REZOLVAREA PROBLEMELOR PRIN DIVERSE MODALITĂŢI DIDACTICE

Laurenţiu Calmuţchi, *doctor habilitat, profesor universitar*
Andrei Hariton, *doctor habilitat, profesor universitar*
Universitatea de Stat din Tiraspol

Abstract: *This article stresses the statement that it is more efficient to solve the same problem using different methods, than to solve with pupils several problems using the same method. It analyzes different methods that teachers of mathematics can use while teaching, and emphasizes the fact that they should apply variedl methods to solve one and the very same problem.*

Key words: *problem solving, interval method, logico-symbolic method, graph method, equivalence, logic implication.*

Decât să rezolvăm cu elevii mai multe probleme prin aceeaşi metodă, e mai eficient să rezolvăm una şi aceeaşi problemă prin mai multe metode - afirmaţie care nu este nouă în *Didactica matematicii* [1, p. 162-163], [2, p.151] etc.

Spre regret, acestui adevăr în activitatea profesorilor de matematică din Republica Moldova nu i se acordă, în ultimii ani, o atenţie cuvenită. Această situaţie a fost confirmată de către absolvenţii liceelor din ţară, care au devenit studenţi ai Facultăţii de Fizică, Matematică şi Tehnologii Informaţionale de la Universitatea de Stat din Tiraspol, de către profesorii de matematică, care sosesc la stagiile de formare continuă din cadrul universităţii.

Sondajele efectuate au avut ca obiectiv major *stabilirea motivelor scăderii atenţiei în ceea ce priveşte rezolvarea problemelor prin diverse metode*, ceea ce ne permite formularea unor concluzii:

- programa la matematică pentru ciclul preuniversitar este supraîncărcată;
- numărul insuficient de ore acordat pentru rezolvarea problemelor;
- lipsa unei orientări consecvente în manualele şcolare de matematică în direcţia rezolvării problemelor şi demonstrării teoremelor prin diverse metode;
- examenul de absolvire a gimnaziului/liceului la matematică nu stimulează deloc rezolvarea uneia şi aceleeaşi probleme prin mai multe metode;
- interesul scăzut al elevilor, dar şi al profesorilor faţă de studierea matematicii în învăţământul preuniversitar;
- un rol negativ în aspectul dezvoltării judecăţii logice a elevilor aparţine computerului: mai mulţi elevi „aşteaptă” de la computer nu numai ajutor în domeniul efectuării calculelor numerice, ci şi al judecăţii logice.

Rezolvarea problemelor prin diverse metode nu se efectuează în şcoală atât de des (în general la dezvoltarea logicii elevilor nu se acordă atenţie în procesul studierii matematicii), aceasta o confirmă sondajul realizat în baza unui contingent de 32 de profesori de matematică sosiţi din diverse şcoli ale Republicii Moldova, în aprilie 2010, la cursurile de formare continuă.

Printre problemele propuse în cadrul probei de evaluare la finele cursurilor de formare continuă a fost şi exerciţiul:

Rezolvaţi prin diverse metode inecuaţia $\frac{1}{x^2-5x+6} \le \frac{1}{2}$.

De către cei 32 de profesori au fost propuse 8 metode de rezolvare a inecuaţiei. Astfel, 2 profesori au utilzat 4 metode, 1 profesor – 3 metode, 16 profesori – 2 metode, 13 profesori – 1 metodă. Trebuie semnalat că unii profesori au reacţionat cu nedumerire la condiţia de a rezolva inecuaţia prin intermediul mai multor metode, alegând dintre acestea pe cea mai raţională.

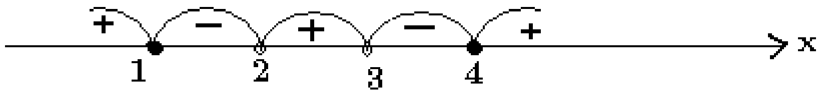
Vom analiza greşelile comise la rezolvarea inecuaţiei propuse, prin aplicarea fiecăreia dintre cele 8 metode utilizate de profesori.

1. Metoda intervalelor, luând ca bază

$\frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)(x-2)(x-3) \ge 0$; DVA: R/ $\{2;3\}$.

$$\frac{1}{x^2-5x+6} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{1}{2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{2-x^2+5x-6}{2(x^2-5x+6)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+5x-4}{x^2-5x+6} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)(x-2)(x-3) \ge 0.$$



R: $x \in (-\infty;1] \cup (2;3) \cup [4;+\infty)$.

