

CZU: 378.147:004

ASPECTE METODICE PRIVIND STUDIAREA COMPARTIMENTULUI „INTEGRAREA NUMERICĂ” PRIN IMPLEMENTAREA MAPLET-urilor

Natalia BOBEICA, conferențiar universitar doctor

Catedra ITI, Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. Sunt examinate unele aspecte didactice privind eficiența aplicațiilor TIC, în special a Maplet-urilor, în procesul de predare-învățare a cursului de Metode numerice. Sunt evidențiate conexiunile dintre instrumentele didactice și implementarea noilor tehnologii informaționale.

Cuvinte-cheie: sistem software matematic, integrare numerică, Maplet, Maplet Builder.

METHODOLOGICAL ASPECTS ON THE STUDING OF "NUMERICAL INTEGRATION" WITH THE IMPLEMENTATION OF THE MAPLES

Abstract. Some educational aspects are examined, regarding the effectiveness of the IT applications, in special of Maplets, in the teaching-learning process of the numerical methods course. The connections between educational tools and implementation of the new informational technologies are highlighted.

Keywords: mathematical software, numerical integration, Maplet, Maplet Builder.

1. Modernizarea sistemului educațional prin prisma implementării tehnologiilor informaționale

Educația în perspectiva noilor tehnologii a deschis noi direcții și orientări în procesul instructiv-educativ. Implementarea noilor tehnologii informaționale în educație se extinde extrem de repede în aproape toate domeniile și devine caracteristică pentru tinerele generații. Utilizarea acestora în orice domeniu, inclusiv și în învățământ, reprezintă un avantaj de bază prin nelimitarea cantității de informație folosită. Dominanta procesului de învățare devine individualizarea, renunțându-se tot mai mult la standardizare.

Învățământul tradițional avea o paradigmă de tip liniar. Informația se transmitea de la profesor la elev de regulă unidirecțional. Procesul de predare-învățare contemporan axat pe tehnologia digitală este direcționat în ambele sensuri. Apare o nouă paradigmă de învățare, prin care elevul sau studentul nu mai este un spectator pasiv, un receptor care asimilează informația nerealizând un feed-back corespunzător, aceasta reprezentând, de fapt baza unui proces educațional eficient [1, 2].

Tehnologiile digitale determină un nou tip de abordare a fenomenului educațional prin intermediul noilor mecanisme și instrumente ale comunicării și informației. Astfel, se construiește o nouă educație care este definită de unii cercetători în domeniu ca: ”*pedagogie media*”. Aplicabilitatea și forța de impact generată de tehnologiile digitale determină implementarea lor pe scară largă. Avantajul în cazul noilor tehnologii este gradul ridicat de receptivitate al studenților, consumatori activi de tehnologii digitale.

În societatea de astăzi, profesorul are rolul de a pune resursele la dispoziția *celui care învață*, pentru ca acesta să lucreze pe cont propriu. Aceste resurse trebuie organizate

astfel încât să inspire studentul, să-l ajute în învățare, să-i stimuleze formarea de capacități de gândire.

Tehnologia modernă este folosită în scop de resursă și trebuie să fie conectată elementelor de conținut disciplinar și să aibă ca scop realizarea obiectivelor urmărite prin unitatea de învățare.

Există mai multe sisteme software matematice care ar putea fi utilizate în procesul de predare-învățare din învățământul universitar: Mathematica, Matlab, Mathcad, Derive, Reduce, Maple, etc. Este necesar de menționat faptul că unul dintre cele mai populare software utilizate în sistemul universitar este Maple.

Astfel, putem scoate în evidență unele idei, (Figura 1), în ceea ce privesc noile paradigme de utilizare ale software-lor matematice în informatică cum ar fi:



Figura 1. Noi paradigme de utilizare a sistemelor software matematice în informatică

Pentru ca procesul de predare-învățare să devină eficient, pentru orice subiecte care țin de disciplina ”*Metode numerice*” în general și ”*Integrarea numerică*”, în particular, este necesar de a utiliza un număr cât mai mare de instrumente didactice cu implementarea maximă a tehnologiilor informaționale moderne. Eficiența procesului dat poate să crească continuu introducând și perfecționând noi instrumente didactice în conexiune strânsă cu implementarea noilor tehnologii informaționale. În cadrul procesului instructiv-educativ, implementarea software-ului Maple, în particular a Maplet-urilor, generează noi oportunități și oferă avantaje suplimentare la însușirea temei cercetate.

