FOLOSIREA ANALIZEI DIMENSIONALE LA REZOLVAREA PROBLEMELOR

THE APPLICATION OF DIMENSIONAL ANALYSIS FOR SOLVING PROBLEMS

Mihail CERNEI, dr., conf. univ.
Leonid GUŢULEAC, dr., conf. univ.
Irina ZELINSCHI, stud., Facultatea FMTI
Catedra FTE, Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. Metoda analizei dimensionale poate fi foarte eficientă la rezolvarea unor probleme complicate de mecanică, în particular de hidrodinamică și aerodinamică. Ea oferă rezultate, care ne permit de a obține tabloul preliminar al fenomenelor examinate.

Abstract. The method of dimensional analysis can be very effective in solving complex problems of mechanics, in particular, in hydrodynamics and aerodynamics. It leads to results that give a preliminary concept of the phenomena under consideration.

Cuvinte-cheie: mărimi fundamentale, analiză dimensională, teorema π, pendul, forța de rezistență.
Key words: base quantities, dimensional analysis, theorem π, pendulum, resistance force.

Toate legile naturii sunt descrise cu ajutorul unor mărimi fizice, care pot fi exprimate doar prin trei mărimi fundamentale M, L, T (masă, lungime, timp). Aceste mărimi răspund la trei întrebări fundamentale pentru existenţa, reproducerea şi dezvoltarea oricărei gâze, animal, ființă umană etc.: 1) CÂT (M)?; 2) UNDE (L)?; 3) CÂND (T)? În principiu, intensitatea curentului I poate fi exprimată prin mărimile fundamentale MLT (spre exemplu, în sistemul CGS).

Fiecare mărime fizică se caracterizează printr-o anumită dimensiune. Analiza dimensională se dovedește a fi deseori o metodă eficace la investigarea fenomenelor fizice[1].

Raționamentele dimensionale pot fi utilizate la verificarea corectitudinii rezultatelor obținute: părțile dreaptă și stânga ale expresiilor, precum și toți termenii trebuie să aibă aceeași dimensiune, iar argumentul oricărei funcții este adimensional [1, 2].

Numărul parametrilor dimensionali independenți, care corespund unui fenomen fizic, se determină cu ajutorul teoremei π. Conform teoremei π, formulate de E.Buckingham în anul 1915, numărul grupurilor dimensionale independente, care pot fi folosite pentru descrierea unui fenomen ce depinde de n variabile, este egal cu $n-r$, unde r este numărul mărimilor fundamentale.

În cazul fenomenelor mecanice $r=3$. Aceste trei mărimi fundamentale pot fi alese arbitrar, reieșind din considerente de comoditate. Spre exemplu, sistemul de unități MLT.

Însă există şi posibilitatea de a alege în calitate de mărimi fundamentale oricare trei constante fizice universale independente. Constantele fizice universale se consideră independente, dacă din aceste constante alese nu se poate alcătui nicio combinație adimensională.

După o analiză au fost alese cinci constante fizice fundamentale: *ħ, e′, G, c, m_e*.

Sistemul antropologic artificial MLT poate fi înlocuit cu sisteme de unități formate din trei constante fizice fundamentale. Din cele zece sisteme din constante fizice fundamentale există două (*e′, ħ, c*) şi (*G, m_e, e′*), din care nu se pot alcătui niciun fel de mărimi fizice cu dimensie. Aceste sisteme definesc mărimi adimensionale: constanta structurii fine $\alpha = \frac{e'^2}{\hbar c} \cong \frac{1}{137}$, care determină intensitatea interacţiunii electromagnetice şi mărimea adimensională $\frac{e'^2}{Gm_e}$, care arată de câte ori interacţiunea electromagnetică este mai puternică decât cea gravitaţională (de $\sim 10^{38}$ori).

În unele cazuri aplicarea teoremei π permite prezicerea unor dependențe (independente) dintre mărimile fizice fără a intra în raționamente concrete [2]. Exemplificăm.

<u>*Exemplul 1*: Reieșind din considerente dimensionale, de stabilit dependenţa perioadei de oscilație (T) a pendulului gravitaţional şi a celui elastic de parametrii fizici ai lor</u>.

Rezolvare:

a) <u>*Pendulul gravitațional*</u>.

