Acta et Commentationes, Sciences of Education, nr. 1(19), 2020 ISSN 1857-0623
p. 72-80 E-ISSN 2587-3636

CZU:372.853 DOI: 10.36120/2587-3636.v19i1.72-80

APLICAREA LEGILOR CONSERVĂRII LA REZOLVAREA PROBLEMELOR DINAMICII CORPURILOR CU LEGĂTURI

Mihail CERNEI, dr. conf. univ.

https://orcid.org/0000-0002-9343-0039

Mihail CALALB, dr. conf. univ.

https://orcid.org/0000-0002-3905-4781

Catedra Fizică Teoretică și Experimentală, Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. În lucrare se examinează o problemă de dinamică a unui sistem format din două corpuri legate – un puc și o pană. Reieșind din diagramele vectoriale pentru forțele, vitezele și accelerațiile corpurilor ce formează sistemul, sunt determinate toate mărimile fizice ce descriu mișcarea. În încheiere se propune o rezolvare rapidă, succintă, practic pe o pagină, fără a folosi legile dinamicii. Este arătat că rezolvarea unui astfel tip de probleme ține nemijlocit de conceptul *Învățării Active*.

Cuvinte-cheie: plan înclinat, sistem de corpuri legate, legile conservării, deplasare, viteză, accelerație.

APPLICATION OF CONSERVATION LAWS TO THE SOLVING OF DYNAMICS PROBLEMS WITH LINKED BODIES

Abstract. A problem of Dynamics for two linked bodies – a puck and a wedge is examined in this article. Based on the vector diagrams for the forces, speeds and accelerations of the bodies that make up the system, all physical quantities describing the movement are determined. Finally, a quick, short, one-page solution is proposed, without using the laws of dynamics. It is shown that solving such problems is directly related to the concept of Active Learning.

Keywords: inclined plane, system of linked bodies, laws of conservation, movement, speed, acceleration.

Introducere

În lucrarea de față se examinează diferite modalități de rezolvare a problemelor de dinamică pentru sistemele formate din corpuri legate. Este genul de probleme cu dificultate sporită, prezente deseori la olimpiade și concursuri naționale și internaționale. De exemplu, în lucrarea redactată de Mihail Sandu [1], se propun probleme de la olimpiade, concursuri și școli de vară organizate în România, unde este doar o singură problemă asemănătoare cu cea propusă în acest articol. În culegerea de probleme a lui Mihail Marinciuc ș.a. [2], se propun probleme asemănătoare, dar care nu necesită un grad avansat de analiză, cuprinzând toate aspectele posibile. Așa cum este unanim recunoscut, rolul rezolvării problemelor de fizică la formarea și asimilarea temeinică a cunoștințelor, la formarea deprinderilor de aplicare în practică a cunoștințelor, la structurarea cunoștințelor și a deprinderilor transversale – voință, creativitate, capacitate de efort intelectual de durată [3, 4], autorii acestei lucrări propun o problemă de dinamică a corpurilor legate, care înglobează în sine aproape toată dinamica. Menționăm că majoritatea problemelor de mișcare pe planul înclinat nu presupune și mișcarea corpului, care servește drept plan înclinat [5 – 7]. Considerăm că astfel de probleme, care analizează sisteme formate din corpuri legate, oferă o înțelegere mai profundă a fizicii și depășesc cu mult memorizarea mecanicistă a formulelor și legilor. Deseori o astfel de problemă poate înlocui cu succes o lucrare de laborator sau o experiență. Cu alte cuvinte, rezolvarea de probleme care necesită creativitate și abordare non-standard e mult mai aproape de conceptul *Învățării Active* decât repetarea de către elev a manipulărilor profesorului în timpul lucrării de laborator.

Problemă. Pe o suprafață orizontală netedă se află o pană caracterizată de masa M și unghiul de la bază α (Fig. 1). De la baza acestei pene este lansat să alunece pe pană un puc cu masa m și cu viteza inițială $\vec{v}_0$.

