APLICAREA LOGICII MATEMATICE LA REZOLVAREA UNOR ECUAȚII, INECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII, INECUAȚII ÎN CURSUL LICEAL DE MATEMATICĂ

Andrei HARITON, prof. univ., dr.

Laurențiu CALMUȚCHI, prof. univ., dr. hab.

Catedra DMFI, Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. Elementele de logică matematică și teoria mulțimilor au pătruns simțitor în curriculumul școlar de matematică, începând cu clasele I-IV. Concepția logico-mulțime a contribuit la predarea - învățarea - evaluarea mult mai efectivă a matematicii în gimnaziu și liceu. Este însă evident că perspectiva concepției logico-mulțime spre sporirea rezultatelor școlare la matematică este foarte mare. În acest articol se deschid noi posibilități de utilizare a concepției logico-mulțime.

Cuvinte cheie: ecuație, inecuație, concepție, algoritm, metodologie.

APPLICATION OF MATHEMATICAL LOGIC IN SOLVING OF SOME EQUATION, INEQUALITIES, SYSTEM OF EQUATION AND INEQUALITIES IN THE COURSE OF MATHEMATICS LYCEUM

Abstract. Elements of mathematical logic and sets theory have entered significantly in the mathematics school curriculum beginning with primary classes. The logic-set conception has contributed to more effective teaching-learning-evaluation of mathematics in gymnasium and lyceum. It is obvious that the perspective of the logic-set conception in increasing the mathematical school results is very great. This paper opens new possibilities in using the logic-set conception.

Key-words: equation, inequality, conception, algorithm, metodology.

În didactica matematicii este bine cunoscută metoda intervalelor ce se aplică la rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor [1], [2]. În manualul [2], pagina 107, este expus algoritmul aplicării metodei intervalelor la rezolvarea inecuațiilor raționale. Acest algoritm conține 7 etape (pași). Se ilustrează aplicarea acestei metode prin rezolvarea unor exemple. În continuare, în pagina 109 a manualului [2] se explică aplicarea metodei intervalelor la rezolvarea în R a inecuației $x^2 - 7x - 12 \leq 0$. La pagina 111 a manualului [2] se aplică metoda intervalelor la rezolvarea în R a ecuației cu modul: $|2x - 1| - -3|x + 3| = 2x$. Continuând aplicarea metodei intervalelor, în manualul [2], pagina 112, autorii manualului ilustrează aplicarea metodei intervalelor la rezolvarea unei inecuații cu modul: $2|x - 1| + |x - 2| \leq 3$. Aici, manualul repetă, de asemenea, algoritmul aplicării metodei intervalelor. În continuare, pe paginile manualului [2], se repetă din nou algoritmul ce ține de metoda intervalelor la rezolvarea sistemelor de inecuații cu o necunoscută și la rezolvarea totalităților de inecuații cu o necunoscută. La pagina 111 a manualului [2] citim: „O argumentare fundamentală a metodei intervalelor va fi prezentată în clasa a XI-a”.

Din cele spuse în manualul [2] cu privire la metoda intervalelor rezultă:

a) *Metoda intervalelor în manualul [2] este utilizată neargumentat.*

b) *Metoda intervalelor se argumentează de fiecare dată din nou, când urmează a fi aplicată la o situație nouă.*
Această situație este incompatibilă cu studierea în clasa a X-a a elementelor de logică matematică.

În continuare vom expune rezolvarea unor ecuații, sisteme de ecuații, inecuații și sisteme de inecuații, utilizând elementele de logică matematică. Apropo, tema numită a fost abordată de noi și în alte publicații, în particular vezi monografia [3], paginile 112-120. Metoda logică de rezolvare, utilizată în loc de metoda intervalelor, nu apelează direct la axa numerică, ci se bazează pe noțiunea de predicat logic, pe operațiile logice cu predicate și alte noțiuni logice elementare.