Perioada de oscilație poate depinde de masa (*m*) şi lungimea lui (*l*), precum şi de acceleraţia căderii libere (*g*):

$T = T(l; g; m);\ T = c_1 \cdot l^\alpha \cdot g^\beta \cdot m^\gamma;\ [T] = [l]^\alpha \cdot [g]^\beta \cdot [m]^\gamma;$

unde c_1 – un coeficient de proporţionalitate adimensional, care poate fi găsit experimental sau dintr-un model teoretic. Substituim dimensiunile acestor mărimi:

$$\left.\begin{array}{l}(L): 0 = \alpha + \beta \\ (M): 0 = \gamma \\ (T): 1 = -2\beta\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 1/2 \ \ : (l) \\ \beta = -1/2 : (g) \\ \gamma = 0 \qquad : (\mathrm{m})\end{cases}$$

$[T] = T;\ \ [l] = L;\ \ [g] = LT^{-2};\ \ [m] = M;\qquad T = L^\alpha \cdot (LT^{-2})^\beta \cdot M^\gamma;$

Deci perioada nu poate depinde de masa pendulului:

$$T = c_1\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

b) <u>*Pendulul elastic*</u>.

Perioada de oscilaţie poate depinde de masa (*m*) şi coeficientul lui de elasticitate (*k*), precum şi de acceleraţia căderii libere (*g*):

$T = T(k; g; m);\quad T = c_2 \cdot k^\alpha \cdot g^\beta \cdot m^\gamma;\quad [T] = [k]^\alpha \cdot [g]^\beta \cdot [m]^\gamma;$

unde c_2 – un coeficient de proporţionalitate adimensional, care poate fi găsit experimental sau dintr-un model teoretic. Dimensiunile acestor mărimi:

$$\left.\begin{array}{l}(L): 0=\beta \\ (M): 0=\alpha+\gamma\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}\alpha=-1/2 & :(k) \\ \beta=0 & :(g)\end{array}\right.$$

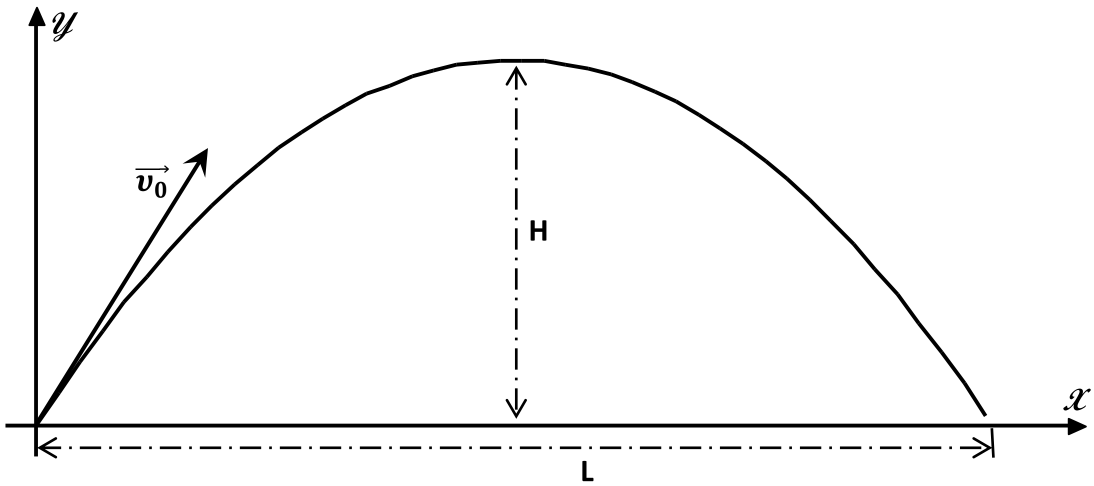

Figura 1. Traiectoria corpului aruncat sub un unghi față de orizont.

$[T]=T$; $[k]=MT^{-2}$; $[g]=LT^{-2}$; $[m]=M$; $T=(MT^{-2})^{\alpha}\cdot(LT^{-2})^{\beta}\cdot M^{\gamma}$;

Deci perioada nu poate depinde de acceleraţia căderii libere (ceasornicul mecanic cu arc merge corect şi pe Pămâmt, şi pe Lună, şi în nava cosmică):

$$T=c_2\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Astfel, învăţătorului nu-i rămâne decât să demonstreze că $c_1=c_2=2\pi$.

Se observă că mărimile MLT sunt mărimi scalare. Apare o întrebare: de unde apar mărimile vectoriale în fizică? Din cele trei dimensii MLT numai una (L) poate fi extinsă pe tot spaţiul. Introducem trei feluri de unități de lungime pe axele OX, OY, OZ: $L_1=m_1$; $L_2=m_2$; $L_3=m_3$ $(i=\overline{1;3}=x,y,z)$.

Esenţa metodei poate fi mai uşor elucidată printr-un exemplu concret.

