CZU: 372.851 DOI: 10.36120/2587-3636.v20i2.24-34

METODELE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ NONSTANDARD - FACTOR IMPORTANT ÎN FORMAREA COMPETENȚEI MATEMATICE LA ELEVI

Ilie LUPU, dr. hab., prof. univ.
https://orcid.org/0000-0003-1375-3071
Mihaela HAJDEU, doctorandă
https://orcid.org/0000-0001-8189-7558
Universitatea de Stat din Tiraspol

Abstract. În articol sunt propuse diverse metode de rezolvare a problemelor matematice cu un grad sporit de dificultate, constituind un suport științific și didactic, destinat elevilor dotați la matematică.

Cuvinte cheie: metodă, problemă nonstandard, proces didactic, activitate independentă, capacități intelectuale, elevi dotați, competență matematică.

THE METHODS OF SOLVING NONSTANDARD MATHEMATICAL PROBLEMS - AN IMPORTANT FACTOR IN THE FORMATION OF PUPILS' MATHEMATICAL COMPETENCE

Summary. In the article there are proposed various methods for solving a mathematical problem with an increased degree of difficulty, constituting a scientific and didactic support, intended for gifted pupils in mathematics.

Keywords: method, non-standard issue, teaching process, independent activity, intellectual abilities, gifted students, mathematical competence.

Matematica este considerată una din cele mai dificile discipline pentru majoritatea elevilor. Misiunea profesorului este de a face matematica mai atractivă, mai interesantă descoperind împreună cu elevii frumuseţea şi tainele acesteia inclusiv şi prin diversitatea metodelor de rezolvare a problemelor.

Elevii studiind cursul de matematică, rezolvă una și aceiași problemă prin mai multe metode, făcând analogie între ele, determină care-i cea mai rațională și eficientă.

Multe probleme admit câteva metode de rezolvare. Nu întotdeauna prima metodă este cea mai reușită. Determinarea celor mai originale metode de rezolvare deseori reprezintă rezultatul unei activități minuțioase de lungă durată, care contribuie în mare măsură la formarea competenței matematice la elevi.

Competența la matematică se definește drept capacitatea persoanei de a formula, a folosi și a interpreta matematica într-o varietate de contexte. Aici se include gândirea matematică și folosirea conceptelor, procedurilor, faptelor și instrumentelor matematice pentru a descrie, a explica și a prezice fenomene.

Iscusința de a rezolva probleme prin mai multe metode reprezintă unul din criteriile bunei pregătiri a elevilor la matematică ce poate aborda logică diverse probleme, dar în același schimb elevii în mod activ și accesibil însușesc noi deprinderi de a gândi creativ.

Instruirea elevilor de a determina câteva metode de rezolvare a problemei o considerăm ca o formă de organizare a procesului didactic pentru dezvoltarea capacităților intelectuale ale elevilor.

Rezolvarea problemei prin mai multe metode permite de a stabili dependența dintre diverse teme a cursului școlar de matematică. Firesc că fiecare idee originală de rezolvare trebuie considerată ca o calitate proprie a muncii elevului.

E timpul ca profesorii de matematică să rezolve probleme prin diverse metode, lucrând diferențiat cu elevii, elevii dotați, îndeosebi în clasele gimnaziale și liceale cu profil real.

Exemplul 1. Fie $a, b \in N$. Să demonstrăm că dacă $(a-b) \vdots 3$ atunci $(a^3-b^3) \vdots 9$.

Metoda I. Scriem diferența cuburilor astfel: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)==(a-b)[(a-b)^2+3ab]$. Deoarece $(a-b) \vdots 3$, atunci și $(a-b)^2 \vdots 3$ și evident $[(a-b)^2+3ab] \vdots 3$ și de aceea $(a^3-b^3) \vdots 9$.

Metoda II. Fie $a-b=3k$, unde $k \in N$, atunci $a=3k+b$, astfel $a^3-b^3==(3k+b)^3-b^3=27k^3+27k^2b+9kb^2=9k(3k^2+3kb+b^2) \vdots 9$. Prin urmare $(a^3-b^3) \vdots 9$.

Metoda III. Deoarece $a^3-b^3=(a-b)^3-3ab(a-b)$.

Este evident $(a-b)^3 \vdots 9, 3ab(a-b) \vdots 9$, atunci $(a^3-b^3) \vdots 9$.

