Acta et Commentationes, Sciences of Education, nr. 3(21), 2020 ISSN 1857-0623
p. 32-43 E-ISSN 2587-3636

CZU:37.016:51 DOI: 10.36120/2587-3636.v21i3.32-43

DEZVOLTAREA DEPRINDERILOR DE CERCETARE LA ELEVI ȘI STUDENȚI PRIN REZOLVAREA PROBLEMELOR GEOMETRICE DE MAXIM ȘI MINIM

Laurențiu CALMUȚCHI, prof. univ. dr. hab., UST
https://orcid.org/0000-0001-6665-7927

Rezumat. În acest articol aduc unele secvențe din istoria problemelor geometrice de maxim și minim. Sunt propuse un set de probleme rezolvate prin diverse metode elementare.
Cuvinte cheie: Problemă geometrică, minim, maxim, cercetare.

DEVELOPMENT OF RESEARCH SKILS IN STUDENTS AND STUDENTS BY SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS OF MAXIMUM AND MINIMUM

Abstract. In the article l bring some sequences from the history of geometric problems of maxima and minima. A set of problems solved by various elementary methods are proposed.
Keywords: Geometric problem, minimum, maximum, research.

Problemele de maxim și de minim în geometrie sunt tot atât de vechi ca și geometria însăși. Asemenea probleme au apărut din antichitate pentru măsurarea și împărțirea pământurilor agricole. Vreme îndelungată, pentru a determina ariile loturilor de pământ cultivate, se măsura numai perimetrele lor cu pasul, cu funii și apoi cu lanțuri, iar ariile loturilor mai mari erau apreciate după timpul în care li se putea face ocolul pe jos sau călare. Insulele râurilor sau fluviilor se măsurau după timpul în care erau ocolite cu barca, iar cele din mări, după timpul în care erau ocolite cu corăbiile. Pe atunci se credea că unui perimetru mai mare îi corespunde totdeauna o arie mai mare. Geometricienii au demonstrat de mult că această afirmație este greşită. Astfel, un dreptunghi cu dimensiunile de 50 m și respectiv 10 m are perimetrul de 120 m şi aria de 500 m^2 , pe cînd un pătrat cu latura de 30 m are perimetrul tot de 120 m, însă aria lui este de 900 m^2, aproape de două ori mai mare. Asemenea constatări au dus la aşa-zisa problemă a izoperimetrelor, adică la aflarea figurilor care au aria cea mai mare dintre acelea care au acelaşi perimetru. Se spune că Pitagora şi discipolii lui s-au ocupat de astfel de probleme şi că ei ar fi ajuns la concluzia că, dintre toate figurile plane cu acelaşi perimetru, aria cea mai mare o are cercul, iar dintre toate corpurile cu aceeaşi suprafaţă totală exterioară, cel mai mare volum îl are sfera. De aceea pitagoricienii considerau cercul şi sfera ca figuri corecte, figuri perfecte. Prin anul 200 î.e.n. matematicianul grec Apollonius a tratat unele probleme de maxim şi de minim. Pappus, în Cartea a V-a din „Colecţiunile" sale, se ocupă de probleme de izoperimetrie şi cercetează, pentru prima dată, probleme geometrie de izoperimetrie în spaţiu. El este primul care s-a ocupat de problema construcției celulelor albinelor, însă incomplet, referindu-se numai la forma lor hexagonală. De atunci nu s-au mai tratat decât din când în când probleme răzleţe de maxim şi de minim, până în secolul al XVlI-lea, când matematicienii au început să caute metode generale pentru rezolvarea unor asemenea probleme. Una dintre primele metode generale a fost propusă de excelentul matematician Fermat (1608— 1665), care a aplicat metoda lui şi la probleme de fizică. A descoperit astfel legile reflexiei şi ale refracţiei luminii, determinând timpul minim în care o rază de lumină trece de la un punct la altul, în acelaşi mediu sau în medii diferite. Metode generale de rezolvare a problemelor de maxim și minim au fost propuse de Newton și Leibniz. Aceste metode noi au făcut pe matematicieni să ocolească metodele sintetice ale geometriei elementare şi să adopte metode analitice, care duc, aproape în mod mecanic, la aflarea soluţiilor. Aplicarea acestei metode generale nu înseamnă că metodele elementare pot fi date uitării. Rezolvarea acestui tip de probleme, prin folosirea derivatei, nu întotdeauna este cea mai rațională. În multe cazuri se poate rezolva problema mai simplu și mai repede, aplicând metode elementare. De aceea elevii și studenții trebuie învățați să opereze cu diferite metode la rezolvarea aceleiași probleme și să fie acceptată, în fiecare caz concret, metoda cea mai rațională.