Exemplul 2: Fie că un corp este lansat de la suprafaţa Pământului cu viteza $\vec{v_0}$, care formează un unghi α cu orizontul. De determinat înălţimea maximă H şi bătaia L după lansarea corpului, reieşind doar din considerente dimensioname.

Rezolvare:

Alegem sistemul de coordonate cu originea O în locul de lansare, cu axa OX orizontală şi OY – verticală, astfel încât viteza iniţială să se afle în planul de coordonate XOY.

Vom determina H și L reieșind din considerente dimensionale:

$$L=L(v_{ox};v_{oy};g), \qquad L=c_1\cdot v_{ox}{}^{\beta}\cdot v_{oy}{}^{\gamma}\cdot g^{\theta},$$

unde c_1 – un coeficient de proporţionalitate, care poate fi găsit experimental sau dintr-un model teoretic.

Dimensiunile mărimilor din problemă sunt:

$$[v_{ox}]=L_1T^{-1}; \qquad [v_{oy}]=L_2T^{-1};$$

$$[g] = L_2T^{-2}; \qquad [L] = L_1;$$

unde L_1, L_2 – unităţile de lungime (metru) pe axele OX şi OY respectiv.

În baza teoremei π egalăm exponenţii puterilor aceloraşi unităţi:

$$[L] = [v_{ox}]^\beta [v_{oy}]^\gamma [g]^\theta.$$

Substituind dimensiunile mărimilor respective, obţinem un sistem de ecuaţii pentru exponenţii β, γ şi θ:

$$L_1 = (L_1T^{-1})^\beta \cdot (L_2T^{-1})^\gamma \cdot (L_2T^{-2})^\theta$$

$$\left.\begin{array}{l}(L_1): 1 = \beta \\ (L_2): 0 = \gamma + \theta \\ (T): 0 = \beta + \gamma + 2\theta\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = 1: (v_{ox}) \\ \gamma = 1: (v_{0y}) \\ \theta = -1: (\mathrm{g})\end{cases}$$

$$L = c_1 \cdot v_{0x}^{\ 1} \cdot v_{0y}^{\ 1} \cdot g^{-1} = c_1 \frac{v_0 cos\alpha \cdot v_0 sin\alpha}{g} = c_1 \frac{v_0^2 sin2\alpha}{2g}, \qquad (c_1 = 2).$$

Pentru înălţimea maximală:

$$H = H(v_{ox}; v_{oy}; g)$$

$$H = c_2 \cdot {v_{ox}}^\beta \cdot {v_{oy}}^\gamma \cdot g^\theta.$$

În baza teoremei π egalăm exponenţii puterilor aceloraşi unităţi:

$$[H] = [v_{ox}]^\beta [v_{oy}]^\gamma [g]^\theta.$$

Dimensiunea: $[H] = L_2$. Substituind dimensiunile mărimilor respective, obţinem un alt sistem de ecuaţii pentru exponenţii β, γ şi θ:

$$L_2 = (L_1T^{-1})^\beta \cdot (L_2T^{-1})^\gamma \cdot (L_2T^{-2})^\theta$$

$$\left.\begin{array}{l}(L_1): 0 = \beta \\ (L_2): 1 = \gamma + \theta \\ (T): 0 = \beta + \gamma + 2\theta\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = 0: (v_{ox}) \\ \gamma = 2: (v_{0y}) \\ \theta = -1: (\mathrm{g})\end{cases}$$

$$H = c_2 \cdot v_{0x}^{\ 0} \cdot v_{0y}^{\ 2} \cdot g^{-1} = c_2 \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{g}, \qquad (c_2 = 1/2).$$

Astfel, folosind doar metoda analizei dimensionale, a fost posibil de a determina dependenţele căutate.

În cazul când numărul de variabile este mai mare decât trei, rămâne un grad de incertitudine pentru celelalte mărimi şi în aşa caz „disperat” metoda analizei dimensionale ne ajută. Exemplificăm.

Exemplul 3: De determinat prin metoda analizei dimensionale forţa de rezistenţă, care acţionează asupra unui corp care se mişcă într-un lichid sau gaz.