2. Aplicarea tehnologiilor informaționale în procesul de studiere a ”Metodelor numerice”

Pentru ca procesul de predare-învățare a ”*Metodelor numerice*” să devină eficient, este necesar de a utiliza un număr cât mai mare de instrumente didactice cu implementarea maximă a tehnologiilor informaționale moderne. Eficiența procesului dat

poate să crească continuu introducând și perfecționând noi instrumente didactice în conexiune strânsă cu implementarea noilor tehnologii informaționale.

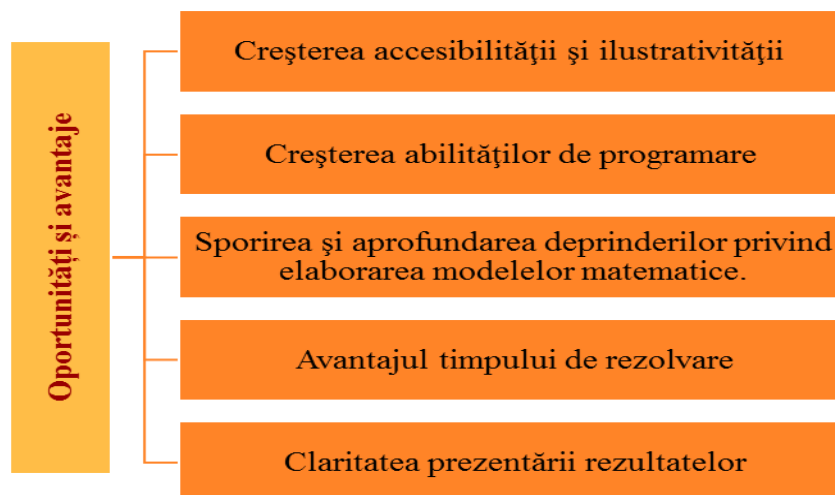


Figura 2. Oportunități și avantaje prin implementarea Maplet-urilor
În cadrul procesului instructiv-educativ, implementarea software-ului Maple, în particular a Maplet-urilor, generează noi oportunități și oferă avantaje suplimentare la însușirea temei cercetate. Avantajele țin de: creșterea accesibilităților și abilităților de programare, sporirea deprinderilor privind elaborarea modelelor matematice, timpul de rezolvare, claritatea prezentării rezultatelor (Figura 2).