Pentru rezolvarea problemelor de maxim și minim pe cale geometrică elementară, nu se pot propune reguli și metode așa de generale și de precise cum se întâlnesc în algebră și îndeosebi, în analiză. În schimb, metodele geometriei elementare dezvoltă deprinderile de cercetare, gândirea logică, puterea de observație, intuiția geometrică și alte calități importante, iar soluția pe care o propune geometria elementară unor probleme de maximum și de minimum sunt uneori foarte simple sau de o frumusețe deosebită, pe când metodele analitice duc deseori la soluții obositoare. Problemele geometrice referitoare la determinarea valorilor extreme pe cale elementară pot fi rezolvate prin diferite metode: folosirea inegalităților și a funcțiilor trigonometrice, aplicarea proprietăților trinomului pătrat etc.

În manualele de matematică actuale, deși supraîncărcate, nu se acordă o atenție cuvenită unor astfel de probleme. Există totuși ieșire din această situație, dacă vom folosi orele facultative sau ședințele cercurilor de matematică. Probleme geometrice referitoare la valori extremale pot fi selectate din revistele „Математика в школе", „Квант", „Foaie matematică", manualele de geometrie ale autorilor: A.V. Pogorelov, A.H. Kolmogorov, Л.С. Atanasean etc.

În continuare, propunem unele exemple de atare probleme și ne vom convinge de varietatea metodelor de rezolvare a lor. Vom aplica doar metode elementare, fără a apela la derivata funcției.

1. a) În ce loc trebuie construit podul peste un râu, care desparte două sate A și B, astfel încât drumul $AMNB$ să fie cel mai scurt (malurile râului se consideră drepte paralele, iar podul, perpendicular la râu)?

b) Aceeași problemă, dacă satele A și B sunt despărțite de două râuri.

Soluție. a) Admitem problema rezolvată și translăm paralel segmentul MN, astfel încât punctul M să coincidă cu punctul A (Fig. 1). Atunci $|AM| = |N'N|$ și deci $|AM| +$

$|NB| = |N'N| + |NB|$. Astfel, drumul $AMNB$ va fi cel mai scurt atunci și numai atunci, când punctele N', N și B aparțin unei drepte.

Din cele stabilite urmează construcția: depunem din punctul A segmentul AN', lungimea căruia să fie egală cu lățimea râului și perpendicular la râu; unim punctul N' cu punctul B; punctul N de intersecție a segmentului $N'B$ cu malul râului mai apropiat de satul B va determina poziția podului.

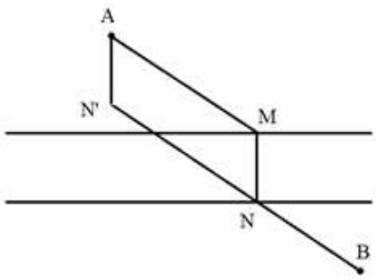

Figura 1

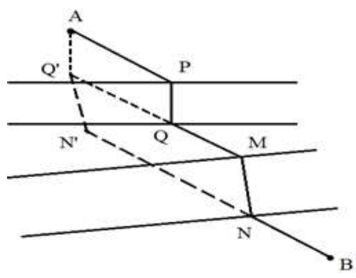

Figura 2

b) Fie acum satele A și B sunt despărțite de două râuri. Presupunând că problema este rezolvată și că PQ, MN sunt podurile peste râuri, translăm paralel segmentul PQ în poziția AQ', astfel încât extremitatea P să coincidă cu punctul A (Fig. 2). Atunci $|AP| = |Q'Q|$ și $|AP| + |QM| + |NB| = |Q'Q| + |QM| + |NB|$. Dacă drumul $APQMNB$ este cel mai scurt, atunci cel mai scurt va fi și drumul $Q'MNB$ între punctele Q' și B, despărțite numai de al doilea râu. Acest drum se construiește cum în cazul a).

