat, litru, vadră, oca, baril, galon, ster, cisternă,* etc.).

Aceste metode sunt amintite numai cu titlu informativ pentru a face comparaţii cu alte obiecte şi de aceea la fiecare metodă se vizualizează cu ajutorul calculatorului diferite imagini referitoare la aceste metode.

Apoi se introduce funcţia volum. **Funcţia volum** asociază fiecărui corp simplu K un număr real nenegativ $V(K)$, numit volumul corpului respectiv. În dependenţă de clasă se descriu proprietăţile funcţiei volum. În clasele primare şi cele gimnaziale poate fi realizat următorul experiment de calcul al volumului. Pentru acest experiment sunt necesare: unt vas de sticlă gradat; apă; corpuri, de regulă, de formă neregulată; aţă pentru agăţat corpul. Apoi efectuăm următoarele acţiuni:

1. În vasul gradat se pune o cantitate V_1 de apă.
2. Volumul V_1 se trece în tabel.
3. Se agaţă corpul cu aţă şi se introduce în apă, având grijă ca el să fie perfect scufundat.
4. Se citeşte noua indicaţie V_2 a volumului pe peretele vasului şi se trece în tabel.
5. Volumul corpului se calculează prin diferenţa dintre volumul final şi volumul iniţial: $V = V_2 - V_1$.

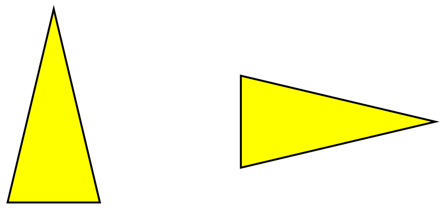
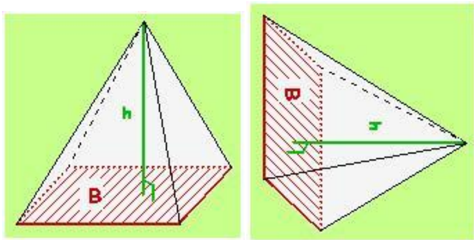
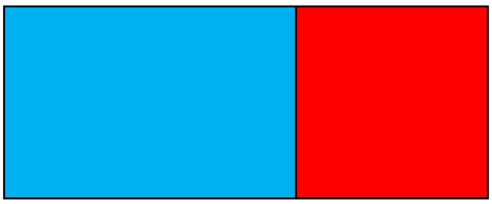
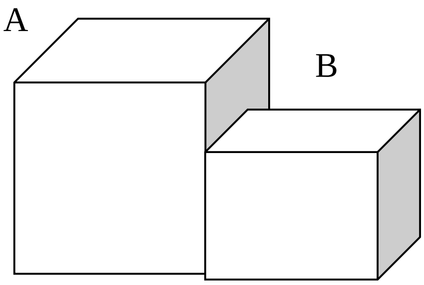
Acest experiment se repetă cu diferite volume V_1 iniţiale, cu diferite corpuri şi cu mai multe corpuri simultan. Mărimea cantităţii V_1 se alege în aşa mod, încît corpurile să fie perfect scufundate. În rezultatul experimentului se fac următoarele concluzii:

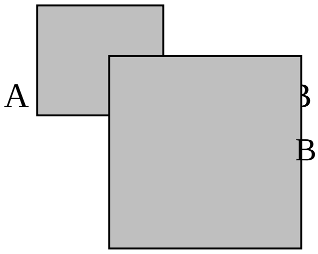
- Diferenţa $V = V_2 - V_1$ nu depinde de volumul iniţial V_1, dar numai de corp (sau corpuri);

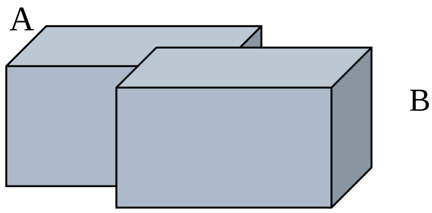
- Volumul a două corpuri este egal cu suma volumelor acestor corpuri.