Exemplul 1. Rezolvați prin metoda logică ecuația

$$|x+1|-|x-3|-|x-2|=-5$$

Rezolvare:

$$\begin{array}{l|l}
000 & (x+1<0)(x-3<0)(x-2<0) \Leftrightarrow (x<-1)(x<3)(x<2) \Leftrightarrow \\
 & \quad x<-1 \\
001 & (x+1<0)(x-3<0)(x-2\ge 0) \Leftrightarrow (x<-1)(x<3)(x\ge 2) \Leftrightarrow \emptyset \\
010 & (x+1<0)(x-3\ge 0)(x-2<0) \Leftrightarrow (x<-1)(x\ge 3)(x<2) \Leftrightarrow \emptyset \\
011 & (x+1<0)(x-3\ge 0)(x-2\ge 0) \Leftrightarrow (x<-1)(x\ge 3)(x\ge 2) \Leftrightarrow \emptyset \\
100 & (x+1\ge 0)(x-3<0)(x-2<0) \Leftrightarrow (x\ge -1)(x<3)(x<2) \Leftrightarrow \\
 & \quad -1\le x<2 \\
101 & (x+1\ge 0)(x-3<0)(x-2\ge 0) \Leftrightarrow (x\ge -1)(x<3)(x\ge 2) \Leftrightarrow \\
 & \quad 2\le x<3 \\
110 & (x+1\ge 0)(x-3\ge 0)(x-2<0) \Leftrightarrow (x\ge -1)(x\ge 3)(x<2) \Leftrightarrow \emptyset \\
111 & (x+1\ge 0)(x-3\ge 0)(x-2\ge 0) \Leftrightarrow (x\ge -1)(x\ge 3)(x\ge 2) \Leftrightarrow x\ge 3.
\end{array}$$

$$|x+1|-|x-3|-|x-2|=-5 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} -x-1+x-3+x-2=-5 \\ x<-1 \end{cases} \\
\begin{cases} 3x+1=0 \\ -1\le x<2 \end{cases} \\
\begin{cases} x=-5 \\ 2\le x<3 \end{cases} \\
\begin{cases} -x=-11 \\ x\ge 3 \end{cases}
\end{array}\right.
\Leftrightarrow
\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} x=1 \\ x<-1 \end{cases} \\
\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ -1\le x<2 \end{cases} \\
\begin{cases} x=-5 \\ 2\le x<3 \end{cases} \\
\begin{cases} x=11 \\ x\ge 3 \end{cases}
\end{array}\right.
\Leftrightarrow
\left[\begin{array}{l}
\emptyset \\
x=-\frac{1}{3} \\
\emptyset \\
x=11
\end{array}\right.
\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\tfrac{1}{3} \vee x=11.$$

Exemplul 2. Rezolvați prin metoda logică inecuația

$$|x^2-5x+6|+|x^2+3x-4|\le 7.$$

Rezolvare: $|x^2-5x+6|+|x^2+3x-4|\le 7 \Leftrightarrow |x-3||x-2|+|x-1||x+4|\le 7.$

0000 $(x-3<0)(x-2<0)(x-1<0)(x+4<0)$
$\Leftrightarrow (x<3)(x<2)(x<1)(x<-4) \Leftrightarrow x<-4$

0001 $(x-3<0)(x-2<0)(x-1<0)(x+4\geq 0)$
$\Leftrightarrow (x<3)(x<2)(x<1)(x\geq -4) \Leftrightarrow -4\leq x<1$

0010 $(x-3<0)(x-2<0)(x-1\geq 0)(x+4<0)$
$\Leftrightarrow (x<3)(x<2)(x\geq 1)(x<-4) \Leftrightarrow \emptyset$

0011 $(x-3<0)(x-2<0)(x-1\geq 0)(x+4\geq 0)$
$\Leftrightarrow (x<3)(x<2)(x\geq 1)(x\geq -4) \Leftrightarrow 1\leq x<2$

0100 $(x-3<0)(x-2\geq 0)(x-1<0)(x+4<0)$
$\Leftrightarrow (x<3)(x\geq 2)(x<1)(x<-4) \Leftrightarrow \emptyset$

0101 $(x-3<0)(x-2\geq 0)(x-1<0)(x+4\geq 0) \Leftrightarrow$
$(x<3)(x\geq 2)(x<1)(x\geq -4) \Leftrightarrow \emptyset$

0110 $(x-3<0)(x-2\geq 0)(x-1\geq 0)(x+4<0) \Leftrightarrow$
$(x<3)(x\geq 2)(x\geq 1)(x<-4) \Leftrightarrow \emptyset$