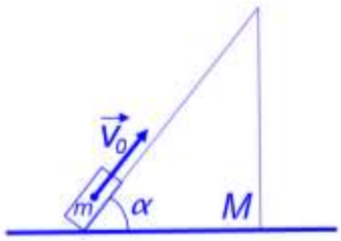

Figura 1. Poziția inițială a sistemului alcătuit dintr-o pană și un puc

În momentul de timp T_1 după lansare, pucul se ridică la înălțimea maximă H, viteza lui fiind în acest moment $^{v_0}/_{n}$. Considerând $n = 5$ și $cos\alpha = 0{,}6$, să se determine:

1. Raportul maselor $\frac{m}{M}$
2. Înălțimea maximă H
3. Timpul T_1
4. Timpul T_2 când pucul va coborî de pe pană pe masă
5. Vitezele ambelor corpuri în momentul de timp T_2
6. Cantitatea de căldură degajată la impactul pucului cu pana.

Rezolvare. Pucul participă simultan la două mișcări diferite: a) mișcarea relativă – față de suprafața penei și b) mișcarea împreună cu pana în direcția mișcării acesteia, pe care o vom numi mișcare de transport. Astfel, notăm prin $\vec{s}_r$, $\vec{v}_r$, $\vec{a}_r$ și, respectiv $\vec{s}_t$, $\vec{v}_t$, $\vec{a}_t$ – deplasările, vitezele și accelerațiile relative și de transport. Mișcarea penei e descrisă complet de vectorii $\vec{s}_r$, $\vec{v}_r$, $\vec{a}_r$, care sunt paraleli cu suprafața pe care se mișcă pana.

Examinăm mișcarea corpurilor în sistemul inerțial de referință (SIR) legat cu Pământul. Mișcarea pucului față de Pământ va fi descrisă de vectorii $\vec{s}_1$, $\vec{v}_1$, $\vec{a}_1$, pentru care putem scrie:

$$\vec{s}_1 = \vec{s}_r + \vec{s}_t \qquad \vec{v}_1 = \vec{v}_r + \vec{v}_t \qquad \vec{a}_1 = \vec{a}_r + \vec{a}_t \qquad (1).$$

Menționăm că în momentul inițial de timp ($t = 0$), pentru vectorii vitezelor, reieșind din (1) și datele problemei, vom avea:

$$\vec{v}_r(0) = \vec{v}_0;\ \vec{v}_t(0) = \vec{0};\ \vec{v}_1(0) = \vec{v}_r(0) = \vec{v}_0 \quad (2).$$

Acum, pornind de la legea II a lui Newton, determinăm accelerațiile folosind (1) (vezi Fig. 2).

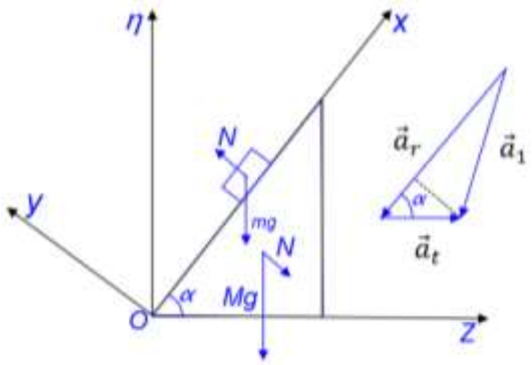

Figura 2. Forțele ce acționează în sistem și diagrama accelerațiilor

$$Nsin\alpha = Ma_t \qquad (3)$$

$$\text{OX:} \quad -mgsin\alpha = ma_{1x} \;\; a_{1x} = -gsin\alpha$$

$$\text{OY:} \quad N - mgcos\alpha = ma_{1y} \qquad N = mgcos\alpha + ma_{1y}$$

Ținând cont de (1), pentru a_{1x} și a_{1y} putem scrie:

$a_{1x} = a_{rx} + a_{tx} \qquad a_{1y} = a_{ry} + a_{ty}$ însă din Fig. 2 rezultă că:

$$a_{ry} = 0; \qquad a_{tx} = a_t cos\alpha; \quad a_{rx} = -a_r; \;\; a_{ty} = -a_t sin\alpha.$$

Deci:

$$\begin{matrix} a_{1x} = -a_r + a_t cos\alpha \\ a_{1y} = a_{ry} = -a_t sin\alpha \end{matrix} \quad \text{sau} \quad \begin{matrix} a_r = gsin\alpha + a_t cos\alpha \\ N = mgcos\alpha - ma_t sin\alpha \end{matrix}$$