Prin urmare, avem următoarea construcție: din punctul A depunem segmentul AQ' de lungimea lățimii primului râu și perpendicular la acesta; din punctul Q' depunem segmental $Q'N'$ de lungimea lățimii celui de-al doilea râu și perpendicular pe acesta. Unim punctul N' cu punctul B. Punctul N de intersecție a segmentului $N'B$ cu malul râului al doilea mai aproape de satul B determină poziția podului MN. Construim prin punctul M o paralelă la dreapta $N'B$. Această dreaptă intersectă malul mai aproape de M în punctul Q. Punctul Q determină poziția podului PQ peste primul râu.

2. Printr-un punct A exterior cercului $\omega(O, R)$ de construit o secantă ABC, astfel încât triunghiul BOC, baza căruia este coarda BC, să aibă aria maximă.

Soluție. Fie secanta ABC verifică condiția problemei [Fig. 3]. Aria triunghiului BOC este egală cu $\frac{R*|CH|}{2}$, unde $[CH] \perp [BO]$. Deoarece raza cercului este constantă, urmează că aria acestui triunghi va atinge valoarea cea mai mare atunci, când înălțimea $[CH]$ va obține valoarea cea mai mare. Evident, înălțimea dată obține valoarea cea mai mare egală cu R atunci, când $[CH] \perp [BO]$. Prin urmare, unghiul BOC în așa caz va fi unghi drept, iar $[BC]$ va fi latura pătratului înscris în cercul dat. Astfel, avem următoarea construcție: construim latura $[PQ]$ a pătratului înscris în cerc; din centrul O construim perpendiculara $[OK]$ pe latura$[PQ]$; cu raza $[OK]$ construim cercul concentric cu cercul dat; din punctul A construim tangentele ASE și ATL la cercul ω_1. Secantele AE și AL (satisfac condițiilor problemei). Problema dată întotdeauna are două soluții, deoarece dintr-un punct exterior cercului pot fi duse două tangente la cerc.

A doua metodă. Aria triunghiului BOC se poate calcula și prin altă metodă, anume: $S_{\Delta} = \frac{1}{2} R^2 sin\alpha$, unde α este mărimea unghiului BOC. Evident, aria triunghiului BOC primește valoarea maximă pentru $\alpha = 90°$, dar atunci $[BC]$ este latura pătratului înscris în cercul dat.

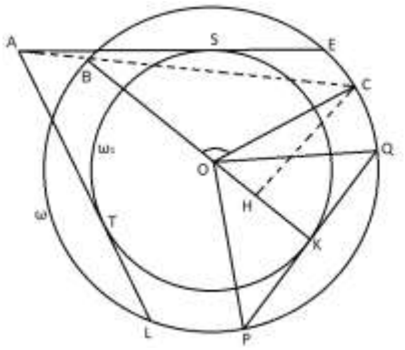

Figura 3

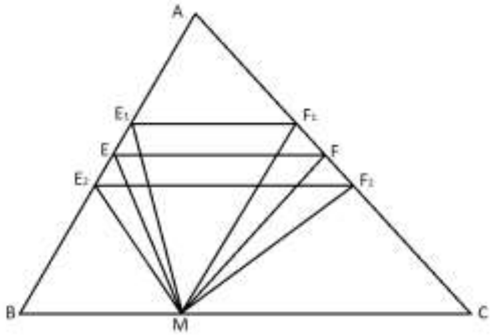

Figura 4

3. În triunghiul ABC pe baza $[BC]$ este dat un punct M. Se cere de construit $[EF] \parallel [BC]$, astfel încât aria triunghiului MFE să fie maximă (Fig. 4).

Soluție. Fie $|BC| = a$, iar h înălțimea triunghiului ABC dusă din vârful A. Dacă $[EF]$ este linia medie a triunghiului ABC paralelă la baza $[BC]$, atunci

$$S_{\Delta MEF} = \frac{1}{2} * \frac{a}{2} * \frac{h}{2} = \frac{ah}{8}$$

Să comparăm aria triunghiului MEF cu aria triunghiului ME_1F_1, unde $|E_1F_1| < |EF|$.Fie $|E_1F_1| = x$, iar distanța dintre pararlele $[EF]$ și $[E_1F_1]$ o notăm prin y. Din asemănarea triunghiurilor E_1AF_1 și ABC avem: $\frac{|E_1F_1|}{h_1} = \frac{a}{h}$, unde h_1- înălțimea triunghiului E_1AF_1 coborâtă din vârful A.