0111 $(x-3<0)(x-2\geq 0)(x-1\geq 0)(x+4\geq 0)$
$\Leftrightarrow (x<3)(x\geq 2)(x\geq 1)(x\geq -4) \Leftrightarrow 2\leq x<3$

1000 $(x-3\geq 0)(x-2<0)(x-1<0)(x+4<0) \Leftrightarrow$
$(x\geq 3)(x<2)(x<1)(x<-4) \Leftrightarrow \emptyset$

1001 $(x-3\geq 0)(x-2<0)(x-1<0)(x+4\geq 0)$
$\Leftrightarrow (x\geq 3)(x<2)(x<1)(x\geq -4) \Leftrightarrow \emptyset$

1010 $(x-3\geq 0)(x-2<0)(x-1\geq 0)(x+4<0)$
$\Leftrightarrow (x\geq 3)(x<2)(x\geq 1)(x<-4) \Leftrightarrow \emptyset$

1011 $(x-3\geq 0)(x-2<0)(x-1\geq 0)(x+4\geq 0) \Leftrightarrow$
$(x\geq 3)(x<2)(x\geq 1)(x\geq -4) \Leftrightarrow \emptyset$

1100 $(x-3\geq 0)(x-2\geq 0)(x-1<0)(x+4<0)$
1101 $\Leftrightarrow (x\geq 3)(x\geq 2)(x<1)(x<-4) \Leftrightarrow \emptyset$
$(x-3\geq 0)(x-2\geq 0)(x-1<0)(x+4\geq 0)$
$\Leftrightarrow (x\geq 3)(x\geq 2)(x<1)(x\geq -4) \Leftrightarrow \emptyset$

1110 $(x-3\geq 0)(x-2\geq 0)(x-1\geq 0)(x+4<0) \Leftrightarrow$
$(x\geq 3)(x\geq 2)(x\geq 1)(x<-4) \Leftrightarrow \emptyset$

1111 $(x-3\geq 0)(x-2\geq 0)(x-1\geq 0)(x+4\geq 0)$
$\Leftrightarrow (x\geq 3)(x\geq 2)(x\geq 1)(x\geq -4) \Leftrightarrow x\geq 3$

$$|x^2-5x+6|+|x^2+3x-4|\leq 7 \Leftrightarrow |x-3||x-2|+|x-1||x+4|\leq 7 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-4 \\ (3-x)(2-x)+(1-x)(-x-4)\le 7\end{cases}\\ \begin{cases} -4\le x<1 \\ (3-x)(2-x)+(1-x)(x+4)\le 7\end{cases}\\ \begin{cases} 1\le x<2 \\ (3-x)(2-x)+(x-1)(x+4)\le 7\end{cases}\\ \begin{cases} 2\le x<3 \\ (3-x)(x-2)+(x-1)(x+4)\le 7\end{cases}\\ \begin{cases} x\ge 3 \\ (x-3)(x-2)+(x-1)(x+4)\le 7\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-4 \\ (x-3)(x-2)+(x-1)(x+4)\le 7\end{cases}\\ \begin{cases} -4\le x<1 \\ (3-x)(2-x)+(1-x)(x+4)\le 7\end{cases}\\ \begin{cases} 1\le x<2 \\ (3-x)(2-x)+(x-1)(x+4)\le 7\end{cases}\\ \begin{cases} 2\le x<3 \\ (3-x)(x-2)+(x-1)(x+4)\le 7\end{cases}\\ \begin{cases} 3\le x \\ (x-3)(x-2)+(x-1)(x+4)\le 7\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-4 \\ x^2-5x+6+x^2+3x-4\le 7\end{cases}\\ \begin{cases} -4\le x<1 \\ x^2-5x+6-x^2-3x+4\le 7\end{cases}\\ \begin{cases} 1\le x<2 \\ x^2-5x+6+x^2+3x-4\le 7\end{cases}\\ \begin{cases} 2\le x<3 \\ -x^2+5x-6+x^2+3x-4\le 7\end{cases}\\ \begin{cases} 3\le x \\ x^2-5x+6+x^2+3x-4\le 7\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-4 \\ 2x^2-2x-5\le 0\end{cases}\\ \begin{cases} -4\le x<1 \\ -8x+3\le 0\end{cases}\\ \begin{cases} 1\le x<2 \\ 2x^2-2x-5\le 0\end{cases}\\ \begin{cases} 2\le x<3 \\ 8x-17\le 0\end{cases}\\ \begin{cases} 3\le x \\ 2x^2-2x-5\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \emptyset \\ \emptyset \\ 1\le x<2 \\ 2\le x<17/8 \\ \emptyset \end{array}\right. \Leftrightarrow 1\le x<\frac{17}{8}.$$