Ultima relație obținută pentru N o înlocuim în (3) și obținem:

$$(mgcos\alpha - ma_t sin\alpha)sin\alpha = Ma_t$$

Astfel, pentru accelerația mișcării de transport a_t avem:

$$a_t = \frac{mgsin\alpha cos\alpha}{M + msin^2\alpha} \qquad (4).$$

Iar pentru proiecțiile accelerației a_1:

$$a_{1x} = -gsin\alpha \;\; (5)$$

$$a_{1y} = -\frac{mgsin^2\alpha cos\alpha}{M + msin^2\alpha} \qquad (6).$$

În același timp, pentru accelerația mișcării relative

$$a_{rx} = -a_r = -gsin\alpha - a_t cos\alpha = -gsin\alpha(1 + \frac{mgcos^2\alpha}{M + msin^2\alpha}); \; a_{ry} = 0$$

$$a_r = gsin\alpha(1 + \frac{M+m}{M + msin^2\alpha}) \qquad (7).$$

Observăm că toate mărimile din relațiile (4 – 7) nu se modifică. Altfel spus, deplasările relativă, absolută și de transport sunt funcții pătratice de timp, iar vitezele – funcții liniare. Găsim acum proiecțiile pe axa OZ a accelerațiilor acestor mișcări.

$$a_{tz} = a_t;$$

$$a_{1z} = -|a_{1y}|sin\alpha + |a_{1x}|cos\alpha = -\frac{mgsin^3\alpha cos\alpha}{M + msin^2\alpha} + gsin\alpha cos\alpha =$$

$$= gsin\alpha cos\alpha \left[-1 + \frac{msin^2\alpha}{M + msin^2\alpha}\right]$$

$$a_{1z} = -\frac{Mgsin\alpha cos\alpha}{M + m^2 sin^2\alpha} \qquad (8).$$

$$a_{rz} = -a_r cos\alpha = -gsin\alpha cos\alpha \frac{M+m}{M+msin^2\alpha} \qquad (9)$$

Cu ajutorul relației $a_{1z} = a_{rz} + a_{tz}$ verificăm aceste rezultate intermediare.

Examinăm acum proiecțiile accelerațiilor pe axa $O\eta$, care e perpendiculară pe OZ.

$a_{t\eta} = 0;$

$$a_{1\eta} = a_{1x}sin\alpha + a_{1y}cos\alpha = -a_{1y}sin^2\alpha = -\frac{mgsin^2\alpha cos^2\alpha}{M + msin^2\alpha}$$

$$= -gsin^2\alpha\left[-1 + \frac{mcos^2\alpha}{M + msin^2\alpha}\right]$$

În concluzie, pentru proiecțiile accelerației pe axa $O\eta$ putem scrie:

$$\begin{aligned} a_{1\eta} &= -gsin^2\alpha\left[-1 + \frac{mcos^2\alpha}{M+msin^2\alpha}\right] \\ a_{r\eta} &= -gsin^2\alpha\left[-1 + \frac{mcos^2\alpha}{M+msin^2\alpha}\right] \end{aligned} \qquad (10),$$

adică $a_{1\eta} = a_{r\eta}$. Aceasta corespunde relației $\vec{a}_1 = \vec{a}_r + \vec{a}_t$.

Pe de altă parte $a_{1\eta} = -a_1 sin\beta$, unde β este unghiul dintre orizontală și vectorul $\vec{a}_1$.

$$a_1^2 = a_{1x}^2 + a_{1y}^2 = g^2 sin^2\alpha\left[1 + \frac{m^2 sin^2\alpha cos^2\alpha}{(M + msin^2\alpha)^2}\right]$$

$$a_1 = gsin\alpha\sqrt{1 + \frac{m^2sin^2\alpha cos^2\alpha}{(M+msin^2\alpha)^2}}.$$

$$sin\beta = -\frac{a_{1\eta}}{a_1} = sin\alpha\frac{M+m}{\sqrt{(M+msin^2\alpha)^2+m^2sin^2\alpha cos^2\alpha}} = sin\alpha\frac{1+\frac{m}{M}}{\sqrt{\left(\frac{M}{m}+sin^2\alpha\right)^2+sin^2\alpha cos^2\alpha}} \qquad (11).$$