Au utilizat această metodă 27 de profesori, dar numai 9 dintre aceştia nu au comis greşeli. Greşelile tipice au fost: nu s-a determinat iniţial DVA al funcţiei $y = x^2 - 5x + 6$, ca numitor al fracţiei $\frac{1}{x^2-5x+6}$, s-au utilizat incorect simbolurile „$\Leftrightarrow$” şi „$\Rightarrow$”.

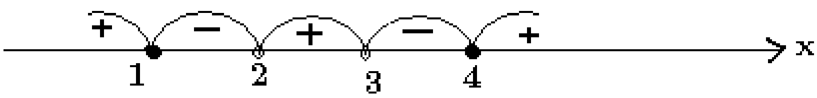
2.Metoda intervalelor, luând ca bază $\frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} > 0 \\ \frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

DVA: R\{2; 3}.

$$\frac{1}{x^2-5x+6} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{1}{2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{2-x^2+5x-6}{2(x^2-5x+6)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+5x-4}{x^2-5x+6} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} > 0 \\ \frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-3)} > 0 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \ge 0.$$



R: $x \in (-\infty;1] \cup (2;3) \cup [4;+\infty)$.

Au utilizat această metodă 27 de profesori, dar numai 9 dintre aceştia nu au comis greşeli. Greşelile tipice au fost: nu s-a determinat DVA al funcţiei $y = x^2 - 5x + 6$, s-au utilizat incorect simbolurile „$\Leftrightarrow$” şi „$\Rightarrow$”.

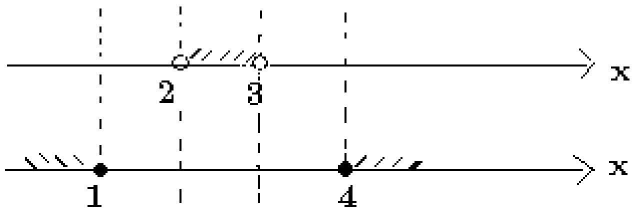
3. Metoda intervalelor, luând ca bază substituţia $x^2 - 5x + 6 = t$.

DVA: R\{2; 3}.

$$\frac{1}{x^2-5x+6} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{x^2-5x+6} \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2-5x+6} \le \frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+6} \Leftrightarrow \frac{2-(x^2-5x+6)}{x^2-5x+6} \le 0 \Leftrightarrow \frac{2-t}{t} \le 0 \Leftrightarrow (2-t)t \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<0 \\ t \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+6<0 \\ x^2-5x+6 \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)(x-3)<0 \\ (x-1)(x-4) \ge 0. \end{array}\right.$$



R: $x \in (-\infty;1] \cup (2;3) \cup [4;+\infty)$.

Au utilizat această metodă două persoane şi ambele au comis greşeli la utilizarea simbolurilor „$\Leftrightarrow$” şi „$\Rightarrow$”. Spre exemplu, $x^2-5x+6=t \Rightarrow \frac{2-t}{t} \le 0$.

4.Metoda intervalelor, luând ca bază substituţia $\frac{1}{x-3}=t$.

DVA: R\{2; 3}.

$$\frac{1}{x^2-5x+6} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)(x-3)} \le \frac{1}{2}; \frac{1}{x-3}=t \Leftrightarrow x-3=\frac{1}{3};\ \ x-2=\frac{1}{t}+1=\frac{1+t}{t}.$$

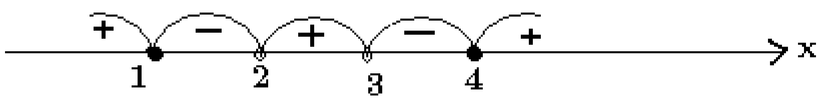
$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{t^2}{1+t} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{t^2}{1+t}-\frac{1}{2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2-t-1}{2(1+t)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(t-1)(t+0{,}5)}{2(1+t)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(t+0{,}5)}{1+t} \le 0 \Leftrightarrow (t+1)(t+0{,}5)(t-1) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{x-3}+1\right)\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x-3}-1\right) \le 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1+x-3}{x-3}\right)\left(\frac{2+x-3}{2(x-3)}\right)\left(\frac{1-x+3}{x-3}\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-1)(4-x)}{2(x-3)^3} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-1)(x-4)}{x-3} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{(x-1)(x-2)(x-4)}{x-3} > 0 \\ \dfrac{(x-1)(x-2)(x-4)}{x-3} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x-2)(x-4)>0 \\ x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$$



R: $x \in (-\infty;1] \cup (2;3) \cup [4;+\infty)$.