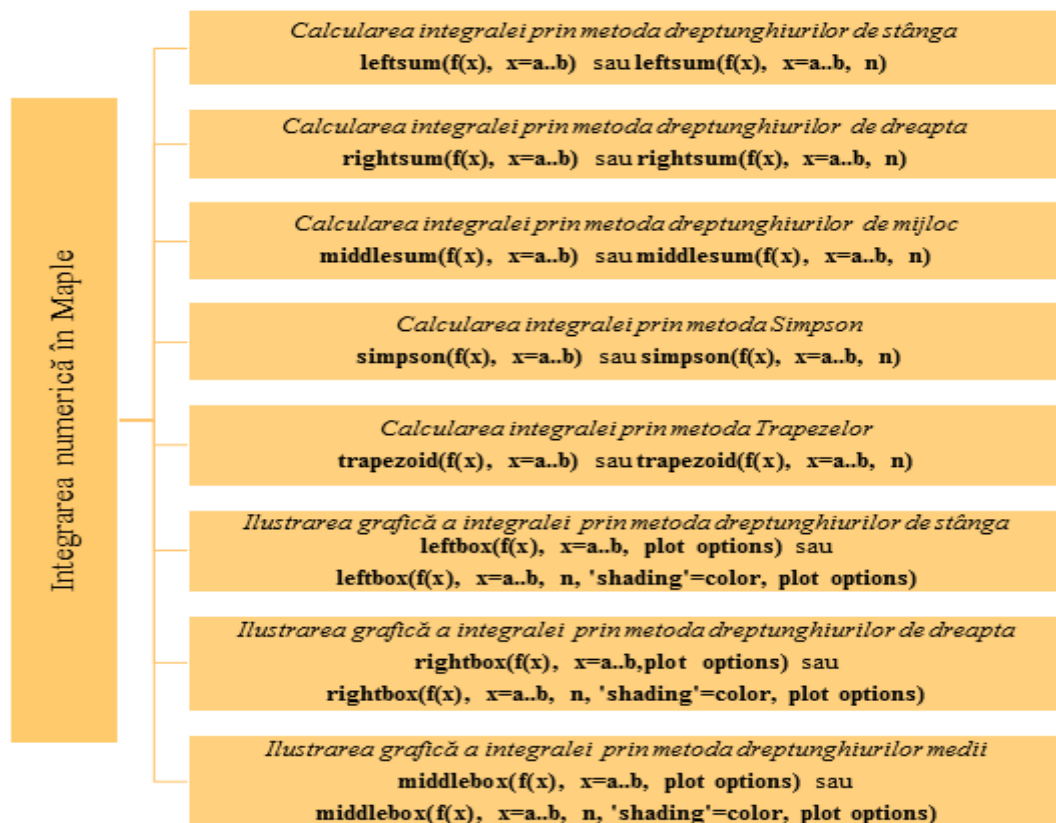


Figura 3. Comenzi Maple specifice pentru *Integrarea numerică*

În mod obișnuit la studierea „Metodelor numerice” în universități sunt folosite un număr restrâns de mecanisme și instrumente didactice ce presupun și aplicarea tehnologiilor digitale moderne. Eficiența procesului de predare-învățare crește continuu

odată cu îmbunătățirea și modernizarea instrumentelor didactice în conexiune cu implementarea tehnologiilor informaționale de ultimă oră.

În continuare vom exemplifica aplicarea software-ului Maple în procesul de studiere a compartimentului ”Integrarea numerică”, inclusiv prin intermediul Maplet-urilor [3, 4]. Scoatem în evidență unele comenzi Maple, care vor fi utilizate în procesul de studiere a integralei (Figura 3).

În comenzile de mai sus $f(x)$ este funcția de sub integrală, a și b reprezintă capetele segmentului $[a,b]$, iar n numărul de diviziuni al segmentului cercetat.

Să examinăm următoarele exemple:

Exemplul 1. Să se calculeze integrala definită $I = \int_1^5 \frac{x^2}{1+x} dx$, utilizând softul MAPLE, folosind formula dreptunghiurilor de stânga, dreapta, de mijloc, trapezelor și Simpson pentru $n=10$, pe intervalul $[1,5]$.

Rezolvare.

Metoda 1. Calcularea directă a integralei

Calculăm integrala respectivă utilizând funcția standard de calcul al integralelor $\text{int}(f(x), x=1..5)$.

Scriem în Maple funcția de sub integrală: $f := x * x / (1 + x);$

$$f := \frac{x^2}{1+x}$$

Aplicăm formula de calcul al integralei. $\text{Int}(f, x = 1 .. 5) = \text{evalf}(\text{int}(f, x = 1 .. 5));$

Astfel, am obținut:

$$\int_1^5 \frac{x^2}{1+x} dx = 9.098612289$$

Metoda 2. Aplicarea metodei dreptunghiurilor de stânga (MDS)

Relansăm pachetul ”student”.

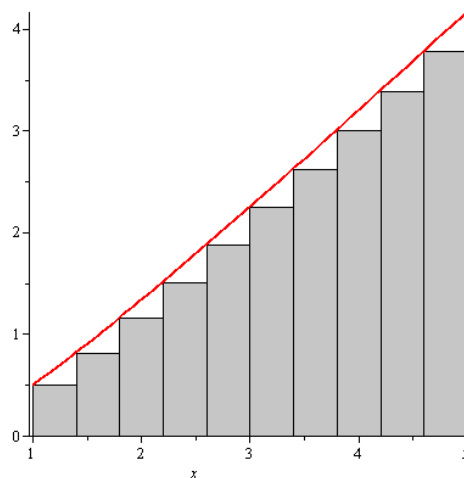
$\text{with}(\text{student}) : f := x \rightarrow \frac{x^2}{1+x};$

$$f := x \rightarrow \frac{x^2}{1+x}$$

Ilustrăm grafic integrala dată, construind dreptunghiurile de stânga folosind comanda **leftbox(f(x), x=a..b, plot options).**

$\text{leftbox}(f(x), x = 1 .. 5, 10);$

Calculăm aria trapezului curbiliniu obținut, folosind metoda dreptunghiurilor de stânga, aplicând formula **leftsum(f(x), x=a..b, n).**



$$\text{leftsum}(f(x), x=1..5, 10); \frac{2}{5} \sum_{i=0}^9 \frac{\left(1 + \frac{2}{5}i\right)^2}{2 + \frac{2}{5}i}$$

Rezultatul final este: *evalf(%)*; 8.368228992

Mai jos vom construi o secvență de valori. Astfel, se va diviza consecutiv segmentul $[a,b]=[1,5]$ utilizat la calcularea integralei, într-un număr de părți egale cu valorile din secvența *sir*. *sir* := $[seq(i^2, i=1..20)]$;

sir := [1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169,
196, 225, 256, 289, 324, 361, 400]