Metoda IV. Deoarece $(a-b) \vdots 3$, atunci fiecare din numerele a și b fiind împărțite la 3 obținem restul r. Fie $a=3c+r, b=3d+r$. Prin urmare $a^3-b^3=$
$=(3c+3)^3-(3d+r)^3=27c^3+27c^2r+9r^2c+r^3-27d^3-27d^2r-$
$9dr^2-r^3=[9(3c^3++3c^2r+r^2c)-9(3d^2+3d^2r+r^2d)] \vdots 9$. Deci $(a^3-b^3) \vdots 9$.

Metoda V. Fie $a-b=3k$ și $k \in N$, atunci $(a-b)^3=27k^3, a^3-b^3=$
$=27k^3-3ab(a-b), a^3-b^3=27k^3-9abk$, prin urmare $(a^3-b^3) \vdots 9$.

Exemplul 2. Să demonstrăm că pentru orice număr natural n, numărul

$$a=3^{2(n+1)} \cdot 5^{2n}-3^{3n+2} \cdot 2^{2n} \text{ se divide cu } 117.$$

Metoda I.

$$a=3^{2n+2}(5^{2n}-3^n \cdot 2^{2n})=9 \cdot 3^{2n}(25^n-3^n \cdot 4^n)=9 \cdot 3^{2n}(25^n-12^n).$$

Deoarece $117=9 \cdot 13$ și diferența (25^n-12^n) se divide cu $25-12=13$, rezultă că $a \vdots 117$.

Metoda II. $a=3^2(3^{2n} \cdot 5^{2n}-3^{2n} \cdot 2^{2n})=3^2(9^n \cdot 25^n-9^n \cdot 4^n)=3^2(225^n--108^n)$.

Deoarece 225^n-108^n se divide cu diferența $225-108=117$, rezultă că $a \vdots 117$.

Exemplul 3. Să demonstrăm că pentru orice număr natural n,

$$(2n^3-3n^2++n) \vdots 6.$$

Metoda I.

$$2n^3-3n^2+n=(n^3-n)+(n^3-3n^2+2n)=n(n^2-1)+n(n^2-3n+2)=$$
$$=(n-1) \cdot n \cdot (n+1)+(n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Astfel am prezentat numărul dat a sumă a doi termeni, fiecare dintre ei fiind produsul a trei numere consecutive. Fiecare termen este divizibil cu 6, deci și numărul dat este divizibil cu 6.

Metoda II. Pentru $n = 0$ numărul dat se divide cu 6. Admitem că pentru $n = k$ numărul dat se divide cu 6, adică $2k^3 - 3k^2 + k = 6m$ (1), unde $m \in Z$.

Vom demonstra că dacă este justă afirmația (1), atunci $2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + 2k + +1$ se divide cu 6.

$$2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + 2k + 1 = 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 - 3k^2 - -6k - 3 + k + 1 = (2k^3 - 3k^2 + k) + 6k^2 = 6m + 6k^2 = = 6(m + k^2) \vdots 6.$$

Deci, conform principiului inducției matematice, afirmația este justă.

Exemplul 4. Să demonstrăm că dacă $a + \frac{1}{a} = 1$, atunci $a^5 + \frac{1}{a^5} = 1$.

Metoda I. Notăm $\frac{1}{a} = t$, atunci $a + t = 1$ și $at = 1$.

Însă $a^2 + t^2 = (a+t)2 - 2at = 1 - 2 = -1$.

$$a^3 + t^3 = (a+t)(a^2 - at + t^2) = a^2 - at + t^2 = (a^2 + t^2) - at = = -1 - 1 = -2.$$

$$a^5 + \frac{1}{a^5} = a^5 + t^5 = (a^2 + t^2)(\, a^3 + t^3) - a^2t^2(a+t) = = -1 \cdot (-2) - 1^2 \cdot 1 = 2 - 1 \ = 1.$$

Metoda II. Deoarece $a^2 - a + 1 = 0$, rezultă că $a^3 = -1$.