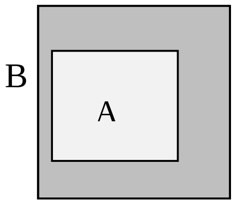
Acest experiment este bazat pe principiul lui Arhimede. Este bine cunoscută povestea de mare inspiraţie a lui Arhimede care a născut celebra expresie „**Evrica**!" („am găsit!"). Legenda afirmă că atunci când marele savant grec al antichităţii, intrând în cada de baie şi observând că nivelul apei a crescut, a înţeles că „*volumul de apă dezlocuit trebuie să fie egal cu volumul unei părţi a corpului său, cea aflată în apă”*. Prin acest fapt, Arhimede a descoperit o *modalitate de calcul foarte precisă pentru volumul corpurilor de forme neregulate*. Legenda spune că emoţia pe care i-a produs-o a fost aşa de puternică, încât Arhimede ar fi sărit din cadă şi a alergat, uitând că era dezbrăcat, spre palat pentru a comunica descoperirea, strigând: „Evrica! Evrica!”

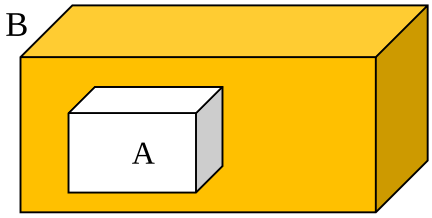
Tema: ”Măsurarea volumelor ” trebuie să exploateze intens şi eficace analogia dintre *plan* şi *spaţiu*. Le propunem elevilor să descrie proprietăţile care le vin în minte, atunci cînd se gîndesc la volum. Totodată discutăm proprietăţile volumului în paralel cu proprietăţile ariilor suprafeţelor.

Proprietăţile suprafeţelor.	Proprietăţile volumului.
 Suprafeţele congruente au aceeaşi arie.	 Dacă corpurile K_1 şi K_2 sînt congruente, atunci ele au acelaşi volum.
 Dacă o suprafaţă s-a descompus în două sau mai multe suprafeţe fără puncte interioare comune, atunci aria suprafeţei este egală cu suma ariilor acestora.	 Dacă corpul e descompus în două sau mai multe corpuri fără puncte interioare comune, atunci volumul lui este egal cu suma volumelor acestora.

<table>
<tr>
<td>

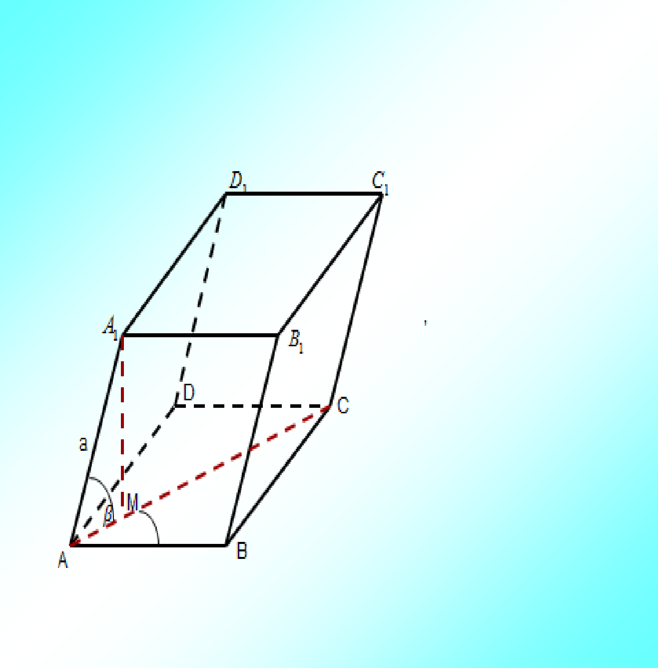
Aria ($\boldsymbol{A}$∪$\boldsymbol{B}$) = Aria ($\boldsymbol{A}$) + Aria($\boldsymbol{B}$) –
Aria ($\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$)</td>
<td>

Vol ($\boldsymbol{A}$∪$\boldsymbol{B}$) = **Vol** ($\boldsymbol{A}$) + $\boldsymbol{Vol}$ ($\boldsymbol{B}$) **- Vol** ($\boldsymbol{A}$
$\cap$ $\boldsymbol{B}$)</td>
</tr>
<tr>
<td>

Dacă $\boldsymbol{A}$⊆$\boldsymbol{B}$, atunci
Aria (B- A) = Aria (B) - Aria(A)</td>
<td>

