ROLUL PROBLEMELOR DE GEOMETRIE ÎN FORMAREA ABILITĂȚILOR DE CERCETARE ALE ELEVILOR

Laurențiu CALMUȚCHI, doctor habilitat, profesor universitar
Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. În articol se propun probleme geometrice, rezolvarea cărora, în mare măsură contribuie la formarea abilităților de cercetare ale elevilor.

Cuvinte – cheie: cercetare, problemă geometrică, soluție, învățare prin cercetare.

THE ROLE OF GEOMETRIC PROBLEMS IN FORMING THE RESEARCH SKILLS OF SCHOOL STUDENTS

Abstract. In this article geometric problems are proposed, the solving of which contribute largely in forming of research skills of school students.

Keywords: research, geometric problems, solution, learning through research.

Fiecare societate are nevoie de talente, fiecare țară are nevoie de specialiști de performanță în toate domeniile de activitate. Vom avea astfel de specialiști atunci, când vom avea absolvenți a gimnaziilor, liceelor și colegiilor bine pregătiți, cu cunoștințe profunde, capabili de a face față cerințelor actuale, care se cer de la specialiștii contemporani. Din cele menționate, devine clar, ce responsabilitate pentru viitor revine școlii de azi în pregătirea viitorilor absolvenți din instituțiile numite.

Activitatea de cercetare a elevilor reprezintă o totalitate de acțiuni cu caracter de căutare, care duce la descoperirea unor factori necunoscuți, cunoștințe teoretice și metode de activitate.

Scopul metodei de învățământ prin cercetare este de a ”trezi” în mintea elevului procesul de gândire. Elevul trebuie să simtă frumusețea descoperirii. Prin urmare, procesul de cercetare reprezintă nu numai un proces de gândire logică în acumularea cunoștințelor, dar și un bun simț emoțional.

Formarea abilităților de cercetare la elevi este posibilă și de dorit la toate obiectele de studiu. Un rol deosebit în această activitate de formare a acestor abilități de cercetare revin studierii matematicii școlare în general, și în particular geometriei. În procesul de formare a capacităților de cercetare, atât la elevi, cât și studenți, geometria este favorizată prin conținutul ei practic din realitatea înconjurătoare.

Metoda învățării prin cercetare în procesul rezolvării problemelor geometrice este posibilă la toate etapele de studiu, începând cu clasele primare, ținându-se cont de particularitățile de vârstă și de nivelul de pregătire al elevilor.

Un impact pozitiv în soluționarea problemei, abordate în acest articol. se obține în rezultatul rezolvării problemelor, în care se cere de calculat mărimile unor elemente ale figurilor geometrice, neexistente conform condițiilor problemei.

1. Calculați perimetrul triunghiului, laturile căruia au lungimile 2cm, 3cm și 5cm.

Majoritatea elevilor sunt gata să dea răspunsul, cum că perimetrul triunghiului este egal cu 10cm. Unii elevi însă, își pun întrebarea: există oare un triunghi cu laturile 2cm, 3cm și 5cm? Bineînțeles, că elevii își vor da seama, că nu există un astfel de triunghi. Ei vor face concluzia, că orice problemă, cât de simplă, cere a fi bine analizată, cercetată.

2. Latura unui paralelogram este egală cu 8 cm, iar înălțimea respectivă este egală cu 15 cm. De aflat latura a doua a paralelogramului, dacă înălțimea dusă pe această latură este egală cu 10 cm.

De obicei elevii, notând lungimea laturii necunoscute prin x și cunoscând formula pentru calcularea ariei paralelogramului, alcătuiesc ecuația :

$$x \cdot 10 = 8 \cdot 15$$

și obțin răspunsul: a doua latură a paralelogramului este egală cu 12 cm. Apelând la desen, elevii își vor face concluzia, că nu există astfel de paralelogram, deoarece în caz contrar, ipotenuza ar fi mai mică decât una din catete.

3. Bazele unui trapez sunt egale cu 20 cm și 6 cm. De aflat aria trapezului, dacă raza cercului înscris în acest trapez este egală cu 7 cm.

Tradițional, răspunsul nu se lasă mult așteptat. Elevii știu că aria trapezului este egală cu produsul dintre lungimea liniei medii și înălțime. Linia medie este egală cu 13 cm, iar înălțimea ar fi egală cu 14 cm. Elevii dau răspunsul: aria trapezului este egală cu 182 cm^2. Cercetând mai profund această problemă, elevii observă că trapezul cercetat trebuie să fie isoscel și latura laterală egală cu 13 cm, dar atunci așa trapez nu există.