Deci $a^5 + \frac{1}{a^5} = a^3 \cdot a^2 + \frac{1}{a^3 \cdot a^2} = -\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = -\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + 2 =$
$= -1 + 2 = 1.$

Exemplul 5. Să demonstrăm că $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} > 3$, dacă $a > 0, b > 0, c > 0$ și
$a \neq b \neq c.$

Metoda I. Notăm $\frac{a}{b} = u, \frac{b}{c} = v, \frac{c}{a} = w,$ atunci $uvw = 1$, adică printre numerele u, v, w este cel puțin unul mai mic decât 1 și unul mai mare decât 1.

($u = v = w$ este imposibil, deoarece $a \neq b \neq c$).

Fie $u > 1$, iar $0 < v < 1$, adică:

$(1 - u)(v - 1) > 0 \Leftrightarrow -uv + u + v - 1 > 0$ (1).

Pe de altă parte, numerele u, v, w verifică inegalitatea $\frac{uv+w}{2} \geq \sqrt{uvw} = 1$, deci
$uv + w \geq 2$ (2). Adunând membru cu membru inegalitățile (1) și (2), obținem:

$$-uv + u + v - 1 + uv + w \geq 2 \Leftrightarrow u + v + w \geq 3 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Metoda II. Fie u, v și w numere pozitive și w cel mai mic dintre ele: $u > w,\ v > w$. Deoarece $u - w > 0$ și $v > w$, rezultă:

$$v(u - w) > w(u - w) \Leftrightarrow uv - vw + w^2 > uw.$$

Împărțind ultima inegalitate la uw, obținem: $\frac{v}{w} - \frac{v}{u} + \frac{w}{u} > 1$ (3).

Pe de altă parte $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2$ (4). Adunând membru cu membru inegalitățile (3) și (4) obținem $\frac{u}{v} + \frac{v}{w} + \frac{w}{u} > 3$.

Dacă c este cel mai mic dintre numerele a, b, c, notând $w = c, u = a, v = b,$ obținem inegalitatea cerută.

Dacă a și $b$sunt cele mai mici dintre numerele a, b și c, atunci notațiile se modifică.

Metoda III. Utilizând inegalitatea lui Cauchy, obținem:

$\frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)}{3} > \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} > 3.$

Exemplul 6. Să demonstrăm că $8(a^4 + b^4) \geq (a + b)^4$.

Metoda I. Deoarece $(a + b)^4 = a^4 + b^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3$, atunci inegalitatea cerută ia forma: $8(a^4 + b^4) \geq a^4 + b^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 \Leftrightarrow 7a^4 + +7b^4 - 4a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3 \geq 0 \ \Leftrightarrow 3\,(a^2 - b^2)^2 + +4(a^4 + b^4 - a^3b - ab^3) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(a^2 - b^2)^2 + 4(a - b)(a^3 - b^3) \geq 0$ (1).

Deoarece diferențele $(a - b)$ și $(a^3 - b^3)$ au același semn, rezultă că

$(a - b)(a^3 - b^3) \geq 0$. Prin urmre membrul stâng al inegalității (1) este nenegativ, deci inegalitatea (1) este adevărată, fiind adevărată și inegalitatea inițială.

Egalitatea se obține numai dacă $a = b$.

Metoda II. $a^4 + b^4 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)^2 \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^2 =$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a + b)^2 + \frac{1}{2}(a - b)^2\right]^2 \geq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a + b)^2\right]^2 = \frac{(a + b)^4}{8}$$

de unde $8(a^4 + b^4) \geq (a + b)^4$.

Metoda III. Avem $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ (2), deoarece $a^2 + b^2 \geq 2ab$. În mod analog $8(a^4 + b^4) \geq [2(a^2 + b^2)]^2$ (3).

Din (2) și (3) rezultă $8(a^4 + b^4) \geq (a + b)^4$.

Exemplul 7. Să demonstrăm că $-1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n \leq 1$, dacă $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = 1$ și $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots + b_n^2 = 1$.

Metoda I. Pentru orice valoare a lui x considerăm inegalitățile evidente:

$$(a_1x - b_1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a_1^2x^2 - 2a_1b_1x + b_1^2 \geq 0,$$
$$(a_2x - b_2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a_2^2x^2 - 2a_2b_2x + b_2^2 \geq 0,$$
$$(a_3x - b_3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a_3^2x^2 - 2a_3b_3x + b_3^2 \geq 0,$$
$$\ldots$$
$$(a_nx - b_n)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a_n^2x^2 - 2a_nb_nx + b_n^2.$$

Adunând membru cu membru inegalitățile din dreapta simbolului „⇔” și ținând cont că $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = 1$ și $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots + b_n^2 = 1$, obținem inegalitatea $x^2 - 2\,(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n)x + 1 \geq 0$ (1). Pentru ca inegalitatea (1) să fie verificată de orice valoare reală a lui x, este necesar și suficient ca discriminantul trinomului patrat din stânga inecuației (1) să fie mai mic sau egal cu zero, adică :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n)^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n \leq 1$, ceea ce trebuia de demonstrat.

