APLICAȚII ALE ELEMENTELOR DE LOGICĂ ŞI MULȚIMI LA REZOLVAREA ECUAȚIILOR, INECUAȚIILOR ŞI SISTEMELOR ACESTORA

Laurențiu Calmuțchi, *prof. dr. hab.*
Andrei Hariton, *prof. dr.,*
Universitatea de Stat din Tiraspol

Abstract: *This article draws mathematic teachers and pupils' attention upon the use of specific elements from set theory and mathematical logic in the process of solving some types of equations, inequations, systems of equations and inequations.*
Key words: *mathematics, elements of logic, equations, inequations, systems of equations and inequations.*

În mediul educațional, un accent primordial îi revine dezvoltării logice a elevilor. Au trecut circa 15 ani de când au fost incluse, în învățământul preuniversitar la matematică, elemente de logică matematică şi mulțimi. Acestea contribuie, în mare măsură, la dezvoltarea gândirii logice a elevilor, la însuşirea conştientă a conținutului matematic.
Elementele de logică matematică şi teoria mulțimilor au devenit acel sos, care a contribuit în mod efectiv la unirea diverselor compartimente ale programei la matematică. Elementele de logică matematică şi teoria mulțimilor au contribuit, de asemenea, la însuşirea unui volum mai mare de cunoştințe şi deprinderi într-un interval mai mic de timp. Dar, spre regret, am aşteptat mult timp pentru implementarea în şcoală a elementelor de logică matematică şi mulțimi.
Suntem convinşi că pe viitor vom avea succese mai mari în procesul de aplicare a logicii şi mulțimilor, că elementele de teoria mulțimilor şi logica matematică ne vor aduce rezultate considerabile în procesul de PÎE la matematică.
Numeroşi profesori de matematică şi elevi vor fi interesați de aplicațiile elementelor din teoria mulțimilor şi logică matematică la rezolvarea unor tipuri de ecuații, inecuații şi sisteme de ecuații, inecuații.
De menționat că în unele cazuri aceste aplicații pot ocupa un volum sporit în raport cu calea obişnuită de rezolvare, dar *calea logică* are şi convenientele sale: contribuie prioritar la dezvoltarea logică, este mai potrivită pentru a fi programată etc.
Să trecem la unele exemple concrete.
1. Să se rezolve ecuația $|x-3|+|x-8|-|x+2|=-1.$
Rezolvare:
Rezolvarea ecuației propuse se reduce la rezolvarea unei totalități ce conține sisteme de ecuații şi inecuații. Pentru a verifica care dintre aceste sisteme admit soluții, vom proceda astfel: vom scrie condițiile eliberării de simbolul modulului respectiv pentru toate modulele din componenta membrului stâng al ecuației:
$x \geq 3, x < 3; x \geq 8, x < 8; x \geq -2, x < -2.$
Prin intermediul conjuncției vom exprima condițiile eliberării de simbolul modulului din componenta membrului stâng al ecuației:

$(x \geq 3)(x \geq 8)(x \geq -2) \Leftrightarrow (x \geq 8);$

$(x \geq 3)(x \geq 8)(x < -2) \Leftrightarrow q;$

$(x \geq 3)(x < 8)(x \geq -2) \Leftrightarrow (3 \leq x < 8);$

$(x \geq 3)(x < 8)(x < -2) \Leftrightarrow q;$

$(x < 3)(x \geq 8)(x \geq -2) \Leftrightarrow q;$

$(x < 3)(x \geq 8)(x < -2) \Leftrightarrow q;$

$(x < 3)(x < 8)(x \geq -2) \Leftrightarrow (-2 \leq x < 3);$

$(x < 3)(x < 8)(x < -2) \Leftrightarrow (x < -2).$

Rezolvarea ecuației se reduce la rezolvarea totalității a patru sisteme de ecuații:

$$(|x-3|+|x-8|-|x+2|=-1.) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 8 \\ x-3+x-8-x-2=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} 3 \leq x < 8 \\ x-3-x+8-x-2=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \leq x < 3 \\ -x+3-x+8-x-2=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2 \\ -x+3-x+8+x+2=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 8 \\ x=12 \end{cases} \\ \begin{cases} 3 \leq x < 8 \\ x=4 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \leq x < 3 \\ x=\dfrac{10}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2 \\ x=14 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=4 \\ q \\ q \end{array}\right.$$

R. $x \in \{4;12\}$.

2. Să se afle toate valorile parametrului a, astfel încât pentru fiecare dintre aceste valori ecuația

$$4x-|3x-|x+a||=9|x-1|$$

are cel puțin o rădăcină (acest exercițiu a fost propus la pretestare la matematică pentru examenul unic în Rusia pentru anul 2010, vezi МШ, Nr.6, 2009).