Aplicând comanda *seq*, formula **leftsum(f(x), x=a..b, n)**, secvența *sir* vom obține o nouă secvență de valori, care reprezintă valorile integralei, după formula dreptunghiurilor de stânga, pentru $n=1, 2, \dots, 400$.

seq(evalf(leftsum(f(x), x=1..5, n)), n=sir);

2.000000000, 7.283333333, 8.287435835, 8.641434368,
8.805752693, 8.895137129, 8.949075804,
8.984101288, 9.008122464, 9.025308584,
9.038026466, 9.047700654, 9.055230157,
9.061205037, 9.066025550, 9.069970977,
9.073240980, 9.075981365, 9.078300619,
9.080280807

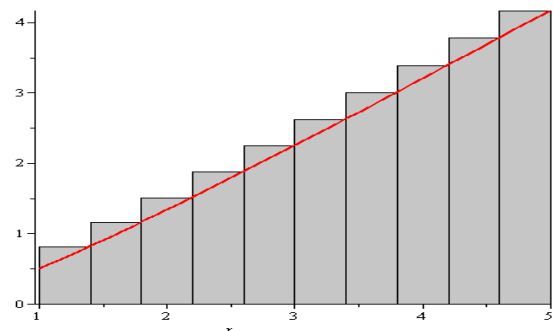
Metoda 3. Formula dreptunghiurilor de dreapta (MDD)

Ilustrăm grafic integrala dată, construind dreptunghiurile de dreapta folosind comanda **rightbox(f(x), x=a..b, plot options)**.

rightbox(f(x), x=1..5, 10);

Calculăm aria trapezului curbiliniu obținut folosind metoda dreptunghiurilor de dreapta, aplicând formula **rightsum(f(x), x=a..b, n)**.

rightsum(f(x), x=1..5, 10);



$$\frac{2}{5} \sum_{i=1}^{10} \frac{\left(1 + \frac{2}{5}i\right)^2}{2 + \frac{2}{5}i}$$

Rezultatul final este: *evalf(%)*; 9.834895660

Determinăm valorile funcției $f(x)$ pentru n egal cu valorile din secvența *sir*.

seq(evalf(rightsum(f(x), x=1..5, n)), n=sir);

16.66666667, 10.95000000, 9.917065466, 9.558101035,
 9.392419360, 9.302544537, 9.248395535,
 9.213267950, 9.189192425, 9.171975252,
 9.159238585, 9.149552504, 9.142015166,
 9.136034969, 9.131210735, 9.127262644,
 9.123990692, 9.121248854, 9.118928505,
 9.116947474

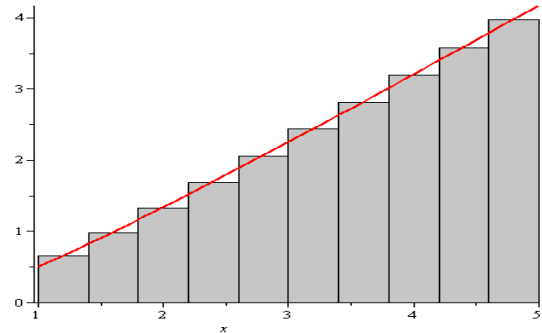
Metoda 4. Metoda dreptunghiurilor de mijloc (MDM)

Ilustrăm grafic integrala dată, construind dreptunghiurile de mijloc folosind comanda **middlebox(f(x), x=a..b, plot options)**.

middlebox(f(x), x=1..5, 10);

Calculăm aria trapezului curbiliniu obținut folosind metoda dreptunghiurilor de mijloc, aplicând formula **middlesum(f(x), x=a..b, n)**.

middlesum(f(x), x=1..5, 10);



$$\frac{2}{5} \sum_{i=0}^9 \frac{\left(\frac{6}{5} + \frac{2}{5}i\right)^2}{\frac{11}{5} + \frac{2}{5}i}$$

Rezultatul final este: *evalf(%)*; 9.097142096.

Determinăm valorile funcției $f(x)$ pentru n egal cu valorile din secvența *sir*.

seq(evalf(middlesum(f(x), x=1..5, n)), n=sir);

9.000000000, 9.089754690, 9.096800421, 9.098035330,
 9.098375546, 9.098498045, 9.098550604,
 9.098576125, 9.098589714, 9.098597476,
 9.098602172, 9.098605145, 9.098607099,
 9.098608435, 9.098609363, 9.098610028,
 9.098610515, 9.098610876, 9.098611152,
 9.098611363

Metoda 5. Formula trapezelor

Calculăm integrala aplicând formula trapezelor, folosind comanda **trapezoid(f(x), x=a..b, n)**.

trapezoid(x^2/(1+x), x=1..5, 10);

$$\frac{14}{15} + \frac{2}{5} \sum_{i=1}^9 \frac{\left(1 + \frac{2}{5}i\right)^2}{2 + \frac{2}{5}i}$$

Rezultatul final este: *evalf(%)* 9.10156232.