Din ultima egalitate obținem:

$$\frac{|E_1F_1|}{\frac{h}{2} - y} = \frac{a}{h}; \ \frac{x}{\frac{h}{2} - y} = \frac{a}{h}; \ x = \frac{a}{h}\left(\frac{h}{2} - y\right)$$

Prin urmare,

$$A_{\Delta ME_1F_1} = \frac{1}{2}\frac{a}{h}\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{a}{2h}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{ah}{8} - \frac{ay^2}{2h}$$

Din ultima egalitate urmează că aria triunghiului ME_1F_1 este mai mică decât aria triunghiului MEF.

Să comparăm acum aria triunghiului MEF cu aria triunghiului ME_2F_2, unde $|E_2F_2| > |EF|$ și $[E_2F_2] \parallel [BC]$.

Fie $|E_2F_2| = z$, iar distanța dintre paralelele $[EF]$ și $[E_2F_2]$ o notăm prin m. Din asemănarea triunghiurilor E_2AF_2 și ABC, obținem:

$$\frac{z}{\frac{h}{2} + m} = \frac{a}{h} \ ; z = \frac{a}{h}\left(\frac{h}{2} + m\right)$$

Atunci,

$$S_{\Delta E_2F_2M} = \frac{a}{2h}\left(\frac{h}{2}+m\right)\left(\frac{h}{2}-m\right) = \frac{ah}{8}-\frac{am^2}{2h} < \frac{ah}{8}$$

Prin urmare, cea mai mare arie are triunghiul EFM, unde EF este linia medie a triunghiului ABC, paralelă la baza $[BC]$.

4. Punctul M este situat în interiorul unghiului ascuțit AOB. Pe laturile unghiului determinat de punctele X şi Y, astfel încât perimetrul triunghiului MXY să fie minimal.

Rezolvare. Fie X şi Y (fig.5) sunt punctele căutate.

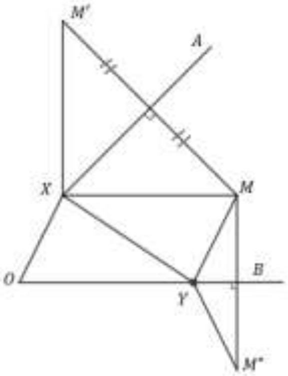

Figura 5

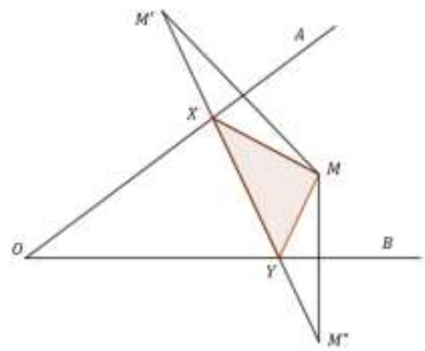

Figura 6

Să construim imaginile punctului M la simetriile în raport cu laturile unghiului. Fie M' imaginea punctului M în raport cu latura OA, iar $M"$ imaginea punctului M în raport cu latura OB. Atunci perimetrul triunghiului MXY va fi egal cu $|MX| + |XY| + |YM| = |M'X| + |XY| + |YM"|$. Aşadar, perimetrul triunghiului căutat reprezintă lungimea liniei frânte $M'XY M"$. Evident, această mărime va primi valoarea minimală atunci, cînd punctele M', X, Y şi $M"$ vor aparţine unei drepte, adică atunci cînd punctele X şi Y vor aparţine dreptei determinate de punctele M' şi $M"$.

Prin urmare, pentru determinarea punctelor X şi Y este sufucient de construit imaginile M' şi $M"$ a punctului M la simetriile în raport cu laturile unghiului AOB, să unim punctele M' şi $M"$ şi la intersecția segmentului $M'M"$ cu laturile unghiului determinăm punctele X şi Y (fig.6).

Triunghiul MXY este cel căutat. Probleme dată are întotdeauna o singură soluție.