Metoda II. Știm că pentru orice valori reale ale lui a și b are loc inegalitatea $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

Aplicând proprietatea numerelor reale
($|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|$), avem

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leq |a_1b_1| + |a_2b_2| + \cdots + |a_nb_n| \leq$$
$$\leq \frac{a_1^2 + b_1^2}{2} + \frac{a_2^2 + b_2^2}{2} + \cdots + \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = \frac{1}{2}[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2) +$$
$$+(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots + b_n^2)] = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Deci $-1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n \leq 1$.

Metoda III. Evident că $(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2 \geq 0$ (2), $(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2 \geq 0$ (3).

Notăm $x = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n$. În baza ipotezei problemei, scriem inegalitățile (2) și (3) astfel: $2 - 2x \geq 0$ (4), $2 + 2x \geq 0$ (5).

Din (4) și (5) obținem $-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + +a_nb_n \leq 1$.

Exemplul 8. Puterea pară a unui număr este egală cu un număr de patru cifre prima cifră a căruia este 3, iar ultima 5. Să determinăm acest număr.

Metoda I. Fie m un număr căutat, atunci $m^{2k} = (m^k)^2$. Din faptul că o putere arbitrară a numărului se termină cu 5 rezultă că orice putere a acestui număr se termină cu 5. De aceea $m^k = 10n + 5$.

Deci $m^{2k} = (10n + 5)^2 = 3 \cdot 10^3 + x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + 5$ sau $100n^2 + 100n + +25 = 3000 + 100x + 10y + 5$ (1). De aici rezultă că $y = 2$. Adunînd ambii termeni ai egalității (1) cu -25 și simplificînd prin 100, obținem: $n^2 + n = 30 + x$. Deoarece c este număr de o cifră , atunci $30 \leq 30 + x \leq 40$. Prin urmare $30 \leq n^2 + n < 40$, de unde $4 < n < 6$. Astfel n poate obține unica valoare 5 și de aceea numărul căutat este 55.

Metoda II. Deoarece $(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25$, atunci pentru a obține pătratul numărului care se termină cu cifra 5, este suficient să înlăturăm cifra 5, apoi să înmulțim numărul format din celelalte cifre cu numărul natural următor lui și la produsul obținut să scriem 25 la dreapta lui.

Utilizând prima metodă, observăm că puterea pară oricărui număr este pătratul unui număr. De aceea numărul de patru cifre din problemă are forma $\overline{3p25}$, unde , unde $\overline{3p}$

este produsul a două numere naturale consecutive. Însă $30 \leq \overline{3p} \leq 39$, deci $\overline{3p} = 5 \cdot 6$- unica soluție bosibilă. Astfel - unica soluție bosibilă. Astfel $3025 = 55^2$. Ținînd cont că egalitatea $m^k = 55$, pentru orice m și k naturali este posibilă numai pentru $k = 1, m = 55$, conchidem că numărul natural căutat este 55.

Exemplul 9. Să găsim un pătrat perfect de șase cifre știind, că dacă îl divizăm în două părți câte 3 cifre, atunci diferența numerelor obținute de 3 cifre la fel este un pătrat perfect. Se știe că unul din aceste numere este de 8 ori mai mare decât celălalt.

Metoda I. Fie numărul mai mic de 3 cifre este $m = 100a + 10b + c$. Atnci, din condițiile problemei, numărul al doilea de 3 cifre este $n = 800a + +80b + 8c$. De aici observăm că $a = 1$. Din condițiile problemei $n - m$ este un pătrat perfect, adică $700 + 70b + 7c = x^2$ (1). Deoarece diferența $n - m$ este un număr de trei cifre, atunci din (1) rezultă că $700 \leq x^2 \leq 1000$, $26 < x < 32$ (2). Din egalitatea (1) rezultă că x trebuie să fie divizibil cu 7, de aceea din (2) reiese că $x = 28$. Atfel $7m = x^2 = 784; m = 112, n = 896$. Prin urmare, numărul căutat este $112896 = 336^2$ sau 896112. Însă ultimul număr nu poate fi pătrat perfect, deoarece se termină cu cifra 2.