Metoda 6. Metoda Simpson

Calculăm integrala folosind metoda Simpson, aplicând comanda **simpson(f(x), x=a..b, n)**.

$\text{simpson}(x^2 / (1 + x), x = 1 \dots 5, 10);$

$$\frac{28}{45} + \frac{8}{15} \sum_{i=1}^5 \frac{\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^2}{\frac{8}{5} + \frac{4}{5}i} + \frac{4}{15} \sum_{i=1}^4 \frac{\left(1 + \frac{4}{5}i\right)^2}{2 + \frac{4}{5}i}$$

Rezultatul final este: $\text{evalf}(\%)$. 9.09866059

Astfel, am obținut următoarele rezultate:

Tabelul 1. Analiza rezultatelor metodelor examinate

Integrala	Comanda directă	MDS	MDD	MDM	Formula trapezelor	Formula Simpson
$I = \int_1^5 \frac{x^2}{1+x} dx$	9.09861	8.36822	9.83489	9.09714	9.10156	9.09866

Examinând tabelul de mai sus, observăm că rezultatul calculării integralei după formula Simpson aproape coincide cu rezultatul calculării directe a integralei respective. Astfel, am arătat practic că formula Simpson este mai exactă comparativ cu celelalte metode examinate. Acest fapt, este necesar să se scoată în evidență, atât la lecțiile teoretice, prin demonstrația și comparația termenelor de rest, cât și la cele practice.

Pentru o mai detaliată formă de afișare a rezultatelor, se poate apela la comanda $\text{ApproximateInt}(f(x), x = a..b, \text{opts})$, din pachetul $\text{Student[Calculus1]}$. Inițializarea căruia se efectuează astfel: $\text{with}(\text{Student[Calculus1]})$ [5]. În comanda respectivă $f(x)$ este funcția de sub integrală, a și b reprezintă capetele segmentului $[a,b]$, iar opts conține opțiuni de utilizare în calcul, cum ar fi:

- ✓ **metoda aleasă:** $\text{method}=\text{bode}, \text{left}, \text{lower}, \text{midpoint}, \text{newtoncotes}[\text{posint}], \text{random}, \text{right}, \text{simpson}, \text{simpson}[3/8], \text{trapezoid}, \text{upper};$
- ✓ **tipul de afișare a rezultatului:** $\text{output}=\text{plot}$ sau animation , plot – reprezintă grafic metoda selectată, iar opțiunea animation permite să se observe divizarea segmentului pentru metoda selectată;
- ✓ **numărul de diviziuni al segmentului $[a, b]$:** $\text{partition}=n$: În mod implicit $n=10$.

Pentru a demonstra aplicabilitatea și ilustrativitatea acestor comenzi se vor prezenta câteva exemple.

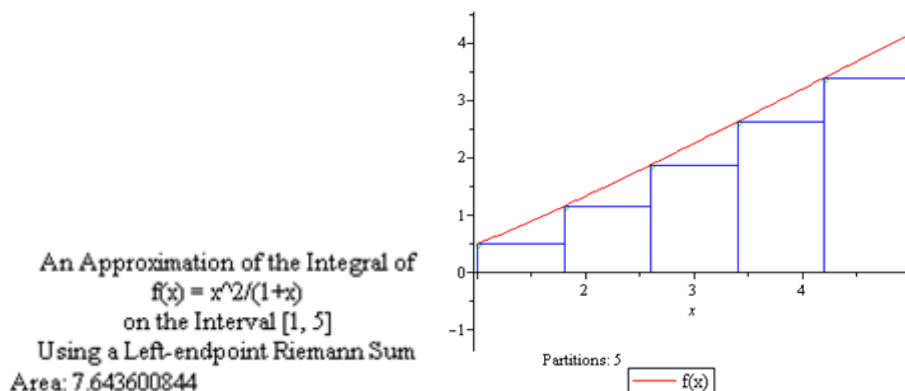
Exemplul 2. În acest exemplu se va soluționa aceeași integrală, după metoda dreptunghiurilor de dreapta, cu divizarea segmentului $[a,b]$ în 15 părți. Rezultatul se va afișa sub formă de sumă.