Exemplul 3. Rezolvați prin metoda logică sistemul de inecuații

$$\begin{cases} \dfrac{2}{|x-2|} > \left|\dfrac{-3}{2x-1}\right|, \\ |x^3-x| \le x\,. \end{cases}$$

Observații: **a)** Din prima inecuație a sistemului dat rezultă $x \neq 0$.

b) Din a doua inecuație a sistemului dat rezultă $x \geq 0$.

c) Din observațiile a) și b) rezultă $x > 0$.

d) În temeiul observațiilor precedente rezultă:

$$\begin{cases} \frac{2}{|x-2|} > \left|\frac{-3}{2x-1}\right|, \\ |x^3-x| \le x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{|x-2|} > \frac{3}{|2x-1|}, \\ |x^2-1| \le 1. \end{cases}$$. DVA : $x > 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq 2$.

Vom examina transformările identice ale sistemului în dependență de valorile de adevăr a predicatelor componente: $x-2, 2x-1, x-1, x+1$.

1111	$(x-2>0)(2x-1>0)(x-1\ge 0)(x+1>0) \Leftrightarrow$ $(x>2)\left(x>\dfrac{1}{2}\right)(x\ge 1)(x>-1) \Leftrightarrow x>2$

1110	$(x-2>0)(2x-1>0)(x-1\geq 0)(x+1<0) \Leftrightarrow$ $(x>2)\left(x>\frac{1}{2}\right)(x\geq 1)(x<-1) \Leftrightarrow \emptyset$
1101	$(x-2>0)(2x-1>0)(x-1<0)(x+1>0) \Leftrightarrow$ $(x>2)\left(x>\frac{1}{2}\right)(x<1)(x>-1) \Leftrightarrow \emptyset$
1100	$(x-2>0)(2x-1>0)(x-1<0)(x+1<0) \Leftrightarrow$ $(x>2)\left(x>\frac{1}{2}\right)(x<1)(x<-1) \Leftrightarrow \emptyset$
1011	$(x-2>0)(2x-1<0)(x-1\geq 0)(x+1>0) \Leftrightarrow$ $(x>2)\left(x<\frac{1}{2}\right)(x\geq 1)(x>-1) \Leftrightarrow \emptyset$
1010	$(x-2>0)(2x-1<0)(x-1\geq 0)(x+1<0) \Leftrightarrow$ $(x>2)\left(x<\frac{1}{2}\right)(x\geq 1)(x<-1) \Leftrightarrow \emptyset$
1001	$(x-2>0)(2x-1<0)(x-1<0)(x+1>0) \Leftrightarrow$ $(x>2)\left(x<\frac{1}{2}\right)(x<1)(x>-1) \Leftrightarrow \emptyset$
1000	$(x-2>0)(2x-1<0)(x-1<0)(x+1<0) \Leftrightarrow$ $(x>2)\left(x<\frac{1}{2}\right)(x<1)(x<-1) \Leftrightarrow \emptyset$
0111	$(x-2<0)(2x-1>0)(x-1\geq 0)(x+1>0) \Leftrightarrow$ $(x<2)\left(x>\frac{1}{2}\right)(x\geq 1)(x>-1) \Leftrightarrow 1\leq x<2$
0110	$(x-2<0)(2x-1>0)(x-1\geq 0)(x+1<0) \Leftrightarrow$ $(x<2)\left(x>\frac{1}{2}\right)(x\geq 1)(x<-1) \Leftrightarrow \emptyset$
0101	$(x-2<0)(2x-1>0)(x-1<0)(x+1>0) \Leftrightarrow$ $(x<2)\left(x>\frac{1}{2}\right)(x<1)(x>-1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<1$
0100	$(x-2<0)(2x-1>0)(x-1<0)(x+1<0) \Leftrightarrow$ $(x<2)\left(x>\frac{1}{2}\right)(x<1)(x<-1) \Leftrightarrow \emptyset$
0011	$(x-2<0)(2x-1<0)(x-1\geq 0)(x+1>0) \Leftrightarrow$ $(x<2)\left(x<\frac{1}{2}\right)(x\geq 1)(x>-1) \Leftrightarrow \emptyset$
0010	$(x-2<0)(2x-1<0)(x-1\geq 0)(x+1<0) \Leftrightarrow$ $(x<2)\left(x<\frac{1}{2}\right)(x\geq 1)(x<-1) \Leftrightarrow \emptyset$
0001	$(x-2<0)(2x-1<0)(x-1<0)(x+1>0) \Leftrightarrow$ $(x<2)\left(x<\frac{1}{2}\right)(x<1)(x>-1) \Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{2}$
0000	$(x-2<0)(2x-1<0)(x-1<0)(x+1<0) \Leftrightarrow$ $(x<2)\left(x<\frac{1}{2}\right)(x<1)(x<-1) \Leftrightarrow \emptyset$