Rezolvarea ecuației prin intermediul logicii matematice poate fi rezolvată astfel:

$$
(4x-|3x-|x+a||=9|x-1|) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}
\begin{cases}(x+a\ge 0)(3x-(x+a)\ge 0)(x-1\ge 0)\\ 4x-(3x-(x+a))=9(x-1)\end{cases}\\
\begin{cases}(x+a\ge 0)(3x-(x+a)<0)(x-1\ge 0)\\ 4x+(3x-(x+a))=9(x-1)\end{cases}\\
\begin{cases}(x+a\ge 0)(3x-(x+a)\ge 0)(x-1<0)\\ 4x-(3x-(x+a))=9(1-x)\end{cases}\\
\begin{cases}(x+a\ge 0)(3x-(x+a)<0)(x-1<0)\\ 4x+(3x-(x+a))=9(1-x)\end{cases}\\
\begin{cases}(x+a<0)\big(3x+x+a\big)\ge 0)(x-1\ge 0)\\ 4x-(3x+x+a)=9(x-1)\end{cases}\\
\begin{cases}(x+a<0)(3x+x+a\ge 0)(x-1<0)\\ 4x-(3x+x+a)=9(1-x)\end{cases}\\
\begin{cases}(x+a<0)(3x+x+a)(x-1>0)\\ 4x+3x+x+a=9(x-1)\end{cases}\\
\begin{cases}(x+a<0)(3x+x+a<0)(x-1<0)\\ 4x+3x+x+a=9(1-x)\end{cases}
\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}
\begin{cases}(x\ge -a)(x\ge \frac{a}{2})(x\ge 1)\\ x=\frac{a+9}{7}\end{cases}\\
\begin{cases}(x\ge -a)(x< \frac{a}{2})(x\ge 1)\\ x=\frac{9-a}{3}\end{cases}\\
\begin{cases}(x\ge -a)(x\ge \frac{a}{2})(x<1)\\ x=\frac{9-a}{11}\end{cases}\\
\begin{cases}(x\ge -a)(x< \frac{a}{2})(x<1)\\ x=\frac{9+a}{15}\end{cases}\\
\begin{cases}(x<-a)(x\ge -\frac{a}{4})(x\ge 1)\\ x=\frac{9-a}{9}\end{cases}\\
\begin{cases}(x<-a)(x\ge -\frac{a}{4})(x<1)\\ x=\frac{9+a}{9}\end{cases}\\
\begin{cases}(x<-a)(x< -\frac{a}{4})(x>1)\\ x=a+9\end{cases}\\
\begin{cases}(x<-a)(x< -\frac{a}{4})(x<1)\\ x=\frac{9-a}{17}\end{cases}
\end{array}\right.
$$