$\text{ApproximateInt}\left(\frac{x^2}{(1+x)}, x = 1 \dots 5, \text{method} = \text{right}, \text{output} = \text{sum}, \text{partition} = 15\right)$

$$\frac{4}{15} \sum_{i=1}^{15} \frac{\left(1 + \frac{4}{15}i\right)^2}{2 + \frac{4}{15}i}$$

Exemplul 3. În exemplul respectiv se va soluționa aceeași integrală, după metoda dreptunghiurilor de stânga, cu divizarea segmentului $[a,b]$ în 5 părți. Rezultatul se va afișa sub formă de grafic.

$$\text{ApproximateInt}\left(\frac{x^2}{(1+x)}, x = 1..5, \text{method} = \text{left}, \text{output} = \text{plot}, \text{partition} = 5\right)$$



3. Aplicarea Maplet-urilor la studierea compartimentului ”Integrarea numerică”

În continuare se vor cerceta, din punct de vedere metodic, câteva probleme, ce țin de compartimentul ”Integrarea numerică”. Soluționarea acestora se va face prin implementarea Maplet-urilor, strategie didactică, care presupune aplicarea componentelor unui Maplet și a comenzilor standard ce țin de tematica respectivă.

Un *Maplet* poate fi definit ca o aplicație ce reprezintă o interfață grafică ce permite accesul interactiv la softul Maple prin intermediul butoanelor, etichetelor, căsuțelor de dialog, etc. Pentru a defini un Maplet se poate alege una din cele două opțiuni: *Maplet Builder* bazat pe interfața grafică sau pachetul *Maplets* bazat pe sintaxă. O aplicație-*Maplet*, bazată pe sintaxă, poate fi construită după inițializarea pachetului *with(Maplets[Elements])* și lansată în execuție cu comanda *Maplets[Display]*. *Maplet Builder* este utilizat pentru crearea Maplet-urilor simple. Pachetul *Maplets* permite controlul unor aplicații-Maplet mai complicate. Rămâne la dorința utilizatorului să aleagă, după necesitate, modul de definire și creare a unui Maplet.

Astfel, pentru elaborarea unui Maplet la tema ”Integrarea numerică”, vor fi utilizate funcțiile pachetului *Student*, funcții care devin active după inițializarea pachetului respectiv la scrierea comenzii *with(Student)*. De asemenea vor fi activate pachetele *Student[Calculus1]*, *Maplets[Elements]* etc.

Exemplul 4. Să se creeze un Maplet ce va avea drept scop calcularea integralei nedefinite pentru o funcție arbitrară.

Soluție. În acest scop se vor realiza următorii pași:

- 1) Se va împărți forma de lucru în trei zone, selectând valoarea 3 pentru proprietatea *numrow* a elementului *BoxColumn1*;
- 2) În prima zonă se va aduce o etichetă *Label1* modificând textul *Int(f(x))* și un element *TextField1*. După dorință și necesitate se vor modifica proprietățile

- background* (culoarea fundalului elementului) și *foreground* (culoarea caracterelor elementului);
- 3) În zonă din mijloc se va plasa o etichetă *Label2* modificând textul în $(f(x))$ și un element *TextField2*;
 - 4) În zona a treia se vor aduce pe formă doua elemente de tip *Button* (*Button1* și *Button2*), modificând textul în *Execută* și *Ieșire* corespunzător;
 - 5) Se va deschide submeniul *OnClick* pentru elementul *Button1*, după care va selecta opțiunea *Evaluate*. În fereastra *Evaluate Expression*, în câmpul *Target*, se alege componenta în care se va afișa rezultatul. În cazul dat *TextField2*. În câmpul *Expresion* se culege expresia $\text{int}(\text{TextField1}, x)$, după care se tastează butonul OK;
 - 6) Se va deschide submeniul *OnClick* pentru elementul *Button2*, după care se va selecta opțiunea *CloseWindow*;
 - 7) Se va salva aplicația respectivă cu numele *Calcularea Integralei*, după care se va executa cu comada *Run*;
 - 8) Fereastra de execuție va avea forma de mai jos. Se va introduce funcția căreia i se va calcula integrala, după care se va tasta butonul *Execută*. Pentru a părăsi fereastra de execuție se alege butonul *Ieșire*.