5. Printr-un punct M din interiorul unghiului de construit o dreaptă, care să taie din unghi un triunghi cu cea mai mică arie (Fig. 7).n

Soluție. Fie Punctul M este situat în interiorul unghiului O. Prin punctul M construim o dreaptă, care intersectează laturile unghiului în punctele A și B, astfel încât $|AM| = |BM|$.

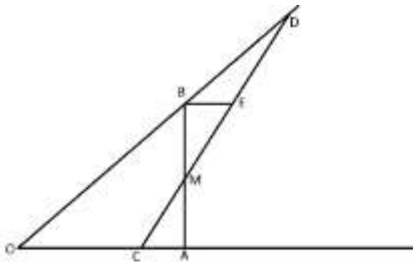

Figura 7

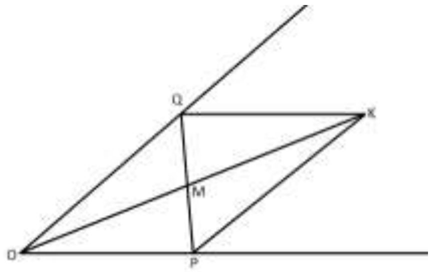

Figura 8

Construim prin punctul M o dreaptă arbitrară, care intersectează laturile unghiului în punctele C și D. Să demonstrăm că prima dreaptă construită taie din unghi triunghiul AOB cu aria cea mai mică. Fie $[BE] \parallel [OC]$. Evident, triunghiurile MBE și MAC sunt congruente. Prin urmare, aria triunghiului OAB este egală cu aria patrulaterului $ABEC$, care constituie doar o parte din triunghiul OCD. Așa dar triunghiul OAB are aria cea mai mică.

Construcția se face în felul următor: se construiește semidreapta $[OM)$; pe semidreapta $[OM)$ se depune segmentul $[MK]$ astfel încât $|MK| = |OM|$; prin punctul K se construiesc paralele la laturile unghiului și care intersectează aceste laturi în punctele P, Q; dreapta (PQ) este cea căutată (Fig. 4.).

6. Din extremitățile A și B a diametrului unui cerc sunt duse perpendiculare pe acest diametru (Fig.9), iar printr-un punct arbitrar K al semicercului este dusă tangenta (CD), unde C și D sunt punctele de intersecție a tangentei cu perpendicularele construite. Unde trebuie să fie punctul K, pentru ca aria trapezului obținut să fie cea mai mică?

Soluție. Aria $ABCD$ este egală cu suma ariilor triunghiurilor OBC, OCK, OKD, și ODA. Evident, $\Delta OBC \equiv \Delta OCK, \Delta OKD \equiv \Delta ODA$. Prin urmare, aria trapezului $ABCD$ este de două ori mai mare decât aria triunghiului OCD. Deci, $A_{ABCD} = |DC||OK| = |DC| * R$.

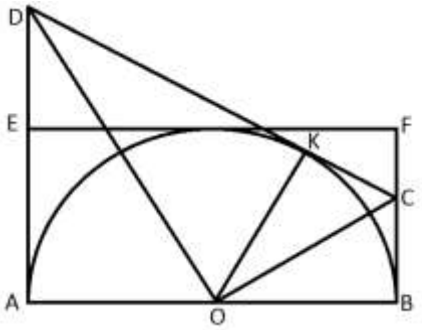

Figura 9

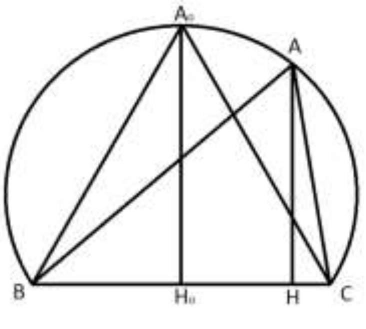

Figura10

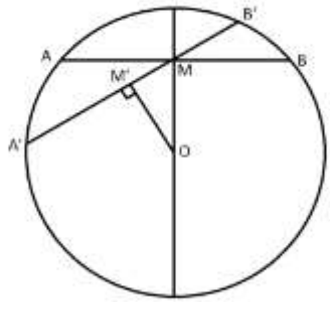

Figura 11

Prin urmare, aria trapezului va fi cea mai mică atunci, când cea mai mică va fi latura $[DC]$, adică pentru $[DC] \parallel [AB\ ]$. În acest caz trapezul $ABCD$ se transformă într-un dreptunghi: (dreptunghiul $AEFB$), aria căruia este egală cu $2R^2$.