A acceptat această metodă o singură persoană, care a admis greşeli la utilizarea incorectă a simbolului „$\Rightarrow$”, a pus condiţiile $t \neq 0, t \neq -1$, condiţii care sunt de prisos.

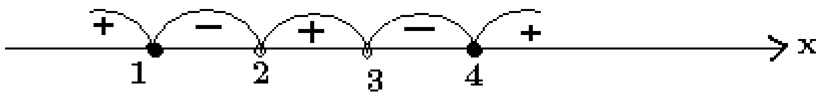
5.Metoda intervalelor (logico-simbolică) utilizând substituţia $x^2 - 5x = a$

DVA: R\{2; 3}.

$$\frac{1}{x^2-5x+6} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a+6} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a+6} - \frac{1}{2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{2-a-6}{2(a+6)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{-a-4}{2(a+6)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+4}{a+6} \ge 0 \Leftrightarrow (a+4)(a+6) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \ge -4 \\ a < -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x \ge -4 \\ x^2-5x < -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+4 \ge 0 \\ x^2-5x+6 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x-4) \ge 0 \\ (x-2)(x-3) < 0. \end{array}\right.$$



R: $x \in (-\infty;1] \cup (2;3) \cup [4;+\infty)$.

Au utilizat această metodă doi profesori, care nu au indicat DVA al funcţiei examinate. Pentru a indica intervalele, o persoană, a folosit proprietăţile trinomului pătrat.

6.Metoda logico-simbolică bazată pe compararea numitorilor fracţiilor $\frac{1}{x^2-5x+6}$ şi $\frac{1}{2}$.

DVA: R\{2; 3}.

$$\frac{1}{x^2-5x+6} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+6 \ge 2 \\ x^2-5x+6 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+6-2 \ge 0 \\ 2 < x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+4 \ge 0 \\ 2 < x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge 4 \\ 2 < x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;1] \cup (2;3) \cup [4;+\infty).$$

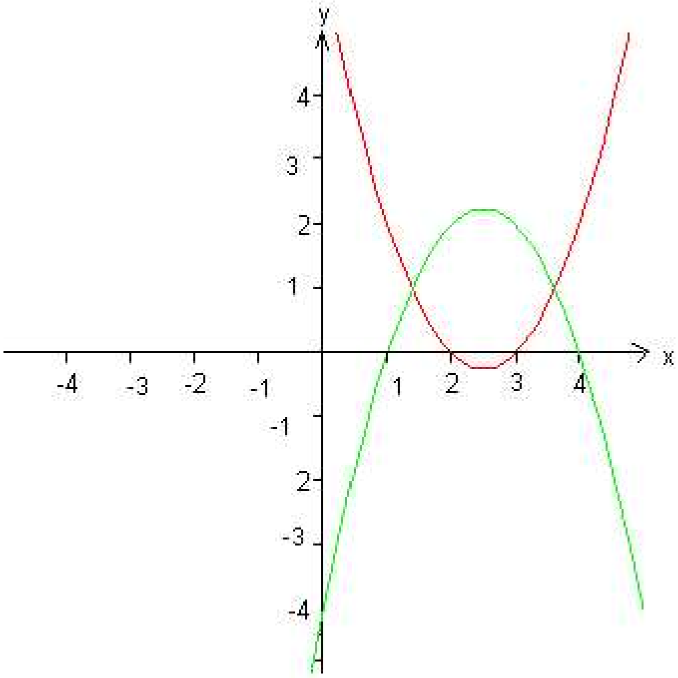
Este evident că această metodă e cea mai raţională la rezolvarea inecuaţiei propuse. Ea a fost utilizată de 11 profesori (34,4%). Dar 9 dintre aceştia au comis greşeala logică, scriind: $\frac{1}{x^2-5x+6} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x^2-5x+6 > 0 \\ x^2-5x+6 \ge 2. \end{array}\right. \\ x^2-5x+6 < 0 \end{array}\right.$

7.Metoda grafică în baza intersecţiei parabolelor $y = x^2 - 5x + 6$ şi $y^2 = -x^2 + 5x - 4$.

DVA: R\{2; 3}.

$$\frac{1}{x^2-5x+6}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{1}{2}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2-(x^2-5x+6)}{2(x^2-5x+6)}\le 0\Leftrightarrow\frac{-x^2+5x-4}{2\left(x^2-5x+6\right)}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-x^2+5x-4\le 0\\ x^2-5x+6>0\end{cases}\\ \begin{cases}-x^2+5x-4\ge 0\\ x^2-5x+6<0\end{cases}\end{array}\right.$$



A aplicat această metodă o singură persoană.