Dacă $\boldsymbol{A}$⊆$\boldsymbol{B}$, atunci
Vol ($\boldsymbol{B}$ **-** $\boldsymbol{A}$) = **Vol** ($\boldsymbol{B}$) **- Vol** ($\boldsymbol{A}$).</td>
</tr>
</table>

Unitatea de măsură principală pentru volum este metru cub, notat cu m^3. Acesta poate fi imaginat ca volumul unui cub de latura de un metru.
În viaţa de zi cu zi folosim ca unitate de măsură de bază şi litrul, notat cu l. Este important ca elevii să ştie că 1l =1dm^3, adică volumul unei cutii în formă de cub, cu laturile de 10 cm (ceea ce este 1dm, de fapt). Relaţia dintre unitatea de măsură pentru volum şi unitatea de măsură pentru capacitate este 1litru = 1,000028$\cdot$ $10^{-3}m^3$.



Apoi se discută şi se demonstrează formulele de calcul pentru volumele corpurilor studiate, explicând rolul bazei şi al înălţimii după caz (vezi [1, 2]). Demonstrarea poate fi scrisă în Power Point, pentru a cîştiga timp. Învăţarea formulelor uzuale şi folosirea acestora în diferite aplicaţii este un obiectiv important. În cadrul acestei lecţii se dezvoltă gândirea logică, imaginaţia, gândirea vizuală, vederea în spaţiu.

Un rol important la predarea modulului „Volumul poliedrelor" joacă teorema lui Cavalieri.

Teoremă (*Principiul lui Bonaventura Francesco Cavalieri*)**.** Fie K_1 şi K_2 două corpuri simple şi α un plan. Dacă corpurile K_1 şi K_2 sînt amplasate faţă de planul α astfel, încît pentru orice plan $\beta \parallel \alpha$ secţiunile corpurilor K_1 şi K_2 cu planul β au arii egale, atunci $V(K_1)=V(K_2)$.

Această teoremă este un caz particular al teoremei lui T. Fubini despre integralele duble şi triple.

4. Probleme

Prin rezolvarea de probleme se realizează funcţii instructiv-educative (vezi [4]), cum sunt:

- folosirea cunoştinţelor anterioare;
- sistematizarea cunoştinţelor;
- autoevaluarea;
- stocarea şi actualizarea cunoştinţelor.

De aceea rezolvarea diferitor probleme este foarte importantă. În primul rînd, se vor rezolva unele probleme mai simple. Apoi sunt binevenite problemele cu caracter aplicativ.

Problema 4.1. Feţele unui paralelipiped sunt romburi congruente. Lungimea laturii unui romb este a şi unghiul ascuţit are măsura α. Să se afe volumul paralelipipedului.

Rezolvare: Construim proiecţia muchiei AA_1pe planul (*ABC*). Notăm $m(< A_1 AM) = \beta$, atunci

$\cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Din triunghiulAA_1M , $\sin\beta = \frac{MA_1}{a}$, $MA_1 = a\cdot$

$\sin\beta = \quad a \cdot \frac{\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Deoarece *ABCD* - romb, prin urmare, $A_{ABCD} = a^2 \cdot \sin\alpha$, $V = a^2 \cdot \sin\alpha \cdot a \cdot \frac{\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2a^3 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$.

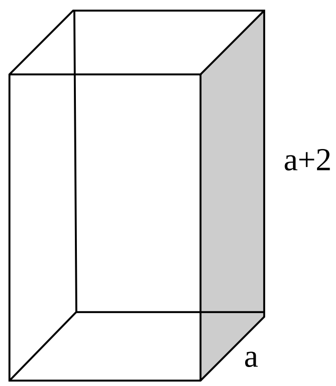
Răspuns: $V = 2a^3 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}$.

Problema 4.2. Bază unei piramide este un triunghi isoscel cu laturile de 10 cm,10 cm, 12 cm. Toate muchiile laterale au lungimea de 14 cm. Să se determine volumul piramidei.