Metoda II. Fie că numărul căutat are forma $n = 1000x + y$ (x și y sunt numere de 3 cifre). Din condițiile problemei $x = 8y$ sau $y = 8x$. Dacă $x = 8y$, atunci $n = 8001y = 3^2 \cdot 7 \cdot 127y$. Deoarece numărul n este un pătrat perfect, atunci n trebuie să se dividă cu $3^2 \cdot 7^2 \cdot 127^2$ (deoarece 7 și 127 sunt numere prime), ceea ce este imposibil, deoarece n este un număr de 6 cifre.

Dacă $y = 8x$, atunci $n = 1008x = 3^2 \cdot 4^4 \cdot 7 \cdot x$, Prin urmare numărul n trebuie să fie divizibil cu $7 \cdot 1008$. Însă $y = 8x$ și de aceea prima cifră a numărului x (prin urmare și prima cifră a numărului n) este egală cu 1.

Astfel $100000 \leq n < 200000$. Ulterior avem $\frac{100000}{7056} \leq k = \frac{n}{7056} < \frac{200000}{7056}$ de unde $15 < k < 29$. Însă numărul $k = \frac{n}{7056}$ trebuie să fie un pătrat perfect ca raportul pătratelor perfecte, fiind un număr întreg. Prin urmare, $k = 16$ sau $k = 25$. Ușor putem verifica că $k \neq 25$. Deci $k = 16$ și numărul căutat este $n = 7056 \cdot 16 = 112896$.

Exemplul 10. Să demonstrăm că pentru orice $n \in N^*, 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$.

Metoda I. Se știe că $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + m^3 = \left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2$ (1). Prin urmare $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 + (2n)^3 = \left[\frac{2n(2n+1)}{2}\right]^2$ (2).

Scriem membrul stâng al egalității (2) astfel: $[1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3] + [2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3] = \left[\frac{2n(2n+1)}{2}\right]^2$ (3).

Notăm $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = s$ atunci egalitatea (3) devinde

$s + 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) = \left[\frac{2n(2n+1)}{2}\right]^2$ (4).

Luând în considerarea (1), din (4) obținem:

$$s + 8\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{2n(2n+1)}{2}\right]^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow s = n^2(n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = n^2(2n^2-1)$.

Metoda II. Utilizăm identitatea $(2m-1)^3 = 8m^3 - 12m^2 + 6m - 1$. Pentru $m = 1, m = 2, m = 3, \dots, m = n$ obținem:

$$1^3 = 8 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 1,$$
$$3^3 = 8 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 1, \quad (5)$$
$$5^3 = 8 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3 + 6 \cdot 3 - 1,$$
$$\dots$$
$$(2n-1)^3 = 8 \cdot n^3 - 12 \cdot n^2 + 6 \cdot n - 1.$$

Adunăm membru cu membru egalitățile (5) și obținem

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = 8(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) -$$
$$-12\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 6(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - n =$$
$$= 8\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 12\frac{\big(n(n+1)(2n+1)\big)}{6} + 6\frac{\big(n(n+1)\big)}{2} - n =$$

$= 2n^2(n+1) - 2n(n+1)(2n+1) + 3(n+1) - n = 2n^4 + 4n^3 + 2n^2 - -4n^3 - 6n^2 - 2n + 3n^2 + 3n - n = 2n^4 - n^2 = n^2(2n^2-1)$.

Exemplul 11. Să demonstrăm că $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}$.

Metoda I. Știm că $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, $\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$,

$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ (1), unde a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, iar $p = \frac{a+b+c}{2}$. Din (1) rezultă că $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{2}$, adică trebuie să demonstrăm că $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{2} \le \frac{1}{8}$.