Observăm că indiferent de raportul $\frac{M}{m}$ și valoarea unghiului α,

$$sin\beta > sin\alpha; \beta > \alpha \qquad (12).$$

$$\sqrt{\left(\frac{M}{m} + sin^2\alpha\right)^2 + sin^2\alpha cos^2\alpha} \le \sqrt{\left(\frac{M}{m} + sin^2\alpha\right)^2}$$

$$\frac{M}{m} + sin\alpha \le \frac{M}{m} + 1, \text{ deci } \frac{1+\frac{m}{M}}{\sqrt{\left(\frac{M}{m}+sin^2\alpha\right)^2+sin^2\alpha cos^2\alpha}} \ge 1 \ (13).$$

Egalitatea în (13) are loc când $\alpha = 0$, atunci $\alpha = \beta = 0$. De asemenea, în cazul $M \to \infty$ $(M \gg m)$, obținem $\beta = \alpha$, și atunci: $\vec{a}_t = 0$; $\vec{a}_1 = \vec{a}_r$; $N = mgcos\alpha$. Acesta corespunde cazului corpului lansat de la baza planului înclinat cu viteza $\vec{v}_0$.

Relațiile (4–13) au fost obținute reieșind din legile dinamicii.

După această analiză prealabilă a problemei, purcedem la calcularea mărimilor cerute în enunțul problemei, folosind diferite metode.

1. Determinăm raportul maselor $\frac{m}{M}$.

Metoda 1. În momentul de timp $t = T_1$,când înălțimea, la care a ajuns pucul, este maximală, proiecția vitezei pucului pe verticală (axa $O\eta$) este nulă, iar proiecția vitezei pucului pe orizontală $v_1 = v_z = \frac{v_0}{n}$ (Fig.3).

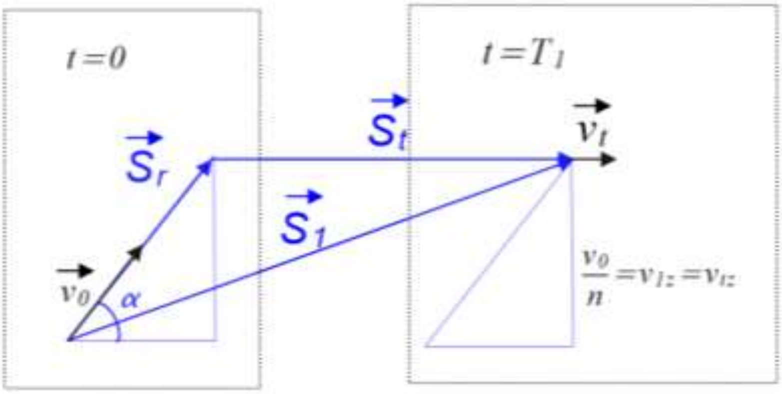

Figura 3. Diagrama vectorilor deplasărilor și vitezelor

Deoarece pucul se află pe pană $v_1 = \frac{v_0}{n} = a_t T_1$.

$$T_1 = \frac{v_0}{n a_t} \qquad (14).$$

$$v_{1\eta} = v_{r\eta} = v_{0\eta} + a_{1\eta} T = 0$$

$$0 = v_0 sin\alpha - g sin^2\alpha \frac{M+m}{M + m sin^2\alpha} \frac{v_0}{n a_t}$$

$$1 = \frac{M+m}{n m cos\alpha} \text{ sau } n m cos\alpha = M + m.$$

În final, obținem $\frac{m}{M} = \frac{1}{n cos\alpha - 1} = \frac{1}{2}$, sau $\frac{M}{m} = \; n cos\alpha - 1 = 2$ (15).