4. Diagonalele fețelor necongruente a unui paralelipiped drept sunt egale cu 2 cm, 3 cm și 5 cm. De aflat diagonala paralelipipedului.

<u>Rezolvare</u>. Notăm lungimile muchiilor paralelipipedului prin x, y și z (Fig. 1). Se știe, că pătratul diagonalei paralelipipedului drept este egal cu suma pătratelor celor 3 dimensiuni

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Aplicând teorema lui Pitagora în cele 3 fețe necongruente, obținem sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y^2 + z^2 = 9, . \\ x^2 + z^2 = 25. \end{cases}$$

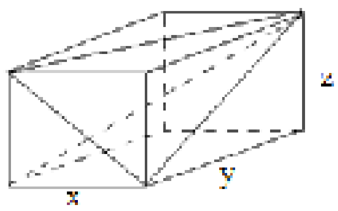

Fig. 1

Adunând parte cu parte ecuațiile sistemului, obținem :

$$2(x^2 + y^2 + z^2) = 38 \text{ sau } x^2 + y^2 + z^2 = 19.$$

Prin urmare, diagonala paralelipipedului este egală cu $\sqrt{19}\,cm$. Acesta însă nu poate fi răspunsul problemei, deoarece fiecare diagonală a feței paralelipipedului drept reprezintă proiecția ortogonală a unei diagonale a paralelipipedului, iar proiecția ortogonală întotdeauna este mai mică decât oblica. Deci, diagonala paralelipipedului trebuie să fie mai mare decât fiecare diagonală a fețelor, dar $\sqrt{19} < 5$.

Care-i motivul: de ce s-a obținut așa rezultat? Cercetând mai atent datele problemei, elevii pot observa că diagonalele fețelor necongruente ale paralelipipedului dat formează un triunghi. Prin urmare, lungimile laturilor trebuie să satisfacă condițiilor de existență a triunghiului. Cu laturile 2, 3 și 5 nu există așa triunghi. În continuare, profesorul propune elevilor să rezolve problema în cazul, când diagonalele fețelor necongruente ale paralelipipedului dat au așa dimensiuni, încât să existe triunghiul format de ele. Fie, de exemplu diagonalele fețelor necongruente au dimensiunile 2, 3 și 4. În așa caz elevii obțin că diagonala paralelipipedului este egală cu $\sqrt{14{,}5}$. Acesta iarăși nu poate fi răspunsul, deoarece $\sqrt{14{,}5} < 4$. Acum se vede clar, că este încălcată o altă condiție necesară a existenței paralelipipedului drept. Pentru a determina această condiție, se propune de rezolvat problema în formă generală.

Fie diagonalele fețelor necongruente ale paralelipipedului drept au dimensiunile a, b și c, unde $a > b > c$. Atunci, diagonala paralelipipedului dat va avea mărimea d=$\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)}$. Așa cum, $d > a$ obținem inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)} > a \text{, de unde obținem } a^2 < b^2 + c^2.$$

Prin urmare, triunghiul format din diagonalele fețelor necongruente a paralelipipedului trebuie să fie ascuțitunghic, deoarece pătratul laturii mai mari este mai mic decât suma pătratelor celorlalte două laturi. Ultima afirmație rezultă din teorema cosinusurilor. În sfârșit devine clar, de unde apare contrazicerea și anume din faptul că $2^2 + 3^2 < 4^2$. Triunghiul cu laturile 2, 3 și 4 este obtuzunghic.

Există probleme în geometrie pentru rezolvarea cărora, ecuația sau sistemul de ecuații alcătuit pentru aflarea mărimii căutate, admite două soluții pozitive. În așa caz, nu este clar, care totuși este răspunsul problemei.

5. În triunghiul ABC este dat: $|AB| = 2cm$, $|BC| = 4cm$ și m$\measuredangle$ABC=120^0. Bisectoarea unghiului B intersectă latura AC în punctul D. Cu ce este egală distanța de la punctul D pînă la latura AB (Fig. 2)?