Utilizând relația dintre media aritmetică și media geometrică, obținem: $\sqrt{(p-a)(p-b)} \le \frac{1}{2}[(p-a)+(p-b)]$ $\Leftrightarrow$(simbolul egalității este valabil numai pentru $a = b \Leftrightarrow \sqrt{(p-a)(p-b)} \le \frac{1}{2}(2p-a-b) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(p-a)(p-b)} \le \frac{c}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{c} \le \frac{1}{2} \ (2).$$

În mod analog $\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a} \le \frac{1}{2}$ (3), $\frac{\sqrt{(p-a)(p-c)}}{b} \ge \frac{1}{2}$ (4). Înmulțind membru cu membru egalitățile (2), (3) și (4) obținem:$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \le \frac{1}{8}$ ceea ce trebuia de demonstrat.

Metoda II. Știm că $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) - \frac{a^2}{2bc}$. Însă $\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \ge 2$, deci $\cos\alpha \ge 1 - \frac{a^2}{2bc} \Leftrightarrow 1 - \cos\alpha \le \frac{a^2}{bc} \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \le \frac{a^2}{2bc} \Leftrightarrow \sin\frac{\alpha}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}$ (5).

În mod analog $\sin\frac{\beta}{2} \leq \frac{b}{2\sqrt{ac}}$ (6), $\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{c}{2\sqrt{ab}}$ (7). Înmulțind membru cu membru inegalitățile (5), (6) și (7), obținem $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$. Egalitatea este valabilă numai pentru $\alpha = \beta = \gamma$.

Metoda III. Evident că $2\sqrt{ab} \leq a + b, 2\sqrt{bc} \leq b + c, \quad 2\sqrt{ac} \leq a + c$. Înmulțind membru cu membru ale acestei inagalități, avem:

$$8abc \leq (a + b)(b + c)(a + c) \text{ (8)}.$$

Se știe că $a = 2R\sin\alpha, b = 2R\sin\beta, c = 2R\sin\gamma$ (9), unde R este raza cercului circumscris triunghiului cu laturile a, b, c.

Din (8) și (9) $8\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq (\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\beta + \sin\gamma)(\sin\alpha + \sin\gamma)$ sau $64\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leq 8\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$.

Cum $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}, \sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos\frac{\beta}{2}$, avem:

$$8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}.$$

Însă $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leq 1, \cos\frac{\beta-\gamma}{2} \leq 1, \cos\frac{\alpha-\gamma}{2} \leq 1$.

Prin urmare, $8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$.

Metoda IV. $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{1}{2}\left[\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right] = -\frac{1}{2}\left[\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{1}{4}\left(\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - \right.\right.$ $\left.\left.-\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] = -\frac{1}{2}\left\{\left[\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{(\cos\frac{\alpha-\beta}{2})}{2}\right]^2 - \frac{\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{4}\right\} = \frac{1}{8}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \right.$ $\left.-\frac{(\cos\frac{\alpha-\beta}{2})}{2}\right]^2 \leq \frac{1}{8}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \leq \frac{1}{8}\cdot 1 = \frac{1}{8}$.

Exemplul 12. Aria unui dreptunghi este egală cu a^2. De calculat cea mai mică lungime a acestui dreptunghi.

Este evident că pentru a rezolva problema este suficient să demonstrăm că cea mai mică valoare a semi-perimetrului p a dreptunghiului este egală cu $2a$.

Metoda I. Fie că x și y sunt lungimile respective ale laturilor dreptunghiului. Deoarece $x \cdot y = a^2$ și $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$, atunci $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4a^2$. Expresia $(x + y)^2$ va obține cea mai mică valoare atunci și numai atunci când $x - y = 0$, adică atunci când $x = y$. În acest caz $x + y$ va obține cea mai mică valoare egală cu $2a$.

Metoda II. Fie x - lungimea laturii dreptunghiului, atunci lungimea celeilalte laturi va fi egală cu $p - x$ (p-lungimea semiperimetrului dreptunghiului), iar aria dreptunghiului $x(p - x)$. Astfel, $x(p - x) = a^2$ sau $x^2 + a^2 - px = 0$ sau $(x - a)^2 + x(2a - p) = 0$.

Ultima egalitate este posibilă numai pentru $2a - p \leq 0$, adică pentru $p \geq 2a$. Evident că cea mai mică valoare este $p = 2a$.

Metoda III. Fie x –lungimea laturii dreptunghiului, atunci lungimea laturii a doua este egală cu $\frac{a^2}{x}$, iar lungimea semiperimetrului este egală cu $\frac{a^2}{x} + x$.