Metoda 2. Deoarece forțele de frecare lipsesc, impulsul se conservă în direcție orizontală.

$$v_z = v_{1z} = \frac{v_0}{n}. \; P_{0x} = P_x$$

$$P_{0x} = m v_0 cos\alpha; \quad P_x = (m+M)\frac{v_0}{n}.$$

$$m v_0 cos\alpha = (m+M)\frac{v_0}{n}$$

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{n cos\alpha - 1} \text{ ceea ce coincide cu (15).}$$

2. Determinăm acum înălțimea maximală H.

Metoda 1. Aplicăm formula Galilei pentru mișcarea pe axa $O\eta$. Obținem:

$$0 - v_{0\eta}^2 = 2 a_{1\eta} H; \text{ sau}$$

$$H = -\frac{v_{0\eta}^2}{2 a_{1\eta}} = \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{2 g sin\alpha} \frac{m + M sin^2\alpha}{m + M} = \frac{v_0^2}{2g} \frac{\frac{m}{M} + sin^2\alpha}{\frac{m}{M} + 1}$$

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \frac{n - cos\alpha}{n} = \frac{11}{25} \frac{v_0^2}{2g} \qquad (16)$$

Metoda 2. În lipsa forțelor de frecare, în sistem acționează doar forțele de greutate și elasticitate. Prin urmare, energia mecanică se conservă, adică $E_1 = E_2$. Unde:

$E_1 = \frac{1}{2} m v_0^2$ – energia cinetică a pucului în momentul lansării lui.

$E_2 = mgH + \frac{1}{2n^2} m v_0^2 + \frac{1}{2n^2} M v_0^2$ – energia potențială a corpului și energia cinetică a sistemului, compus din pană și puc, care ambele au aceeași viteză $\frac{v_0}{n}$.

Din relația

$$mv_0^2 = 2mgH + \frac{1}{n^2}mv_0^2 + \frac{1}{n^2}Mv_0^2 \text{ rezultă că}$$

$$H = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{M}{m}\frac{1}{n^2}\right) \text{ sau } H = \frac{v_0^2}{2g}\frac{n^2-1-\frac{M}{m}}{n^2} = \frac{v_0^2}{2g}\frac{n-cos\alpha}{n}$$

3. Determinăm acum momentul de timp T_1 când pucul atinge înălțimea maximală H.

Metoda 1. Din relația (14) obținem

$$T_1 = \frac{v_0}{na_t} = \frac{v_0}{n}\frac{M+msin^2\alpha}{mgsin\alpha cos\alpha} = \frac{v_0}{g}\frac{\frac{M}{m}+sin^2\alpha}{nsin\alpha cos\alpha} = \frac{v_0}{g}\frac{ncos\alpha-1+sin^2\alpha}{nsin\alpha cos\alpha} = \frac{v_0}{g}\frac{n-cos\alpha}{nsin\alpha} = \frac{11}{10}\frac{v_0}{g} \quad (17)$$

Metoda 2. Înălțimea H poate fi găsită și din relația $H = \frac{1}{2}\left|a_{1\eta}\right| T_1^2$, de unde:

$$T_1^2 = \frac{2H}{\left|a_{1\eta}\right|} = \frac{2v_0^2}{2g}\frac{n-cos\alpha}{n}\frac{M+msin^2\alpha}{gsin^2\alpha(M+m)}$$

$$T_1^2 = \frac{v_0^2}{g^2}\frac{n-cos\alpha}{n}\frac{\frac{M}{m}+sin^2\alpha}{sin^2\alpha\left(1+\frac{M}{m}\right)} = \frac{v_0^2}{g^2}\frac{n-cos\alpha}{nsin^2\alpha}\frac{ncos\alpha-1+sin^2\alpha}{ncos\alpha} =$$

$$= \frac{v_0^2}{g^2}\frac{n-cos\alpha}{nsin^2\alpha}\frac{n-cos\alpha}{n}$$

$$T_1 = \frac{v_0}{g}\frac{n-cos\alpha}{nsin\alpha} \quad (18)$$

4. Determinarea momentului de timp T_2, când pucul revine la baza penei.

Metoda 1. În momentului de timp T_2 deplasarea relativă $\vec{s}_r$ este nulă, adică

$$\vec{s}_r = \vec{v}_{0r}T_2 + \frac{1}{2}\vec{a}_t T_2^2 = 0$$

$$v_0T_2 - gsin\alpha\frac{M+m}{M+msin^2\alpha}\frac{1}{2}T_2^2 = 0$$

$$T_2 = \frac{2v_0}{gsin\alpha}\frac{M+msin^2\alpha}{M+m} = \frac{2v_0}{gsin\alpha}\frac{\frac{M}{m}+msin^2\alpha}{\frac{M}{m}+1} = \frac{2v_0}{gsin\alpha}\frac{ncos\alpha-cos^2\alpha}{ncos\alpha}$$

$$T_2 = \frac{2v_0}{g}\frac{n-cos\alpha}{nsin\alpha} = 2T_1 = \frac{11}{5}\frac{v_0}{g} \quad (19)$$