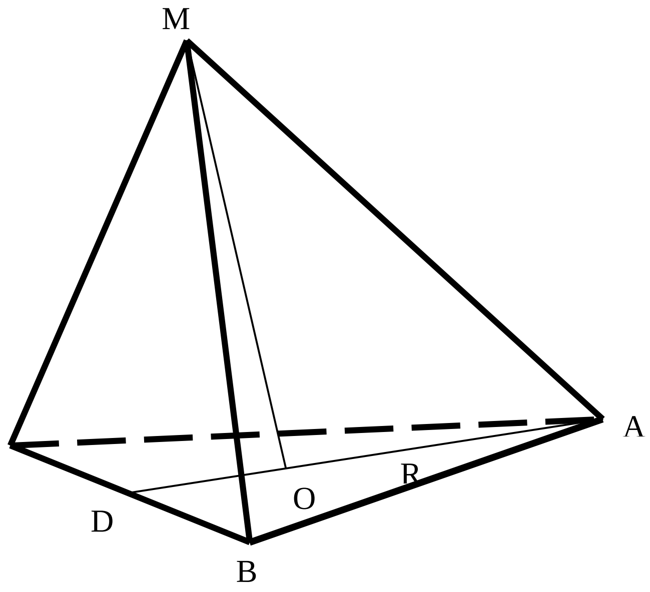
Rezolvare: Fie *ABC* baza piramidei date *MABC*. Deoarece toate muchiile laterale au lungimi egale, rezultă că proiecţiile lor pe planul bazei au de asemenea lungimi egale, deci piciorul înălţimii piramidei este centrul *O* al cercului circumscris triunghiului din bază. Fie $AO = R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului din bază. Aplicăm formula $V_p = \frac{1}{3}A_b \cdot MO$. După formula lui Heron, obţinem $A_b = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 48\ (cm^2)$. Din formula $R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot A_b}$, obţinem $AO = R = \frac{25}{4}\ cm$. Din dreptunghic $\triangle MAO$, conform teoremei lui Pitagora, obţinem $MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{196 - \frac{625}{16}} = \frac{9\sqrt{31}}{4}\ (cm)$. Deci $V_p = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot \frac{9\sqrt{31}}{4} = 36\sqrt{31}(cm^3)$.

Răspuns: $V_p = 36\sqrt{31} cm^3$.

Problema 4.3. Cele trei dimensiuni ale unui paralelipiped dreptunghic sunt în progresie aritmetică şi suma lor este egală cu 18 cm. Aria toată a paralelipipedului este de 198 cm^2. Să se determine volumul paralelipipedului.



Rezolvare: Notăm una din cele trei dimensiuni prin $a\ cm$, $a > 0$. Atunci celelalte dimensiuni vor avea forma $(a + r)cm, (a + 2r)cm$, deoarece din condiţie se ştie că cele trei dimensiuni sunt în progresie aritmetică, unde $r\ (r > 0)$ este raţia progresiei aritmetice. Din faptul că suma dimensiunilor este egală cu 18 cm rezultă $3a + 3r = 18$, $a + r = 6$ **(1)**, $a = 6 - r$. Dar $A_t = 2a \cdot (a + r) + 2 \cdot a \cdot (a + 2r) + 2 \cdot (a + r) \cdot (a + 2r) = 198$ **(2).** Luînd în consideraţie (1) şi (2), se obţine $r^2 = 9$. Deci $r = 3$ cm. Rezultă că cele trei dimensiuni sunt: 3 *cm*, 6 *cm* şi 9 *cm*. Prin urmare, $V = 3 \cdot 6 \cdot 9 = 162\ (cm^3)$.



Răspuns: $V_{paralelipipedului} = 162\ cm^3$.

Menţionăm şi următoarea problemă

Problema 4.4. Baza unui paralelipiped drept este un romb. Înălţimea paralelipipedului este egală cu $\sqrt{3}\ cm$, iar diagonalele lui formează cu planul bazei unghiuri de 45° şi 30°. Să se determine volumul paralelipipedului. (BAC 2011, profil real)

Acum propunem unele probleme cu caracter aplicativ.