Rezolvare:

La mişcarea unui corp într-un lichid sau gaz asupra lui acţionează o forţă de rezistenţă (F). Această forţă trebuie să depindă în caz general de viteza corpului (υ), aria secţiunii midship a lui (S), densitatea (ρ) şi viscozitatea dinamică a lichidului (η):

$$F = F(\rho; S; \eta; v).$$

Aplicând teorema π, scriem relaţia pentru forţa de rezistenţă în forma:

$$F = c \cdot \rho^{\alpha} \cdot S^{\beta} \cdot \eta^{\gamma} \cdot \upsilon^{\theta}, \qquad [F] = [\rho]^{\alpha} \cdot [S]^{\beta} \cdot [\eta]^{\gamma} \cdot [\upsilon]^{\theta}.$$

Aceste mărimi au următoarele dimensiuni:

$$[F] = LMT^{-2}; \quad [\rho] = ML^{-3}; \quad [S] = L^2; \quad [\eta] = ML^{-1}T^{-1}; \quad [\upsilon] = LT^{-1}.$$

Substituind dimensiunile mărimilor respective, obţinem un sistem de ecuaţii pentru exponenţii α, β, γ şi θ:

$$LMT^{-2} = (ML^{-3})^{\alpha} \cdot (L^2)^{\beta} \cdot (ML^{-1}T^{-1})^{\gamma} \cdot (LT^{-1})^{\theta},$$

$$\left.\begin{array}{l} (L):\ 1 = -3\alpha + 2\beta - \gamma + \theta \\ (M): 1 = \alpha + \gamma \\ (T):\ 2 = \gamma + \theta \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} \alpha = \theta - 1 & :(\rho) \\ \beta = \frac{1}{2}\theta & :(S) \\ \gamma = 2 - \theta & :(\eta) \\ \theta \in R & :(\upsilon) \end{array}\right.$$

Substituind, obţinem:

$$F = c\frac{\eta^2}{\rho}\left(\frac{\upsilon\rho\sqrt{S}}{\eta}\right)^{\theta}.$$

Dacă notăm:

$$\upsilon_0 = \frac{\eta}{\rho\sqrt{S}},$$

atunci obţinem:

$$F = c\frac{\eta^2}{\rho}\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)^{\theta}.$$

Valoarea coeficientului de proporţionalitate se determină experimental pentru fiecare caz concret aparte (poate depinde esenţial de θ: $c = c(\theta)$). Iar υ_0 este un parametru al problemei cu dimensiunea vitezei determinat de proprietăţile mediului şi dimensiunile liniare ale corpului în mişcare. Spre exemplu, pentru un corp cu dimensiuni de ordinul 0,1m valoarea acestui parametru va fi: $10^{-5} m/s$ (în apă); $14{,}4 \cdot 10^{-5} m/s$ (în aer); $1182 \cdot 10^{-5} m/s$ (în glicerină); $88 \cdot 10^{-5} m/s$ (în ulei de măsline). Se poate presupune că acest parametru reprezintă o valoare a vitezei, până la care forța nu depinde practic de viteză. Observăm că aceste valori sunt extrem de mici pentru o diversitate mare de medii. Deci dependenţa forţei de viteză se manifestă odată cu începutul mişcării. Astfel, se poate considera că întotdeauna se respectă condiţia $\frac{\upsilon}{\upsilon_0} \gg 1$.

Forma dependenţei forţei de viteză e determinată de exponenta θ. Dacă $\theta = 0$, atunci forţa nu depinde nici de viteză corpului, nici de dimensiunile lui liniare:

$$F = c(0)\frac{\eta^2}{\rho}.$$

Dacă $\theta = 1$, atunci forţa depinde liniar de viteză corpului şi nu poate depinde de densitatea lichidului:

$$F = c(1)\eta\sqrt{S}\upsilon.$$

Am obţunut formula lui Stokes.

Dacă $\theta = 2$, atunci forţa depinde parabolic de viteză corpului şi nu poate depinde de viscozitatea lichidului:

$$F = c(2)S\rho v^2.$$

Această relaţie este bine cunoscută şi se foloseşte la viteze mari.

Observăm că, într-adevăr, relaţia (1) descrie perfect aceste cazuri cunoscute şi nu interzice alte forme ale dependenţei forţei de viteză. Spre exemplu, se poate admite $\theta = 3/2$ şi atunci:

$$F = c(3/2) \cdot S^{3/4} \cdot \sqrt{\eta\rho} \cdot v^{3/2}.$$

Comparând acest rezultat cu cele precedente, se poate presupune că trebuie să existe un aşa interval de viteze pentru care avem $F \sim v^{3/2}$; $F \sim \sqrt{\eta\rho}$. Acetse dependenţe se vor realiza atunci când are loc relaţia $c(3/2) = \sqrt{c(1)c(2)}$.

Menţionăm că această metodă ne permite să rezolvăm un şir de probleme care nu pot fi rezolvate prin alte metode. Spre exemplu, cum depinde forţa de rezistenţă de viteza corpului, dacă această forţă: a) nu depinde de dimensiunile obiectului; b) nu depinde de densitatea lichidului; c) nu depinde de viscozitatea lichidului; d) este proporţională cu $\sqrt{\eta\rho}$ et al.