7 Punctul M este situat în interiorul unui cerc (Fig 11.). De determinat cea mai mică coardă a cercului, ce trece prin punctul M.

Soluție. Evident, coarda cea mai mică a cercului, ce trece prin punctul interior M, este acea coardă a cercului, care este cea mai îndepărtată de centrul cercului. Fie coarda $[AB]$ trece prin punctul M perpendicular pe diametrul cercului, ce trece prin punctul M. Să demonstrăm, că anume coarda $[AB]$ are cea mică lungime. Într-adevăr, fie [A'B']o coardă arbitrară diferită de coarda $[AB]$și care de asemenea trece prin punctul M, iar [O'M'] ∥ [A'B'].Evident, $|O'M'| < |OM|$, deoarece $|O'M'|$ este distanța de la centrul cercului până la coarda [A'B'], iar $[OM]$ este oblică la coarda [A'B'] și totodată $|OM|$ este distanța de centrul cercului până la coarda $[AB]$. Deci, coarda $[AB]$este cea mai mică coarda ce trece prin punctul M.

8. De aflat care din triunghiurile ce au aceeași bază și aceeași mărime a unghiului de la vârful opus bazei are cea mai mare arie.

Soluție. Având în vedere, că dintre două triunghiuri, care au aceiași mărimea unghiului opus bazei, cea mai mare arie a o are acel triunghi, a cărui înălțime este mai mare, urmează că trebuie de aflat triunghiul cu cea mai mare înălțime. Locul geometric din care baza $[BC]$ a acestor triunghiuri se vede sub unul și același unghi reprezintă reunirea a două arce deschise simetrice în raport cu $[BC]$. Este suficient să cercetăm unul din aceste două arce, deoarece al doilea arc ne aduce la același rezultat (Fig.10). Dacă A_O este punctul de intersecție al unui din aceste două arce cu mediatoarea laturii $[BC]$, A-un punct arbitrar al arcului BA_oC și $[AH]$ înălțimea triunghiului ABC, atunci $|AH| < |A_OH_O|$ și prin urmare, înălțimea cea mai mare va fi $[A_OH_O]$.

Prin urmare, cea mai mare arie, în condițiile problemei, are triunghiul A_oBC.

9. Dintre toate patrulaterele înscrise într-un cerc, de aflat patrulaterul cu cea mai mare arie.

Soluție. Unim centrul cercului cu vârfurile patrulaterului. Astfel, obținem patru triunghiuri isoscele. Fiecare din aceste triunghiuri are aria maximală, când unghiul de la vârf este drept. Având în vedere că laturile laterale a triunghiurilor obținute au lungimea razei cercului, urmează că patrulaterul înscris cu aria maximală este un pătrat.

A doua metodă. Vom folosi formula $S = \frac{1}{2}d_1d_2sin\alpha,$ unde $d_1d_2$sunt lungimile diagonalelor, iar α este mărimea unghiului dintre diagonale. Fie R raza cercului circumscris patrulaterului. Deoarece $d_1 \leq 2R, d_2 \leq 2R$ $și$ $\sin\alpha \leq 1$ și, urmează că $S \leq 2R^2$, încât valoarea maximală pentru S se obține atunci și numai atunci, când $d_1 = d_2 = 2R, \alpha = 90°$. În aceste condiții patrulaterul înscris în cerc, are aria maximală atunci și numai atunci, când acest patrulater este un pătrat.

Uneori, la rezolvarea problemelor geometrice de maximum și minimum este util de folosit faptul că funcția *că funcția* $y = ax^2 + bx + c$ primește valori extreme pentru

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Pentru a rezolva problema geometrică de maximum și minimum, variabila independentă poate fi aleasă în câteva moduri și astfel obținem diferite expresii pentru funcția cercetată. O alegere perfectă a variabilei independente permite de a simplifica calculele și de a afla mai simplu soluția problemei.

10. Dintre toate dreptunghiurile înscrise într-un semicerc (o latură a dreptunghiului aparține diametrului semicercului) de aflat dreptunghiul cu aria mai mare.