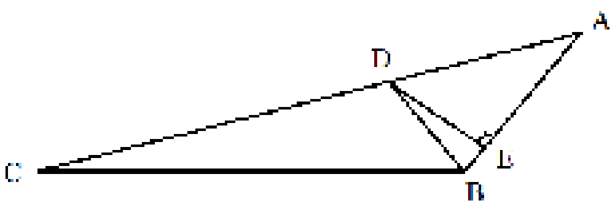

Fig. 2

Rezolvare. Fie $[DE] \perp [AB]$ și $|DE| = x$. Atunci, $|BE| = xtg30^0 = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $|AE| = 2 - \frac{x}{\sqrt{3}}$. Aplicăm teorema cosinusurilor în triunghiul ABC și obține : $|AC|^2 = 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos 120^0 = 28$, de unde $|AC| = 2\sqrt{7}$. Din proprietatea bisectoarei AD în triunghiul ABC avem:

$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Atunci, $|AD| = \frac{2\sqrt{7}}{3}$ și $|DC| = \frac{4\sqrt{7}}{3}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ADE, obținem:

$$x^2 + \left(2 - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^2 \text{ sau } \frac{1}{3}x^2 - \frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{2}{9} = 0.$$

Soluțiile acestei ecuații sunt $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ și $x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Ambele soluții sunt pozitive și ambele satisfac condițiilor de existență a triunghiului ADE.

Apare întrebarea: satisfac oare problemei ambele soluții? După natura problemei, trebuie să fie un singur răspuns. Așa că cel puțin o soluție este în plus. Din proprietatea bisectoarei BD în triunghiul ABC, și anume:

$$|BD|^2 = |BA| \cdot |BC| - |AD| \cdot |DC|,$$

aflăm $|BD| = \frac{4}{3}$ (special n-am calculat-o din triunghiul BDE, o să vă convingeți de ce ?).

Dacă acum verificăm existența triunghiului BDE pentru soluțiile x_1 și x_2 obținute, ne convingem că triunghiul BDE există doar pentru valoarea $x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. De unde au apărut două soluții? Pentru a răspunde la această întrebare vom cerceta triunghiul ABD. În acest triunghi cunoaștem $|AB| = 2$, $|AD| = \frac{2\sqrt{7}}{3}$ și $m\measuredangle DBA = 60^0$, adică cunoaștem două laturi și unghiul opus uneia din ele. Prin urmare, triunghiul ABD nu este determinat. Punctul D poate avea două poziții (D_1 și D_2) cărora le vor corespunde două distanțe diferite pînă la latura AB. Pentru a stabili, care anume din aceste două poziții are loc, este suficient de determinat felul unghiului BDA. Cu ajutorul teoremei cosinusurilor determinăm, că acest unghi este ascuțit. În așa caz, răspunsul problemei date este determinat de valoarea mai mare a soluției, anume de $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Să menționăm, că nu trebuie de confundat cercetarea soluției problemei cu sensul problemei de cercetare a expresiei analitice a mărimii căutate. Domeniul valorilor admisibile, după sensul parametrilor din problemă, reprezintă o submulțime a valorilor admisibile a expresiei analitice obținute pentru mărimea căutată.

V. Nataganov și L. Lujina [1] pe bună dreptate consideră că problemele cu parametri reprezintă o analogie a problemelor de cercetare științifică din matematica aplicată. I. A. Ghibș în [2] scrie: „Rezolvarea problemei cu date parametrice poate fi considerată completă numai în cazul, când vor fi determinate condițiile necesare și suficiente pentru ca valorile determinate a necunoscutelor pot fi considerate ca răspuns la problema dată.

6. Perimetrul unui triunghi isoscel este egal cu p, iar una din laturi este egală cu a. Aflați laturile triunghiului. Cîte soluții are problema pentru diferite valori a parametrului a ?

Rezolvare. Deoarece în problemă nu se spune concret, care latură este egală cu a (baza sau latura laterală), vom cerceta două cazuri.