Pentru a demonstra că $p \geq 2a$, este suficient să demonstrăm că $x + \frac{a^2}{x} - 2a \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 \geq 0 \Rightarrow (x-a)^2 \geq 0$-inegalitate adevărată.

Exemplul 13. Să calculăm soluțiile întregi ale ecuației $xy + 3\text{x} - 5\text{y} = -3$.
Scriem ecuația astfel: $3x + xy - 5y - 15 = -18$ sau $x(y+3) - 5(y+3) = -18$ sau $(x-5)(y+3) = -18$ sau $(y+3)(5-x) = 18$.

Numărul 18 poate fi reprezentat ca produs a 2 factori în 6 moduri:

$$1 \cdot 18; (-1) \cdot (-18); 2 \cdot 9; (-2) \cdot (-9); 3 \cdot 6; (-3) \cdot (-6).$$

Astfel vom obține 12 sisteme de ecuații:

1) $\begin{cases} 5-x=1 \\ y+3=18 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5-x=18 \\ y+3=1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5-x=-1 \\ y+3=-18 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5-x=-18 \\ y+3=-1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=4 \\ y=15 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-13 \\ y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=6 \\ y=-21 \end{cases}$; $\begin{cases} x=23 \\ y=-4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5-x=2 \\ y+3=9 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5-x=9 \\ y+3=2 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 5-x=-2 \\ y+3=-9 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5-x=-9 \\ y+3=-2 \end{cases}$

$\begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=7 \\ y=-12 \end{cases}$; $\begin{cases} x=14 \\ y=-5 \end{cases}$;

9) $\begin{cases} 5-x=3 \\ y+3=6 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 5-x=6 \\ y+3=3 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 5-x=-3 \\ y+3=-6 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 5-x=-6 \\ y+3=-3 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=8 \\ y=-9 \end{cases}$; $\begin{cases} x=11 \\ y=-6 \end{cases}$.

Răspuns: $(4,15); (-13,-2); (6,-21); (23,-4); (3,6); (-4,-1); (7,-12);$
$(14,-5); (2,3); (-1,0); (8,-9); (11,-6).$

Exemplul 14. Fie numerele complexe z_1, z_2 și z_3. Să demonstrăm că dacă $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ și $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, atunci punctele z_1, z_2, z_3 sunt vârfurile unui triunghi echilateral, înscris în cercul unitar.

Metoda I. Între numerele z_1, z_2, z_3 nu sunt două egale, deoarece, presupunând că $z_1 = z_2$, obținem $2z_1 = -z_3$.

Această egalitate este imposibilă, deoarece $|2z_1| = 2|z_1| = 2$, iar $|-z_3| = 1$.

Fie $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$, $z_3 = \cos\gamma + i\sin\gamma$, unde
$2\pi > \alpha > \beta > \gamma \geq 0$ (1).

Din condiția problemei $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ și de aceea

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0, \\ \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0, \end{cases} \text{(2) de unde } \begin{cases} 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = -\cos\gamma \\ 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = -\sin\gamma \end{cases} \text{(3).}$$

Ridicând la pătrat egalitățile (3) și adunându-le, obținem $4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=1$ sau $2[1+\cos(\alpha-\beta)]=1$, de unde $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$.

Deoarece $0<\alpha-\beta<2\pi$, rezultă că $\alpha-\beta=\frac{2\pi}{3}$ sau $\alpha-\beta=\frac{4\pi}{3}$.

1) Fie $\alpha-\beta=\frac{2\pi}{3}$, atunci $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

De aceea, din egalitățile (3), obținem $\begin{cases}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=-\cos\gamma\\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-\sin\gamma\end{cases}$ (4), de unde, ținând cont de egalitatea (1), avem $\frac{\alpha+\beta}{2}=\gamma+\pi$, deoarece $\frac{\alpha+\beta}{2}>\gamma$. Deci $\frac{\alpha+\beta}{2}=\gamma+\pi$, $\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\pi}{3}$; de aceea $\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}=(\gamma+\pi)-\frac{\pi}{3}$ sau $\alpha-\beta=\frac{2\pi}{3}$.

Astfel, $\alpha-\beta=\beta-\alpha=\frac{2\pi}{3}$ și $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, deci punctele z_1,z_2,z_3 sunt vârfurile triunghiului echilateral, înscris în cercul unitar.