Soluție. Fie în semicercul cu raza R și centrul O este înscris dreptunghiul $ABCD$ (Fig. 12).

Notăm $|BC| = x,$ atunci $|QA| = \sqrt{R^2 - x^2},\ 0 \leq x < R.$

Exprimăm aria dreptunghiului prin R și x:

$$S = 2x\sqrt{R^2 - x^2} = 2\sqrt{x^2(R^2 - x^2)}.$$

Astfel, problema se reduce la determinarea valorii maximale a funcției $x^2(R^2 - x^2)$ în intervalul $[0; R]$. Dacă notăm $x^2 = z$, atunci obținem $y = z(R^2 - z)$ .Ecuația $z(R^2 - z) = 0$ are soluțiile $z_1 = 0$ și $z_2 = R^2$. Prin urmare, funcția $y = z(R^2 - z)$ obține valoarea maximă pentru $z = \frac{R^2}{2}$, adică pentru $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Pentru $x = |BC| = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, obținem $|OB| = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ și $|AB| = 2|OB| = R\sqrt{2}$, adică o latură a dreptunghiului este de două ori mai mare decât cealaltă latură.

A doua metodă. Problema se rezolvă mult mai simplu, dacă în calitate de variabilă independentă considerăm mărimea unghiului COB. Notăm $m\sphericalangle COB = \alpha$. Atunci, $|BC| = R\ sin\alpha$ și $|OB| = R\ cos\alpha$. Prin urmare, $S = 2R^2 sin\alpha cos\alpha = R^2 sin2\alpha,$ unde $0 < \alpha < 90°$. Evident, $S_{max} = R^2$, pentru $\alpha = 45°$. Rezultatul primit ne permite să facem concluzia despre forma dreptunghiului și metoda de a fi construit.

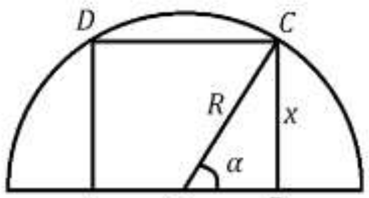

Figura 12

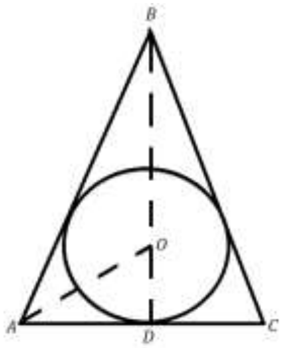

Figura 13

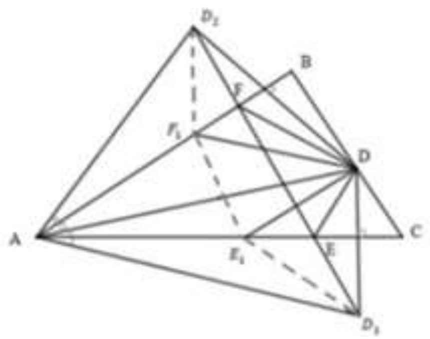

Figura 14

11. Sferei de rază r este circumscris un con circular drept de volum minimal. De aflat mărimea unghiului de la vârful secțiunii axiale [2].

Soluție. Fie triunghiul ABC reprezintă secțiunea axială a conului (Fig.13), iar punctul O centrul sferei înscrise în con. Notăm mărimea unghiului OAD prin α. Atunci, $AD = rctg\alpha; BD = ADtg2\alpha = rctg\alpha tg2\alpha.$

Volumul conului: $V = \frac{1}{3}\pi AD^2 \cdot BD = \frac{1}{3}\pi r^3 ctg^3\alpha tg2\alpha = \frac{1}{3}\pi r^3 \frac{1}{tg^3\alpha} \cdot \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2}{3}\pi r^3 \frac{1}{tg^2\alpha(1-tg^2\alpha)}$. Volumul V primește valoarea minimală în cazul, când expresia $tg^2\alpha(1 - tg^2\alpha)$ primește valoarea maximală. Deoarece este vorba despre valoarea maximală a unui produs a două numere $tg^2\alpha$ $și$ $1--tg^2\alpha$, suma cărora este constantă și egală cu 1, atunci valoarea maximală va fi atunci, când acești factori vor fi egali. Așa dar, $tg^2\alpha = 1 - tg^2\alpha$, $de\ unde\ tg^2\alpha = \frac{1}{2}$. Având în vedere că unghiul OAD este ascuțit, urmează $tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $și$ $\alpha = arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$. În acest caz, mărimea unghiului de la vârful secțiunii axiale a conului este $180° - 4arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. De demonstrat că din toate triunghiurile înscrise într-un triunghi ascuțitunghic cel mai mic perimetru îl are triunghiul, vârfurile căruia coincid cu picioarele înălțimilor triunghiului dat.