Cazul I. Dacă a este lungimea bazei triunghiului, atunci latura laterală are lungimea egală cu $\frac{p-a}{2}$. Aplicînd inegalitățile triunghiului, obținem sistemul:

$$\begin{cases}\frac{p-a}{2}<\frac{p-a}{2}+a\,,\\ a<\frac{p-a}{2}+\frac{p-a}{2}.\end{cases}\text{, de unde }\begin{cases}a>0,\\ a<\frac{p}{2}.\end{cases}$$

Cazul II. Dacă a este lungimea laturii laterale, atunci lungimea bazei este $p-2a$ și deci obținem sistemul

$$\begin{cases}p-2a<a+a,\\ a<p-2a+a\end{cases}\text{, de unde }\begin{cases}a>p-4,\\ \quad a<\frac{p}{2}.\end{cases}\ .$$

<u>Răspuns</u>. Pentru $\frac{p}{4}<a<\frac{p}{2}$ problema are două soluții : $a\,,\frac{p-a}{2}\,,\frac{p-a}{2}$ și $a,a,p-2a$; Pentru $0<a<\frac{p}{4}$ problema are o singură soluție: $a,\frac{p-a}{2},\frac{p-a}{2}$; pentru $a\le 0,\ a\ge\frac{p}{2}$ problema nu are soluții.

7. Într-un triunghi dreptunghic ipotenuza este egală cu c, iar suma sinusurilor unghiurilor ascuțite este egală cu s. De aflat aria acestui triunghi (Fig. 3).

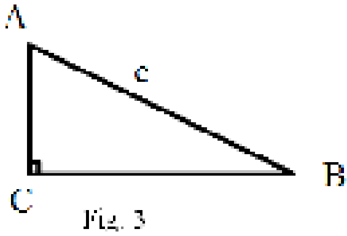

Fig. 3

Vom determina aria triunghiului după formula :

$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AC||BC|$. Evident, $|AC|=csin\hat{B}$ și $|BC|=csin\hat{A}$. Atunci, $|AC|+|BC|=c\big(sin\hat{A}+sin\hat{B}\big)=cs$. Așa dar, $|AC|+|BC|=cs$ (1).

Conform teoremei lui Pitagora, avem : $|AC|^2+|BC|^2=c^2$ (2).

Ridicăm ambii membri a egalității (1) la pătrat și obținem:

$$|AC|^2+2|AC||BC|+|BC|^2=c^2s^2\text{, dar atunci,}$$

$$2|AC||BC|=c^2s^2--c^2=c^2(s^2-1)\text{. Prin urmare, }A_{\Delta ABC}=\frac{1}{4}c^2(s^2-1).$$

Bineînțeles, că majoritatea elevilor, dar chiar și studenților, dau acest răspuns. Unii observă ușor, că trebuie s^2-1 să fie pozitiv și deoarece $s>0$ (suma sinusurilor a două unghiuri ascuțite este pozitivă) elevii dau următorul răspuns: $A_{\Delta ABC}=\frac{1}{4}c^2(s^2-1)$, dacă $s>1$.

Cercetând mai profund, luând în vedere că mărimea $s=sin\hat{A}++sin\hat{B}==sin\hat{A}+\sin\big(90^0-\hat{A}\big)=2sin45^0\cos\big(45^0-\hat{A}\big)=\sqrt{2}cos\big(45^0-\hat{A}\big)$,

avem: $s=\sqrt{2}cos\big(45^0-\hat{A}\big)$. Așa cum $0<cos\big(45^0-\hat{A}\big)\le 1$, obținem că $0<s\le\sqrt{2}$ (3). Totodată observăm că

$$sin\hat{A}+sin\hat{B}=\frac{|BC|}{|AB|}+\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{|BC|+|AC|}{|AB|}>1\text{, adică }s>1\text{ (4).}$$

Din (3) și (4) avem, $1<s\le 2$. Așa dar, $A_{\Delta ABC}=\frac{1}{4}c^2(s^2-1)$, dacă $1<s\le\sqrt{2}$.

8. În paralelogramul $ABCD$, lungimea laturii mai mare $AB=a$, iar lungimea laturii mai mică $BC=b$. De aflat înălțimea, ce corespunde laturii mai mari, dacă mărimea unghiului ascuțit dintre diagonale, este egală cu α (fig. 5) [4].

Rezolvare. Evident, $A_{ABCD} = 4A_{BOC} =$
$= 2|OB||OC|sin\alpha$ (1).

Aplicând teorema cosinusurilor în triunghiul BOC, obținem:
$b^2 = |OB|^2 + |OC|^2 - 2|OB||OC|cos\alpha$ (2).