Vom rezolva sistemul dat de inecuații cu modul pentru fiecare din cele 4 cazuri obținute prin aplicarea metodei logice.

Pentru $x > 2$: $\begin{cases} \frac{2}{|x-2|} > \frac{3}{|2x-1|} \\ |x^2-1| \le 1 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x-2} > \frac{3}{2x-1} \\ x^2-1 \le 1 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2 > 3x-6 \\ x^2 \le 2 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x \le \sqrt{2} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\emptyset$.

Pentru $1 \le x < 2$: $\begin{cases} \frac{2}{|x-2|} > \frac{3}{|2x-1|} \\ |x^2-1| \le 1 \\ 1 \le x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{2-x} > \frac{3}{2x-1} \\ x^2-1 \le 1 \\ 1 \le x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2 > 6-3x \\ x^2 \le 2 \\ 1 \le x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 7x > 8 \\ x \le \sqrt{2} \\ 1 \le x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{8}{7} < x < \sqrt{2}$.

Pentru $\frac{1}{2} < x < 1$: $\begin{cases} \frac{2}{|x-2|} > \frac{3}{|2x-1|} \\ |x^2-1| \le 1 \\ \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{2-x} > \frac{3}{2x-1} \\ 1-x^2 \le 1 \\ \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2 > 6-3x \\ 1-x^2 \le 1 \\ \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 7x > 8 \\ -x^2 \le 0 \\ \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{8}{7} \\ x \ge 0 \\ \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$.

Pentru $0 < x < \frac{1}{2}$: $\begin{cases} \frac{2}{|x-2|} > \frac{3}{|2x-1|} \\ |x^2-1| \le 1 \\ 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{2-x} > \frac{3}{1-2x} \\ 1-x^2 \le 1 \\ 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-4x > 6-3x \\ x^2 \ge 0 \\ 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x < -4 \\ x^2 \ge 0 \\ 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$.

Răspuns: $\frac{8}{7} < x \le \sqrt{2}$.

Observație: La rezolvarea exercițiilor propuse în acest articol, tabelele valorilor de adevăr ale predicatelor pentru $n = 3, n = 4$ au fost expuse complet pentru a ilustra metodologia aplicării logicii matematice în acest caz. Este evident însă că în fiecare caz concret se observă ușor care subcazuri ale tabelului respectiv „dispar”.

Bibliografie

1. Achiri I. ș. a. Matematică, manual pentru clasa a IX-a. Prut Internațional, 2010. 224p.
2. Achiri I. ș. a. Matematică, manual pentru clasa a X-a. Prut Internațional, 2002. 280p.
3. Hariton A. Teoremă, condiție necesară și suficientă. Chișinău: UST, 2007. 145p.
4. Calmuțchi L., Hariton A. Aplicații ale elementelor de logică și mulțimi la rezolvarea ecuațiilor inecuațiilor și sistemelor acestora. În: Revista „Acta et Commentationes”, nr.1(2) 2013, p.81-86.