8.Metoda logico-simbolică în baza utilizării echivalenţei

$$\frac{-x^2+5x-4}{2\left(x^2-5x+6\right)}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-x^2+5x-4\le 0\\ x^2-5x+6>0\end{cases}\\ \begin{cases}-x^2+5x-4\ge 0\\ x^2-5x+4<0\end{cases}\end{array}\right..$$

DVA: R\{2; 3}.

$$\frac{1}{x^2-5x+6}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{1}{2}\le 0\Leftrightarrow\frac{-x^2+5x-4}{x^2-5x+6}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-x^2+5x-4\le 0\\ x^2-5x+6>0\end{cases}\\ \begin{cases}-x^2+5x-4\ge 0\\ x^2-5x+4<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge 4 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 3 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 1 \le x \le 4 \\ 2 < x < 3 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \le 1 \\ x < 2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \le 1 \\ x > 3 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \ge 4 \\ x < 2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \ge 4 \\ x > 3 \end{array}\right. \\ 2 < x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ \varnothing \\ \varnothing \\ x \ge 4 \\ 2 < x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow (-\infty;1] \cup (2;3) \cup [4;+\infty).$$

R: $x \in (-\infty;1] \cup (2;3) \cup [4;+\infty)$.

Au aplicat această metodă 10 profesori, dintre care doar 2 au rezolvat corect inecuaţia propusă, iar restul au comis greşeli în utilizarea simbolurilor „$\Leftrightarrow$”, „$\Rightarrow$”, „{”, „[”.

9. Metoda bazată pe utilizarea echivalenţei şi implicaţiei logice.

DVA: R\{2; 3}.

$$\frac{1}{x^2-5x+6} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{1}{2} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2-(x^2-5x+6)}{2(x^2-5x+6)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+5x-4}{x^2-5x+6} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} > 0 \\ \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) > 0 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1>0)(x-2>0)(x-3>0)(x-4>0)\\(x-1>0)(x-2>0)(x-3<0)(x-4<0)\\(x-1>0)(x-2<0)(x-3>0)(x-4<0)\\(x-1>0)(x-2<0)(x-3<0)(x-4>0)\\(x-1<0)(x-2>0)(x-3>0)(x-4<0)\\(x-1<0)(x-2>0)(x-3<0)(x-4>0)\\(x-1<0)(x-2<0)(x-3>0)(x-4>0)\\(x-1<0)(x-2<0)(x-3<0)(x-4<0)\\x=1\\x=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x>1)(x>2)(x>3)(x>4)\\(x>1)(x>2)(x<3)(x<4)\\(x>1)(x<2)(x>3)(x<4)\\(x>1)(x<2)(x<3)(x>4)\\(x<1)(x>2)(x>3)(x<4)\\(x<1)(x>2)(x<3)(x>4)\\(x<1)(x<2)(x>3)(x>4)\\(x<1)(x<2)(x<3)(x<4)\\x=1\\x=4\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x>4\\2<x<3\\\varnothing\\\varnothing\\\varnothing\\\varnothing\\\varnothing\\x<1\\x=1\\x=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>4\\2<x<3\\x<1\\x=1\\x=4\end{array}\right. \Leftrightarrow (-\infty;1]\cup(2;3)\cup[4;+\infty).$$

R: $x\in(-\infty;1]\cup(2;3)\cup[4;+\infty)$.

Această metodă a fost utilizată de o singură persoană. Au fost comise unele greşeli ce ţin de aplicarea incorectă a operaţiilor logice.

Generalizând cele expuse, vom mai sublinia:

1) O mare parte dintre cadrele didactice care predau matematica nu se conduce de principiul: mai bine să rezolvăm o problemă prin diverse metode, decât mai multe probleme prin aceeaşi metodă.

2) Unii dintre profesori nu evidenţiază cea mai raţională cale de rezolvare a unei probleme dintre căile existente de rezolvare a acesteia.

3) E mare numărul profesorilor care comit greşeli la rezolvarea problemelor (exerciţiilor) şi, respectiv, la utilizarea noţiunilor principale din logica matematicii.

BIBLIOGRAFIE:

1. Колягин Ю., *Методика преподования математики в средней школе*, Просвещение, М., 1975.
2. Ажгалиева А., Ажгалиев О., *О двадцати способах решения одной задачи*, МШ, стр.39, N. 6, 2009.
3. Hariton A., *Teoremă, condiţie necesară şi suficientă*, UST, Chişinău, 2007.