Metoda 2. În momentul de timp T_2 deplasările $\vec{s}_1$ și $\vec{s}_2$ sunt egale, adică

$$\vec{v}_0T_2 + \frac{1}{2}\vec{a}_1T_2^2 = \frac{1}{2}\vec{a}_tT_2^2;\ T_2 \neq 0$$

$$2\vec{v}_0 = (\vec{a}_t - \vec{a}_1)T_2$$

În proiecții pe axa OZ, avem: $2v_0cos\alpha = (a_t + |a_{1z}|)T_2$

$$T_2 = \frac{2v_0cos\alpha}{(a_2+|a_{1z}|)} = \frac{2v_0cos\alpha}{\frac{mgsin\alpha cos\alpha}{M+msin^2\alpha}+\frac{Mgsin\alpha cos\alpha}{M+msin^2\alpha}} = 2\frac{v_0}{g}\frac{M+msin^2\alpha}{(M+m)sin\alpha} =$$

$$= 2\frac{v_0}{g}\frac{n-cos\alpha}{nsin\alpha} \text{ sau } T_2 = 2T_1$$

Metoda 3. Pe verticală (axa $O\eta$) pucul se mișcă în sus și în jos cu aceeași accelerație $a_{1\eta} = a_{r\eta}$ timp de T_1 secunde în sus și, respectiv, T_1 secunde în jos, deci $T_2 = 2T_1$.

5. Determinarea vitezelor ambelor corpuri în diferite puncte ale traiectoriei lor.

Subliniem că pentru ca pucul să nu se desprindă de suprafața penei e necesar ca în orice moment al mișcării proiecțiile vitezelor și accelerațiilor pucului și ale penei pe axa OY să fie egale.

$$a_{1y} = a_{ty} = a_t sin\alpha = -\frac{mgsin^2\alpha cos\alpha}{M+msin^2\alpha} = -\frac{8}{55}g \qquad (20)$$

Aceasta rezultă din (4), (6).

În momentul coborârii pucului de pe pană viteza relativă v_r va fi

$$v_r = v_0 + a_r 2T_1 = v_0 - gsin\alpha\,\frac{M+m}{M+sin^2\alpha}\,2\,\frac{v_0}{g}\,\frac{n-cos\alpha}{nsin\alpha} =$$

$$= v_0 - 2\,v_0\,\frac{1+ncos\alpha-1}{ncos\alpha-cos^2\alpha}\,\frac{n-cos\alpha}{n} = v_0 - 2\,v_0 = -v_0 \qquad (21)$$

Astfel, cum era de așteptat, $v_r = -v_0$

$$v_{rz} = -v_0 cos\alpha = -0{,}6v_0$$

Proiecția vitezei absolute a pucului pe axa OZ va fi:

$$v_{1z} = v_{0z} + a_{1z}2T = v_0 cos\alpha - \frac{Mgsin\alpha cos\alpha}{M+m^2sin^2\alpha}\,2\,\frac{v_0}{g}\,\frac{n-cos\alpha}{nsin\alpha} =$$

$$= v_0 cos\alpha - 2v_0\,\frac{M}{m}\,\frac{cos\alpha}{\frac{M}{m}+sin^2\alpha}\,\frac{n-cos\alpha}{n} = v_0 cos\alpha - 2v_0\,\frac{1}{n}\,(ncos\alpha - 1) =$$

$$= v_0 cos\alpha - 2v_0\,cos\alpha + 2\frac{v_0}{n}$$

$$v_{1z} = -v_0\,cos\alpha + 2\frac{v_0}{n} = -0{,}2v_0 \qquad (22).$$

Menționăm că acest rezultat putea fi obținut și mai simplu, dacă considerăm că la revenirea pucului la baza penei viteza relativă va fi $\vec{v}_r = -\vec{v}_0$, iar viteza penei va fi

$$v_t = v_{tz} = 2T_1 a_z.$$

$$v_{tz} = 2T_1 a_z = 2\frac{v_0}{n} = 0{,}4v_0 \ (23)$$

Deci, $v_{1z} = v_{rz} + v_{tz} = -v_0\,cos\alpha + 2\frac{v_0}{n}$.