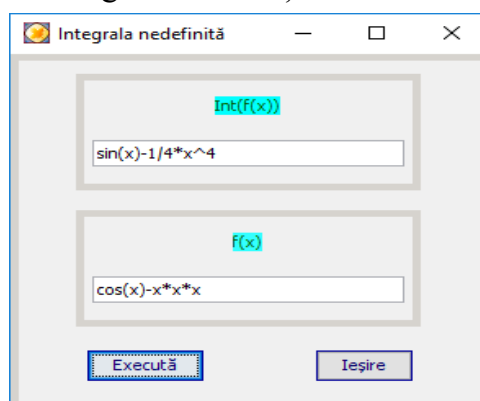


Figura 4. Fereastra de execuție pentru Exemplul 4

Exemplul 5. Să se creeze un Maplet ce va avea drept scop calcularea integralei definite, cu ajutorul funcției standard *int*, cunoscând funcția și limitele de integrare.

Soluție. În acest scop vor fi realizate următoarele:

- 1) Se va împărți forma de lucru în trei zone, selectând valoarea 3 pentru proprietatea *numrow* a elementului *BoxColumn1*;
- 2) Se va completa forma conform imaginii din figura 5.
- 3) Se va deschide submeniul *OnClick* pentru elementul *Button1*, după care se selectează opțiunea *Evaluate*.
- 4) În fereastra *Evaluate Expression*, în câmpul *Target*, se alege componenta în care se va afișa rezultatul. În cazul dat *TextField2*. În câmpul *Expresion* se culege expresia $\text{evalf}(\text{int}(\text{TextField1}, x = \text{TextField3}.. \text{TextField4}))$, după care se tastează butonul *Ok*;

- 5) Se va deschide submeniul *OnClick* pentru elementul *Button2*, după care se selectează opțiunea *CloseWindow*;

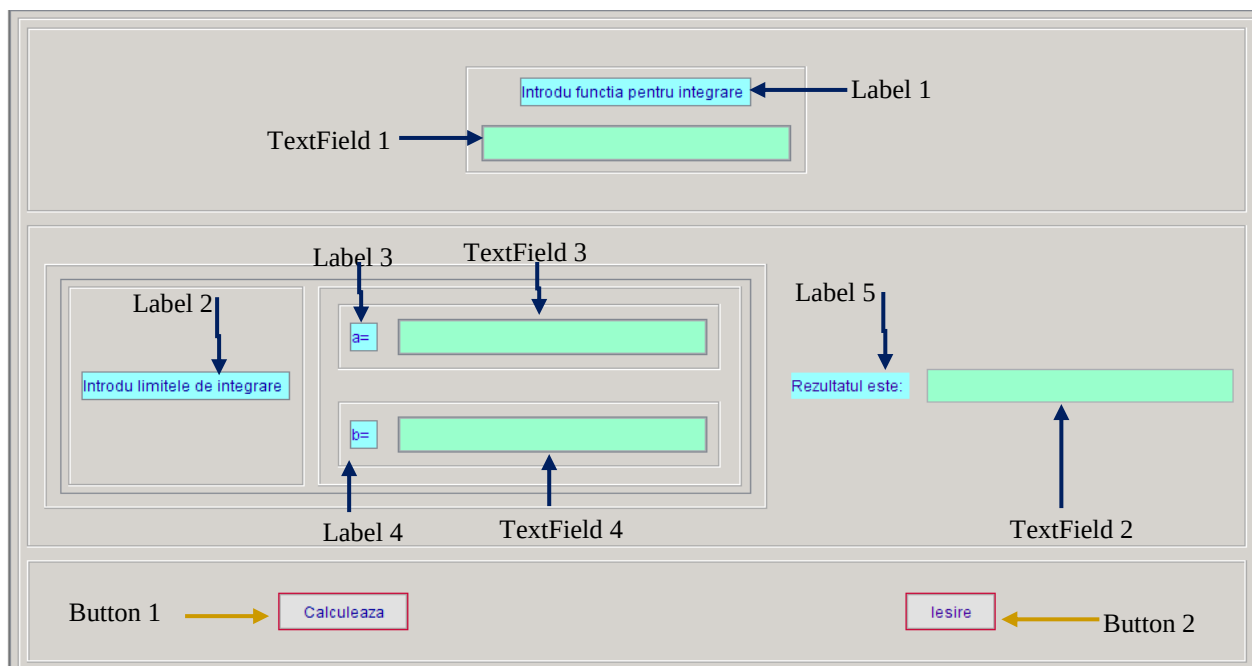


Figura 5. Componentele formei pentru Exemplul 5

- 6) Se salvează aplicația respectivă cu numele *Calcularea Integralei definite*, după care se execută cu comanda *Run*;
- 7) Fereastra de execuție va avea forma de mai jos. Se va introduce funcția căreia i se va calcula integrala, limitele de integrare, după care se tastează butonul *Calculează*. Pentru a părăsi fereastra de execuție se alege butonul *Ieșire*.