Evident, $|OB|^2 + |OC|^2 = \frac{1}{4}(|DB|^2 + |AC|^2)$. Folosind proprietatea paralelogramului

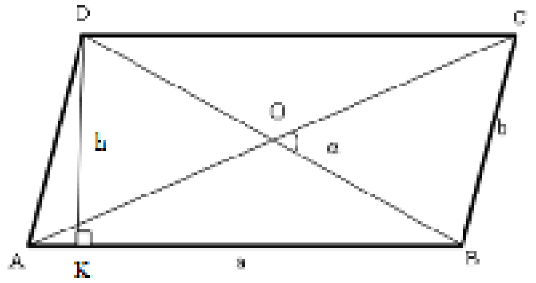

Fig.5

$$|DB|^2 + |AC|^2 = 2(a^2 + b^2), \text{obținem:}$$

$$\left|OB|^2 + |OC|^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\right) \ (3).$$

Înlocuind (3) în (2), primim:

$$2|OB||OC| = \frac{a^2 - b^2}{2cos\alpha} \ (4).$$

Înlocuind (4) în (1), obținem:

$$A_{ABCD} = \frac{a^2 - b^2}{2}tg\alpha \ (5).$$

Pe de altă parte $A_{ABCD} = ah$. Egalând expresiile pentru aria paralelogramului, determinăm

$$h = \frac{a^2 - b^2}{2a}tg\alpha \ (6).$$

Observăm, că partea dreaptă a expresiei (6) are sens pentru $0 < b < a$ și $0^0 < \alpha < 90^0$. Apare întrebarea: oare pentru orice valori $a > 0, 0 < b < a$ și $0^0 < \alpha < 90^0$ se poate construi un paralelogram cu laturile a, b și unghiul ascuțit dintre diagonale de mărimea α ?

Dacă introducem în (6), de exemplu, valorile $a = 5, b = 2, \alpha = 45^0$, determinăm $h = 2{,}1$. Astfel, am obținut, că în triunghiul dreptunghic AKD ipotenuza AD este mai mică decît cateta KD. Aceasta poate însemna doar una: paralelogram cu valorile date a, b, α nu există. În această situație ușor ne convingem, dacă luăm în vedere că aria paralelogramului nu poate să întreacă aria dreptunghiului, laturile căruia au aceleași lungimi. Prin urmare,

$$\frac{a^2 - b^2}{2}tg\alpha \leq ab, \text{sau } 0 < \alpha \leq arctg\frac{2ab}{a^2 - b^2} \ (7).$$

Așa dar, mărimile a, b, α nu pot fi arbitrare, independente una de alta, dar ele trebuie să satisfacă inegalității (7).

9. Într-o piramidă triunghiulară regulată prin latura bazei este dus un plan perpendicular pe muchia laterală opusă. De aflat aria secțiunii obținute, dacă latura bazei este egală cu a, iar înălțimea piramidei este egală cu h.

Rezolvare. Fie $SABC$ piramida dată, iar SO înălțimea piramidei. Construim apotema SD și unim punctul D cu punctul C și cu punctul M de intersecție a secțiunii cu muchia laterală opusă. Triunghiul ABM este secțiunea dată (Fig. 4).

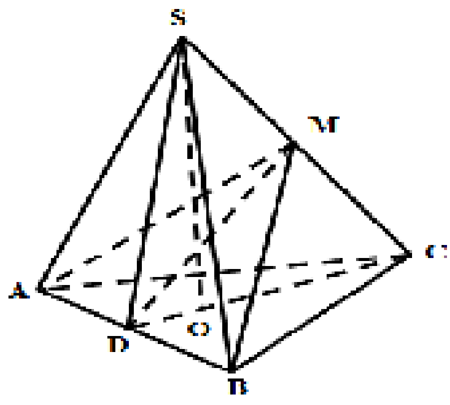

Fig.4

Din triunghiul SOC, obținem :

$$|SC| = \sqrt{|SO|^2 + |OC|^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}},\ |SC| = \sqrt{\frac{3h^2+a^2}{3}}.$$

Să observăm, că $|DM| \cdot |SC| = |SO| \cdot |DC| = 2A_{\Delta SDC}$. Atunci, $|DM| = \frac{3ah}{2\sqrt{3h^2+a^2}}$. Prin urmare, $A_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |DM| = \frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$.

Cercetarea. La prima vedere s-ar părea că totul este în regulă și din expresia obținută pentru aria secțiunii să alegem pe acele valori, pentru care aria este pozitivă.

Așa cum $a > 0$, $h > 0$, atunci într-adevar $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}} > 0$ (1).

Prin urmare, valoarea obținută pentru aria triunghiului ABM satisface condiției problemei. În realitate, acest rezultat nu este complet.