6. Determinarea cantității de căldură degajate în timpul impactului pucului cu pana.

Vom găsi această mărime aplicând legea conservării și variației energiei mecanice. Cunoscând proiecțiile vitezelor corpurilor după impact, calculăm energiile lor. Astfel, vom avea:

$E_0 = \frac{mv_0^2}{2}$ – energia cinetică a pucului până la impact.

$E_1 = \frac{mv_{1z}^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{2}{n} - cos\alpha\right)^2$ – energia cinetică a pucului după impact.

$E_t = \frac{Mv_{tz}^2}{2} = \frac{M}{2}\,\frac{4v_0^2}{n^2}$ – energia cinetică a penei după impact.

Calculăm energia E a sistemului puc – pană după impact.

$$E = E_1 + E_t = \frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{2}{n} - cos\alpha\right)^2 + \frac{4Mv_0^2}{n^2} = \frac{mv_0^2}{2}\left[\left(\frac{2}{n} - cos\alpha\right)^2 + 4\frac{M}{m}\,\frac{1}{n^2}\right] =$$

$$= \frac{mv_0^2}{2}\left[\left(\frac{2}{n} - cos\alpha\right)^2 + 4(ncos\alpha - 1)\ \frac{1}{n^2}\right] = \frac{mv_0^2}{2}cos^2\alpha.$$

Adică cantitatea de căldură Q degajată în urma impactului va fi:

$$Q = E_0 - E_1 = \frac{mv_0^2}{2}sin^2\alpha.$$

Acest rezultat poate fi obținut, reieșind din următorul raționament. După impactul pucului cu pana componenta vitezei pucului $v_{1\eta} = v_0 sin\alpha$ «dispare», iar pana nu obține viteză în această direcție. Deci, energia mecanică «pierdută», adică transformată în căldură, va fi: $Q = \frac{mv_0^2}{2}sin^2\alpha$.

Partea energiei transformată în căldură va fi $p = \frac{Q}{E_0} = sin^2\alpha = 0{,}64$.

Încheiere și concluzii

În calitate de rezumat la această examinare a unei probleme de dinamică a corpurilor legate prezentăm o rezolvare succintă, pe o pagină, «fără dinamică».

1. Scriem legea conservării proiecției impulsului pe direcția orizontalei, pe care se mișcă pana: $mv_0 cos\alpha = (m + M)\, v_0/n$. Aici am folosit faptul că atunci când pucul se află la înălțimea maximală, viteza lui orizontală este egală cu cea a penei v_0/n. De unde obținem:

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{ncos\alpha - 1} = \frac{1}{2}. \qquad \frac{M}{m} = ncos\alpha - 1 = 2.$$

2. Din legea conservării energiei mecanice avem

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH + \frac{1}{2}(m + M)\frac{v_0^2}{n}$$

$$H = \frac{v_0^2}{g}\ \frac{n - cos\alpha}{n} = \ \frac{11}{25}\ \frac{v_0^2}{g}.$$

3. Corpurile se mișcă cu accelerații constante, deci vitezele lor medii pot fi calculate:

$$\vec{v}_{med}(t) = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}(t)}{2};\ \ H = v_{1\eta med}T_1; \qquad v_{1\eta med} = \frac{\vec{v}_0 sin\alpha}{2}$$

$$T_1 = \frac{2H}{v_0 sin\alpha} = \frac{v_0}{g}\frac{n - cos\alpha}{nsin\alpha} = \ \frac{11}{10}\ \frac{v_0}{g}.$$

4. Evident că timpul ridicării pucului pe pană T_1 va fi egal cu timpul coborârii lui de pe pană, adică $T_2 = 2T_1$.

5. Pentru vitezele ambelor corpuri în momentul de timp t putem scrie:

$$v_{tz}(t) = a_{tz}\, t\ ; v_{tz}(T_1) = \frac{v_0}{n}; \qquad v_{tz}(T_2) = 2\frac{v_0}{n}; \qquad v_{tz} = 2\frac{v_0}{n}.$$