Exemplul 4: Aplicând analiza dimensională, de estimat înălţimea la care se ridică un lichid aderent printr-un capilar de diametrul ***d*****.**

Rezolvare:

Înălţimea, la care se ridică lichidul aderent într-un capilar, va depinde, evident, de coeficientul de tensiune superficială a lichidului (σ), de densitatea lichidului (ρ), acceleraţia căderii libere (g), diametrul capilarului (d). Astfel:

$$h = h(\sigma; \rho; g; d)$$

Aplicând teorema π, scriem relaţia pentru forţa de rezistenţă în forma:

$$h = c^* \cdot \sigma^\alpha \cdot \rho^\beta \cdot g^\gamma \cdot d^\theta.$$

$$[h] = [\sigma]^\alpha \cdot [\rho]^\beta \cdot [g]^\gamma \cdot [d]^\theta.$$

Aceste mărimi au următoarele dimensiuni:

$$[h] = L;\ [\sigma] = MT^{-2};\ [\rho] = ML^{-3};\ [g] = LT^{-2};\ [d] = L.$$

Substituind dimensiunile mărimilor respective, obţinem un sistem de ecuaţii pentru exponenţii α, β, γ şi θ:

$$L = (MT^{-2})^\alpha \cdot (ML^{-3})^\beta \cdot (LT^{-2})^\gamma \cdot (L)^\theta,$$

$$\left.\begin{aligned} (L)&: 1 = -3\beta + \gamma + \theta \\ (M)&: 0 = \alpha + \beta \\ (T)&: 0 = 2\alpha + 2\gamma \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha & :(\rho) \\ \gamma = -\alpha & :(g) \\ \theta = 1 - 2\alpha & :(d) \\ \alpha \in R & :(\sigma) \end{cases}$$

Substituind, obţinem:

$$h = c^* \cdot \sigma^\alpha \cdot \rho^{-\alpha} \cdot g^{-\alpha} \cdot d^{1-2\alpha}.$$

Transformăm:

$$h = c \cdot d \cdot \left(\frac{4 \cdot \sigma}{\rho \cdot g \cdot d^2}\right)^{\alpha}.$$

Coeficientul de proporționalitate c poate fi determinat experimental sau efectuând calcule în limitele unui model al capilarului. Să analizăm acest rezultat acordând diferite valori lui α.

Dacă $\alpha = 1$, atunci se obţine formula cunoscută (Jurin):

$$h = \frac{4 \cdot \sigma}{\rho \cdot g \cdot d};$$

În modelul Jurin al capilarului $c = 1$. Estimând în acest model diametrul capilarului, la care înălţimea de ridicare a sevei în el să fie de $\sim 100m$ (eucaliptul), obţinem $d \approx 0{,}3\mu m$. Capilare cu aşa diametru nu există. Deci acest model nu poate fi aplicat pentru a explica ridicarea sevei în arbori.

Dacă $\alpha = 2$, atunci:

$$h = \left(\frac{4 \cdot \sigma}{\rho \cdot g}\right)^2 \cdot \frac{1}{d^3}.$$

Estimând în acest model diametrul capilarului în cazul eucaliptului, obţinem $d \approx 0{,}3mm$. Acest rezultat e mult mai aproape de realitate.

Observăm că dacă $\alpha = 1/2$, atunci înălţimea h nu depinde de diametrul capilarului:

$$h = \sqrt{\frac{4 \cdot \sigma}{\rho \cdot g}}.$$

Estimând, obţinem $h \sim 1mm$, ce corespunde cazului unui diametru mare (efectele superficiale de aderenţă se manifestă foarte puţin şi numai lângă pereţii vasului mare indiferent de dimensiunile lui).

Este clar că posibilităţile metodei analizei dimensionale sunt limitate. Chiar dacă avem un număr de mărimi fizice suficient pentru a forma un număr adimensional, trebuie de clarificat de la început sunt oare esenţiale aceste mărimi şi în ce măsură.

Aceste exemple şi multe altele demonstrează că metoda analizei dimensionale este una foarte utilă şi poate fi aplicată la rezolvarea prealabilă a problemei, la verificarea rezultatului final, la prezicerea dependenţelor în cazul când numărul de parametri este mai mare decât trei şi la cercetarea diferitor cazuri particulare.

Sperăm că materialul expus va fi de folos la instruirea preuniversitară și chiar cea universitară.

Bibliografie:

1. Бриджмен П. Анализ размерностей. Ижевск: РХД, 2001.
2. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. Москва: Наука, 1977.