Într-adevăr, să ne imaginăm că înălțimea piramidei h este foarte mică. În așa caz, planul ce trece prin latura AB, perpendicular pe dreapta SC, poate să nu intersecteze segmentul $[SC]$. Să determinăm relația dintre parametrii a și h pentru care există secțiunea dată. Pentru aceasta cercetăm triunghiul CSD. Avem: $|CD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$|OD| = \frac{1}{3}|CD| = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ și } |OC| = \frac{2}{3}|CD| = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Dacă $m\sphericalangle CSD = 90^0$, atunci $h = |SO| = \sqrt{|OD||OC|} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, iar în acest caz punctul M coincide cu punctul S și evident, secțiunea nu există.

Prin urmare, secțiunea data există doar în cazul, când $0^0 < m\sphericalangle CSD < 90^0$.

Așa dar, dacă

$$\begin{cases} a > 0 \\ h > 0 \\ h > \frac{a\sqrt{6}}{6} \end{cases}, \text{ adică } \begin{cases} a > 0 \\ h > \frac{a\sqrt{6}}{6} \end{cases} \text{ aria secțiunii căutate va fi egală cu } \frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}.$$

10. Baza unei piramide este un dreptunghi cu unghiul dintre diagonale de mărime α, iar toate muchiile laterale formează cu planul bazei unul și același unghi de mărime β. De aflat distanța de la centrul sferei circumscrise acestei piramide pînă la planul bazei piramidei și volumul piramidei, dacă raza sferei circumscrise este egală cu R.

Rezolvare. Fie dată piramida $SABCD$ (Fig.6), baza căreia este dreptunghiul $ABCD$. Dacă SH este înălțimea piramidei, atunci $m\sphericalangle SAH = m\sphericalangle SBH = m\sphericalangle SCH = m\sphericalangle SDH = \beta$ și prin urmare, toate lungimile muchiilor laterale sunt egale, iar H este punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului $ABCD$.

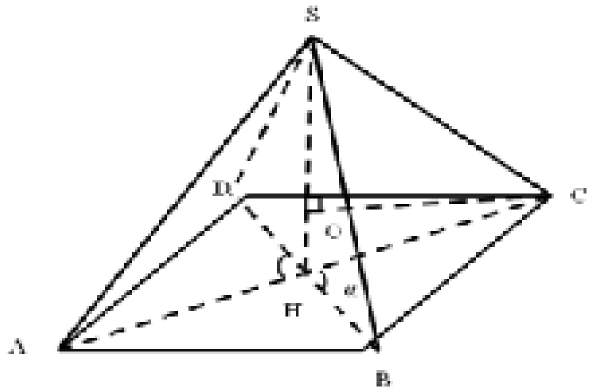

Fig. 6

Deoarece centrul sferei circumscrise O, trebuie să fie egal depărtat de la toate vîrfurile piramidei, urmează că punctul O aparține perpendicularei la planul $ABCD$, dusă în centrul paralelogramului, adică pe dreapta SH.

Să cercetăm triunghiurile COS și CHS. Așa cum, $m\sphericalangle CSH = 90^0 - 2\beta$, iar triunghiul COS este isoscel, atunci comform proprietății unghiului exterior al triunghiului avem : $m\sphericalangle COH = 180^0 - 2\beta$. Din triunghiul COH determinăm distanța de la centrul O pînă la planul bazei:

$$|OH| = Rcos(180^0 - 2\beta) = -Rcos2\beta. (1).$$

Apariția semnului minus în (1) atrage o atenție deosebită. Problema este că construind fig.6, noi de fapt am presupus că centrul sferei circumscrise este situat în interiorul piramidei și am rezolvat problema pusă, reieșind din presupunerea făcută. În realitate, centrul sferei circumscrise nu-i neapărat să fie situat în interiorul piramidei, iar formula obținută pentru distanța căutată ne amintește despre aceasta.

Observăm, că centrul sferei circumscrise este situat în interiorul piramidei, dacă înălțimea piramidei este mai mare decât jumătatea diagonalei dreptunghiului (atunci punctul este egal depărtat dintre C și S, adică centrul sferei O, este situat în interiorul segmentului SH), adică atunci, când $\beta > 45^0$. În acest caz, $cos2\beta < 0$ și prin urmare $|OH| > 0$.