Corpul revine la baza penei cu aceeași viteză relativă, pe care a avut-o inițial, dar orientată în sens opus (deoarece conform enunțului frecarea lipsește)

$$\vec{v}_r = -\vec{v}_0; \qquad v_{rz} = v_0 cos\alpha = 0{,}6\, v_0; \qquad v_{r\eta} = -v_0 sin\alpha = \ -0{,}8\, v_0$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_r + \vec{v}_t; \quad v_{1z} = -v_0 cos\alpha + \frac{2v_0}{n} = \ -0{,}2\, v_0; \quad v_{1\eta} = -v_0 sin\alpha = \ -0{,}8\, v_0.$$

6. Energia cinetică a mișcării oricărui corp într-un plan întotdeauna poate fi reprezentată ca suma energiilor cinetice a două mișcări reciproc perpendiculare.

$$v_1^2 = v_{1\eta}^2 + v_{1z}^2 = v_0^2.$$

În urma impactului cu pana corpul și-a pierdut componenta verticală a vitezei $\Delta v_{1\eta} = v_0 sin\alpha$, deci pierderea de energie este $\Delta E = Q = \frac{mv_0^2 sin^2\alpha}{2}$, iar «randamentul» este $p = \frac{Q}{E_0} = sin^2\alpha = 0,64$.

7. Accelerațiile corpurilor

$$a_z = \frac{\frac{v_0}{n} - 0}{T_1} = \frac{v_0}{nT_1} = \frac{v_0 g}{nv_0}\frac{nsin\alpha}{n - cos\alpha} = g\frac{sin\alpha}{n - cos\alpha} = \frac{2}{11}g.$$

$$a_{tz} = a_z = \frac{2}{11}g$$

$$a_r = \frac{v_0}{T_1} = g\frac{nsin\alpha}{n - cos\alpha} = na_z = \frac{10}{11}g.$$

$$a_1^2 = a_t^2 + a_r^2 - 2a_t a_r cos\alpha = a_r^2(n^2 + 1 - 2ncos\alpha).$$

$$a_1 = a_r\sqrt{n^2 + 1 - 2ncos\alpha} = \frac{4\sqrt{5}}{11}g.$$

8. Distanțele parcurse de corpuri

$$d_1 = v_{rmed}2T_1 = \frac{1}{2}v_0 2T_1 = v_0 T_1. \qquad \text{(Control } \tfrac{1}{2}d_1 sin\alpha = H\text{)}.$$

$$d_1 = v_0\frac{v_0}{g}\frac{n - cos\alpha}{nsin\alpha} = \frac{11}{10}\frac{v_0^2}{g}$$

$$d_2 = \frac{v_0}{n}2T_1 = \frac{v_0}{n}\frac{2v_0}{g}\frac{n - cos\alpha}{nsin\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}\frac{n - cos\alpha}{n^2 sin^2\alpha} = \frac{11}{20}\frac{v_0^2}{g}.$$

Bibliografie

1. Sandu M. Probleme de performanță în fizică. București: Editura Tehnică, 1992. 340 p., ISBN: 973-31-0409-9.
2. Marinciuc M. et al. Fizica. Culegere de probleme. Cl. X – XII. Chișinău: Editura Lyceum, 2008. 250 p. ISBN: 978-9975-48-018-5.
3. Tereja E. Metodica generală de predare: fizica. Chișinău: Editura ARC, 2001. 295 p. ISBN: 9975-61-174-5.
4. Ciascai L. Didactica fizicii. București: Editura Corint, 2007. 144 p. ISBN: 978-973-135-043-1.
5. Любимов К. В. Я решу задачу по физике! М.: Просвещение, 2003. 160 с. ISBN: 5-09-010512-X.
6. Балаш В. А. Задачи по физике и методы их решения. М.: Просвещение, 1983. 432 с. ББК 74.265.1 Б20.
7. Țîuleanu D., Marcu C. et al. Probleme de fizică. Chișinău: Editura Tehnica-Info, 2007. 280 p. ISBN: 978-9975-910-31-6.

Lucrarea este efectuată în cadrul proiectului de cercetare aplicativă «EDUSCIENCE» 15817.06.10A, Studiul strategiilor didactice de aplicare a metodei investigărilor științifice în medii virtuale de învățare activă.