$$
\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}
\left(\dfrac{a+9}{7} \ge -a\right)\left(\dfrac{a+9}{7} \ge \dfrac{a}{2}\right)\left(\dfrac{a+9}{7} \ge 1\right) \\
\left(\dfrac{9-a}{3} \ge -a\right)\left(\dfrac{9-a}{3} < \dfrac{a}{2}\right)\left(\dfrac{9-a}{3} \ge 1\right) \\
\left(\dfrac{9-a}{11} \ge -a\right)\left(\dfrac{9-a}{11} \ge \dfrac{a}{2}\right)\left(\dfrac{9-a}{11} < 1\right) \\
\left(\dfrac{9+a}{15} \ge -a\right)\left(\dfrac{9+a}{15} < \dfrac{a}{2}\right)\left(\dfrac{9+a}{15} < 1\right) \\
\left(\dfrac{9-a}{9} < -a\right)\left(\dfrac{9-a}{9} \ge -\dfrac{a}{4}\right)\left(\dfrac{9-a}{9} \ge 1\right) \\
\left(\dfrac{9+a}{9} < -a\right)\left(\dfrac{9+a}{9} \ge -\dfrac{a}{4}\right)\left(\dfrac{9+a}{9} < 1\right) \\
\left(9+a < -a\right)\left(9+a < -\dfrac{a}{4}\right)\left(9+a > 1\right) \\
\left(\dfrac{9-a}{17} < -a\right)\left(\dfrac{9-a}{17} < -\dfrac{a}{4}\right)\left(\dfrac{9-a}{17} < 1\right)
\end{array}\right.
\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}
\left(a \ge -2\right)\left(a \ge \dfrac{9}{8}\right)\left(a \le \dfrac{18}{5}\right) \\
\left(a \ge -\dfrac{9}{2}\right)\left(a > \dfrac{18}{5}\right)\left(a \le 6\right) \\
\left(a \ge -\dfrac{9}{10}\right)\left(a \le \dfrac{18}{13}\right)\left(a > -2\right) \\
\left(a \ge -\dfrac{9}{14}\right)\left(a > \dfrac{18}{13}\right)\left(a < 6\right) \\
\left(a \ge -7\dfrac{1}{5}\right)\left(a \le 0\right)\left(a < -\dfrac{9}{8}\right) \\
\left(a < -\dfrac{9}{10}\right)\left(a \ge -2\dfrac{10}{13}\right)\left(a < 0\right) \\
\left(a < \dfrac{9}{2}\right)\left(a < -\dfrac{36}{5}\right)\left(a > -8\right) \\
\left(a < -\dfrac{9}{16}\right)\left(a < -\dfrac{36}{13}\right)\left(a > -8\right)
\end{array}\right.
\Leftrightarrow
$$

$$
\left[\begin{array}{l}
1\dfrac{1}{8} \le a \le 3\dfrac{3}{5} \\
3\dfrac{3}{5} < a \le 6 \\
-\dfrac{9}{10} \le a \le 1\dfrac{5}{13} \\
1\dfrac{5}{13} < a < 6 \\
-7\dfrac{1}{5} \le a < -1\dfrac{1}{8} \\
-2\dfrac{10}{13} \le a < -\dfrac{9}{10} \\
-8 < a < -7\dfrac{1}{5} \\
-8 < a < -2\dfrac{10}{13}
\end{array}\right.
\Leftrightarrow -8 < a \le 6
$$

R: $-8 < a \le 6$.

3. Să se rezolve inecuația:

$(x+1)(x-2)(x+5)(x-7) < 0.$

Rezolvare: Vom efectua substituțiile:

$(x+1>0) \Leftrightarrow (x>-1) - A$; $(x+1<0) \Leftrightarrow (x<-1) - A_1$.

$(x-2>0) \Leftrightarrow (x>2) - B$; $(x-2<0) \Leftrightarrow (x<2) - B_1$.

$(x+5>0) \Leftrightarrow (x>-5) - C$; $(x+5<0) \Leftrightarrow (x<-5) - C_1$.

$(x-7>0) \Leftrightarrow (x>7) - D$; $(x-7<0) \Leftrightarrow (x<7) - D_1$.

Produsul $(x+1)(x-2)(x+5)(x-7)$ va fi mai mic ca zero, dacă : a) un factor va fi negativ, iar restul vor fi pozitivi; b) trei factori vor fi negativi, iar un factor va fi pozitiv.
Logic condițiile a) şi b) se vor scrie:
$A_1BCD \vee B_1ACD \vee C_1ABD \vee D_1ABC \vee AB_1C_1D_1 \vee BA_1D_1C_1 \vee CA_1B_1D_1 \vee DA_1B_1C_1$.
Vom verifica adevărul fiecărui termen al sumei logice obținute:
$A_1BCD:(x<-1)(x>2)(x>-5)(x>7)\Leftrightarrow 0;\ B_1ACD:(x<2)(x>-1)(x>-5)(x>7)\Leftrightarrow 0;$
$C_1ABD:(x<-5)(x>-1)(x>2)(x>7)\Leftrightarrow 0;\ D_1ABC:(x<7)(x>-1)(x>2)(x>-5)\Leftrightarrow (2<x<7);$
$AB_1C_1D_1:(x>-1)(x<2)(x<-5)(x<7)\Leftrightarrow 0;\ BA_1D_1C_1:(x>2)(x<-1)(x<7)(x<-5)\Leftrightarrow 0;$
$CA_1D_1B_1:(x>-5)(x<-1)(x<2)(x<7)\Leftrightarrow (-5<x<-1);$
$DA_1B_1C_1:(x>7)(x<-1)(x<2)(x<-5)\Leftrightarrow 0;$
Prin urmare: $(x+1)(x-2)(x+5)(x-7)<0 \Leftrightarrow (2<x<7)\vee(-5<x<-1)$.
R: $x(-5;-1)\cup(2;7)$.

4. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} \dfrac{x^2+2x-15}{x+4}>0 \\ x^3-2x^2-5x+6<0. \end{cases}$

Rezolvare: DVA: $x\neq 4$. $\begin{cases} \dfrac{x^2+2x-15}{x+4}>0 \\ x^3-2x^2-5x+6<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-3)(x+5)}{x+4}>0 \\ (x-1)(x+2)(x-3)<0. \end{cases}$

Vom introduce următoarele substituții: $(x-3>0)\Leftrightarrow(x>3)-A;(x-3<0)\Leftrightarrow(x<3)-A_1$.
$(x+5>0)\Leftrightarrow(x>-5)-B;(x+5<0)\Leftrightarrow(x<-5)-B_1.(x+4>0)\Leftrightarrow(x>-4)-C;(x+4<0)\Leftrightarrow(x<-4)-C_1.$
$(x-1>0)\Leftrightarrow(x>1)-D;(x-1<0)\Leftrightarrow(x<1)-D_1.(x+2>0)\Leftrightarrow(x>-2)-E;(x+2<0)\Leftrightarrow(x<-2)-E_1.$
Prima inecuație a sistemului se va scrie: $ABC\vee A_1B_1C\vee A_1C_1B\vee AC_1B_1$.
A doua inecuație a sistemului se va scrie: $D_1E_1A_1\vee DEA_1\vee DAE_1\vee EAD_1$.
Vom verifica adevărul fiecărui termen al celor două sume obținute:
$ABC:(x>3)(x>-5)(x>-4)\Leftrightarrow(x>3)\Leftrightarrow A;A_1B_1C:(x<3)(x<-5)(x>-4)\Leftrightarrow 0;$
$A_1BC_1:(x<3)(x>-5)(x<-4)\Leftrightarrow(x>-5)(x<-4)\Leftrightarrow BC_1;AB_1C_1:(x>3)(x<-5)(x<-4)\Leftrightarrow 0;$
$D_1E_1A_1:(x<1)(x<-2)(x<3)\Leftrightarrow(x<-2)\Leftrightarrow E_1;DEA_1:(x>1)(x>-2)(x<3)\Leftrightarrow(x>1)(x<3)\Leftrightarrow DA_1;$
$DAE_1:(x>1)(x>3)(x<-2)\Leftrightarrow 0;EAD_1:(x>-2)(x>3)(x<1)\Leftrightarrow 0.$
Prin urmare:
$$\begin{cases} \dfrac{(x-3)(x+5)}{x+4}>0 \\ (x-1)(x+2)(x-3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow (A\vee BC_1)\wedge(E_1\vee DA_1)\Leftrightarrow AE_1\vee AA_1D\vee BC_1E_1\vee A_1BC_1D\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AE_1\vee BC_1E_1\vee A_1BC_1D\Leftrightarrow(x>3)(x<-2)\vee(x>-5)(x<-4)(x<-2)\vee(x<3)(x>-5)(x<-4)(x>1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0\vee(x>-5)(x<-4)\vee 0\Leftrightarrow(x>-5)(x<-4).$$
$R:-5<x<-4$.

BIBLIOGRAFIE**:**

1. Calmuțchi L. *Metodologia rezolvării ecuațiilor şi inecuațiilor cu parametri.* Chişinău: UST, 2010. 22p.
2. Hariton A. *Teoremă, condiție necesară şi suficientă*. Chişinău: UST, 2007. 145p.