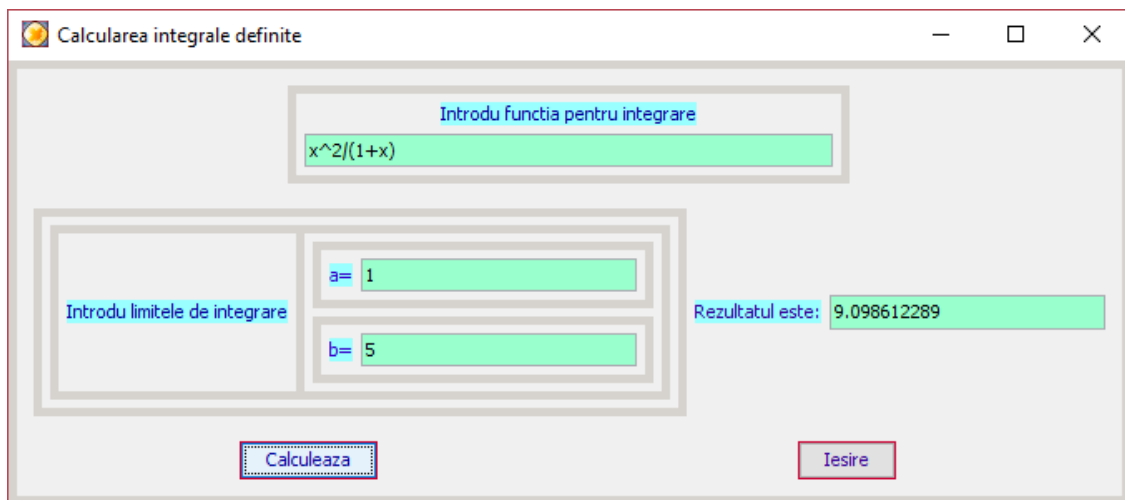


Figura 6. Fereastra de execuție pentru Exemplul 5

În procesul de realizare a aplicației respective studentul este în permanență implicat în procesul de studiere și își asumă responsabilitatea propriei învățări, dezvoltându-și abilități și deprinderi pentru a soluționa probleme cu un grad înalt de dificultate [6, 7]. Aplicația dată se realizează pe etape și utilizatorul are posibilitate să execute după fiecare pas Maplet-ul pentru a vizualiza rezultatul obținut. Cunoscând funcțiile standard,

definite pentru calculul integral în Maple, studentul poate independent realiza o aplicație-Maplet complexă și eficientă.

Astfel, efectuând o sinteză a celor prezentate mai sus putem conchide următoarele:

- Obiectivele centrale în cadrul predării-învățării oricărui compartiment din ”*Metode numerice*”, presupun însușirea metodelor și aplicarea lor la soluționarea unor probleme concrete. În cazul dat implementarea Maplet-urilor contribuie la formarea unei atitudini creative privind soluționarea integralelor prin diverse metode numerice.
- Softul Maple, în particular componenta Maplet, posedă posibilități mari și poate fi utilizat cu succes la predarea metodelor numerice. De exemplu, pentru a ilustra grafic anumite procese, pentru a verifica anumite rezultate este cu mult mai util și comod de folosit acest soft. În așa mod, nu se consumă timpul pentru calcule inutile și profesorul poate să pună accentul în exclusivitate pentru însușirea metodelor numerice.

Bibliografie

1. Buneci M. Metode Numerice. Lucrări de laborator. Editura Academica Brâncusi, 2003.
2. Chiriac L. Metode numerice. Editura Tipografia Centrală, 2014, CZU 519.6, ISBN 978-9975-53-300-3, 196 p.
3. Narayanan A. On Maplet development and programming tutorial for science and engineering student. Magnificat High School Ganapathy Narayanan. The University of Toledo, 2010.
4. Monagan M. B. ș. a. Maple Introductory Programming Guide. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. 2005.
5. Martha L. Abell and James B. Braselton. Maple by Example Third Edition. Elsevier Academic Press, 2005.
6. Mihălache L. Abordări metodice privind aplicarea complexă a tehnologiilor computaționale în procesul de predare-învățare a compartimentului „Modelare și metode de calcul” în cursul liceal de informatică. Teză de doctor în pedagogie, Chișinău, 2013.
7. Globa A. Abordări metodice privind implementarea noilor tehnologii informaționale în procesul de studiere a disciplinei universitare „Tehnici de programare”. Teză de doctor în științe pedagogie, Chișinău, 2016.