Dacă centrul sferei circumscrise este situat pe baza piramidei și coincide cu punctul H, atunci înălțimea piramidei este egală cu jumătatea diagonalei dreptunghiului, $\beta = 45^0$ și deci $OH = 0$.

Dacă însă, centrul sferei circumscrise este situat înafara piramidei (Fig.7), atunci $\beta < 45^0$ și nu se poate calcula distanța OH după formula (1). În acest caz $m\sphericalangle COH = 2\beta$ și distanța de la punctul O pînă la baza piramidei $OH = Rcos2\beta$.

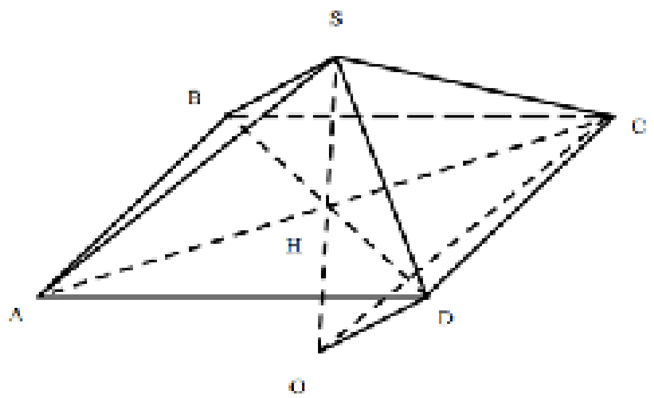

Fig 7

Să trecem la calcularea volumului piramidei. Din triunghiul COH determinăm $|HC| = Rsin(180^0 - 2\beta) = Rsin2\beta$. Această egalitate rămîne în vigoare pentru ambele cazuri (atât pentru Fig. 6, cât și pentru (Fig. 7). Atunci, aria bazei

$$A_{ABCD} = 4A_{\Delta DHC} = 2R^2sin^2 2\beta sin\alpha,$$

unde unghiul de mărimea α poate fi ascuțit sau optuz. Pentru a determina înălțimea piramidei, vom cerceta trei cazuri posibile.

1. Dacă $\beta > 45^0$, adică atunci , când centrul O este situat în interiorul piramidei, obținem $|SH| = |SO| + |OH| = R - Rcos2\beta = 2Rsin^2\beta$.
2. Dacă $\beta < 45^0$, adică centrul O este situat înafara piramidei, atunci
$$|SH| = |SO| - |OH| = R - Rcos2\beta = 2Rsin^2\beta.$$
3. Dacă $\beta = 45^0$, atunci $|SH| = |SO| = R = 2Rsin^2 45^0$.

Astfel, pentru orice valoare a unghiului $\beta, 0^0 < 90^0$, volumul piramidei este același $V = \frac{4}{3}R^3sin^2 2\beta sin^2\beta sin\alpha$.

Teoria și practica învățării prin descoperire (discovery learning) reprezintă un ansamblu de procese foarte complexe, bazate pe proceduri de cercetare care-i determină pe elevi să descopere noi adevăruri, să rezolve ei înșăși probleme, să manifeste independență de gândire [6]. La realizarea învățării prin descoperire putem utiliza întrebări ajutătoare care vor da impuls procesului de rezolvare a problemelor. Învățarea prin descoperire și cercetare au un mare grad de eficiență intelectuală. Accentul pe învățarea prin descoperire nu pretinde de a-i face pe toți elevii cercetători, ci în a-i face mai eficienți, în a le dezvolta aptitudinea și abilitățile creatoare. Ceia ce este mai important pentru realizarea unei învățări prin cercetare este necesitatea de a găsi o modalitate optimă de stimulare a elevului pentru un efort de activitate independentă, acesta presupune un minimum de dirijare din partea profesorului și un maximum de ocazii de explorare și de încercare oferite elevilor.

Bibliografie

1. Натаганов В., Лужина Л. Методы решения задач с параметрами. Москва, изд-во МГУ, 2003.
2. Гибш И. А. Исследования решений задач с параметрическими данными. Москва, Изд-во АПН, 1992.
3. Рыжик В. И. Задача в задаче. Применение алгебры к геометрии. Математика в школе. №2, 2015 , с.12-25.
4. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в ВУЗЫ. Москва: Наука, 1972, 528 с.
5. Calmuțchi L. Metodologia rezolvării problemelor cu parametri. Chișinău, 2016, 284 p.
6. Cerghit I. Metode de învățământ. Iași, Polirom, 2006.