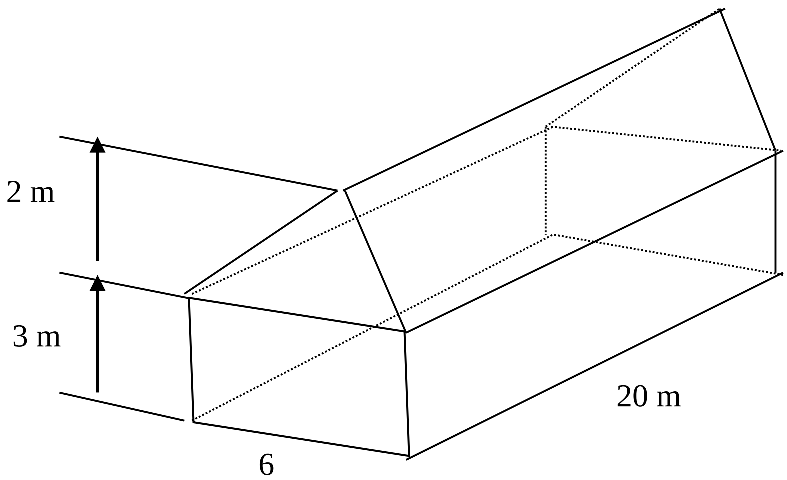
Problema 4.5. Un bazin are forma unui paralelipiped dreptunghiuc cu dimensiunile de 4 m, 6 m şi 0,9 m şi se umple cu apă prin două ţevi. În cît timp se va umple cu apă bazinul gol, dacă debitul unei ţevi este de 60 l de apă pe minut, iar al celeilalte – 40 l pe minut?

Rezolvare: Aflăm volumul bazinului. $V_{bazin} = 4 \cdot 6 \cdot 0{,}9 = 21{,}6\ m^3$. Cunoaştem că $1m^3 = 1000\ l$. Prin urmare, $21{,}6 \cdot 1000 = 21600\ (l)$ de apă încap în bazin. Într-un minut prin două ţevi curge 100 litri. Aflăm în cît timp se va umple cu apă bazinul gol $21600 : 100 = 216$ minute.

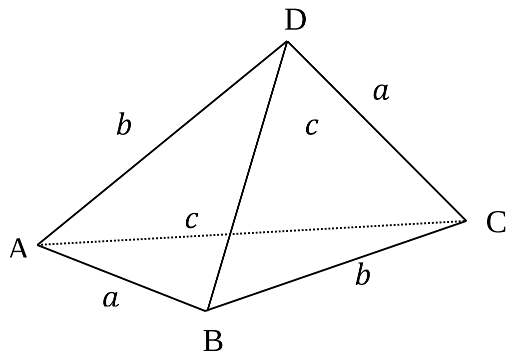
Răspuns: Bazinul se va umplea în 3 ore şi 36 minute.

Problemă 4.6. Trei cuburi din aramă de dimensiunile laturilor de 3 cm, 4 cm şi 5 cm au fost retopite într-un cub nou. Ce lungime are diagonala cubului obţinut? (BAC -2010, profil uman)

Problema 4.7. Fînul a fost depozitat într-un stog de forma reprezentată în desen (figura este compusă din două prisme drepte). Utilizînd datele din desen, calculaţi masa fînului din stog, dacă masa 1 m^3 de fîn este egalî cu 85 kg. (BAC 2010, profil real)



Problema 4.8. Toate feţele piramidei *ABCD* sunt triunghiuri congruente cu laturile $a =$



$AB, b = BC,\ c = AC$. Calculaţi volumul piramidei.

Astfel de tipuri generale de probleme se recomandă de rezolvat în clasă pentru un caz particular. De exemplu: $a = 3\ cm,\ b = 4\ cm, c = 5\ cm$. Pentru acasă trebuie propusă spre rezolvaare această problemă pentru alt caz particular: $a = 5cm, b = 6\ cm, c = 9\ cm$. La lecţia următoare de rezolvat această problemă în clasă, pornind de la particular la general.

BIBLIOGRAFIE**:**

1. Achiri I., Ciobanu V., Efros M., ş.a. *Matematica,* Manual pentru clasa a XII-a. Chişinău: Editura Prut Internaţional, 2011.
2. *Curriculum pentru clasele a X-a - XII-a,* Chişinău: Ştiinţa 2010.
3. Sali L., *Bazele metodologice ale activităţii extracurriculare la matematică*, ChişinăuŞ UST, 2012.
4. Юнина Е. А. *Технологии качественного обучения в школе,* Педагогическое общество России: Москва, 2007.