2) Fie $\alpha-\beta=\frac{4\pi}{3}$. Atunci $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

Astfel, din egalitățile (3) rezultă: $\begin{cases}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\gamma\\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\gamma\end{cases}$ (5)

Egalitățile (5) sunt posibile, considerând (1) numai pentru $\frac{\alpha+\beta}{2}=\gamma$, ceea ce contrazice inegalității $\frac{\alpha+\beta}{2}>\gamma$. De aceea, $\alpha-\beta\neq\frac{4\pi}{3}$.

Astfel, este posibil numai cazul (1), când $\alpha-\beta=\frac{2\pi}{3}$.

Metoda II. Rezolvarea geometrică.

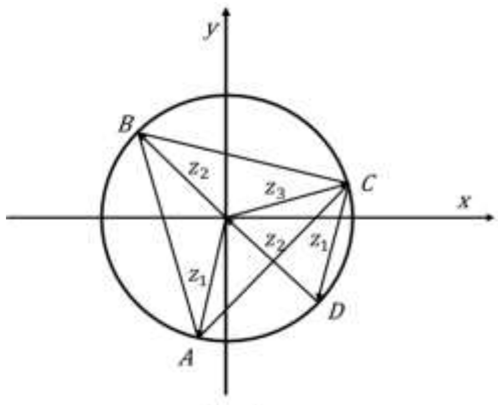

Fig. 1

Dacă adunăm vectorii ce reprezintă numerele z_1,z_2,z_3, obținem un triunghi echilateral, fiindcă $z_1+z_2+z_3=0$ și

$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Fie figura (1) este reprezentat cercul unitar și triunghiul echilateral OCD, obținut prin adunarea vectorilor z_1,z_2,z_3. Construind diametrul DOB și raza $OA=CD$, obținem punctele A,B,C, care reprezintă, respectiv, numerele z_1,z_2,z_3. Ele sunt vârfurile triunghiului echilateral înscris în cercul unitar.

Problemele propuse sunt diferite atât după conținut cât și după complexitatea lor. Reușita rezolvărilor lor depinde de studiul individual, inclusiv cel independent, fapt considerat ca o metodă tradițională de învățare. Pentru majoritatea elevilor, rezolvarea problemelor prin mai multe metode poate fi o muncă inutilă, fără sens. Sarcina profesorului este de a-i convinge de contrariul acestui lucru, de a-i include în activități de cercetare pentru a găsi diverse metode de soluționare a unei probleme. Dar, în primul rând, profesorul însuși trebuie să știe răspunsul la întrebarea despre ce beneficii pot lua elevii în procesul rezolvării unei probleme prin mai multe metode. După rezolvarea problemei printr-o metodă, știm deja rezultatul acesteia și, atunci când rezolvăm prin altă metodă, ne putem concentra nu pe obținerea răspunsului corect, ci pe metodă, adică cum să obții același rezultat într-un alt mod, poate mai rațional.

De obicei, diverse metode de rezolvare a problemelor sunt axate pe diferite sarcini care sunt selectate în mod specific, având soluțiile cele mai eficiente. Cu toate acestea, în opinia noastră, rezolvarea aceleiași probleme prin diverse metode ajută la o mai bună înțelegere a specificului problemei, a specificului unei sau altei metode, a avantajelor și dezavantajelor acesteia în funcție de conținutul sarcinii.

În plus, rezolvarea problemelor prin diferite metode scoate în evidență aspectul estetic al lecției și contribuie la formarea competențelor matematice la elevi. În condițiile actuale și în perspectivă, studiul individual capătă o importanță deosebită și reprezintă o modalitate de învățare dintre cele mai apreciate, mai utile și actuale activități intelectuale independente.

Bibliografie

1. Cerghit I. Metode de învățământ. Iași: Polirom, 2006, 315 p. ISBN: 973-46-0175-X.
2. Lupu I. Divizibilitatea numerelor: Teorie și practică. Chișinău: Ed. Prut Internațional, 2006. 114 p. ISBN: 978-9975-69-864-1
3. Lupu I. Metodologia rezolvării problemelor de demonstrație la matematică. Chișinău: Ed. Prut International, 2007.
4. Lupu I. Metodologia rezolvării problemelor de matematică cu un grad sporit de dificultate. Chișinău, 2011.
5. Бартенев Ф.А. Нестандартные задачи по алгебре. Москва: Просвещение, 1976. 94 с.