Demonstrație. Fie D un punct arbitrar de pe latura $BC(Fig.14)$. Să determinăm pe laturile AB și AC așa puncte F și E încât perimetrul triunghiului DFE să fie minimal pentru punctul D fixat. Fie D_1 și D_2 punctele simetrice cu punctul D în raport cu laturile AC și AB corespunzător. În calitate de puncte E și F trebuie de luat punctele de intersecție a dreptei D_1D_2 cu laturile AC și AB.

Într-adevăr, perimetrul triunghiului DFE este egal cu lungimea segmentului $[D_1D_2]$, iar perimetrul oricărui alt triunghi DE_1F_1, este egal cu lungimea liniei frânte $D_1E_1F_1D_2$, care este mai mare decât lungimea segmentului $[D_1D_2]$. Rămâne să determinăm poziția punctului$D$, pentru care lungimea segmentului$[D_1D_2]$ va fi cea mai mică.

Să cercetăm triunghiul DE_1F_1. Unghiul de la vârful A este fixat (mărimea mărimea acestuia este egală cu $2m\measuredangle BAC$), $|D_1A| = |D_2A| = |DA|$. Deci , $|D_1D_2|$ va fi cel mai mic atunci și numai atunci, când mai mică va fi distanța $|AD|$, adică când AD va fi înălțimea triunghiului ABC. Așa cum noi am demonstrat existența și unicitatea triunghiului DEF cu perimetrul minimal, atunci repetând judecata pentru celelalte laturi a triunghiului ABC, conchidem că E, F sunt picioarele înălțimilor triunghiului ABC.

13. Pe plan sunt date trei puncte necoliniare $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ și $\boldsymbol{C}$. Pentru care punct $\boldsymbol{T}$ al planului suma $|\boldsymbol{AT}| + |\boldsymbol{BT}| + |\boldsymbol{CT}|$ este cea mai mică?

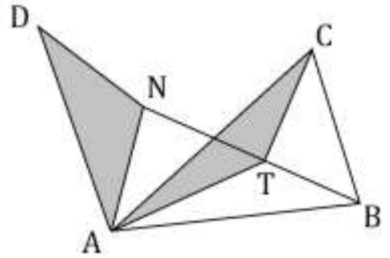

Figura 15

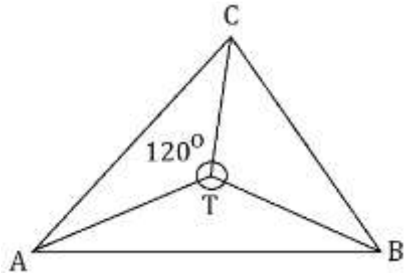

Figura 16

Soluție. Fie A, B și C trei puncte arbitrare necoliniare, iar T este punctul căutat (Fig.15). Să rotim planul sub un unghi de $60°$ în jurul pucntului A. La această rotație punctul C se aplică pe un oarecare punct D, iar punctul T se aplică pe punctul N. Deoarece rotația este o deplasare, urmează că triunghiul AND este congruent cu triunghiul ATC și deci $|TC| = |ND|$. Așa cum $m\measuredangle TAN = 60°$ și $|AN| = |AT|$, urmează că triunghiul ANT este echilateral și deci $|TA| = |TN|$. Astfel suma $|AT| + |BT| + |CT|$ este egală cu lungimea liniei frânte $BTND$ și prin urmare, această sumă nu poate fi mai mică decât lungimea segmentului $[BD]$. Semnul egalității are loc atunci, când punctele B, T, D și N apar'in unei drepte (în ordinea dată). Aceasta înseamnă, că $m\measuredangle BTA + m\measuredangle ATN = 180°$ și prin urmare, $m\measuredangle BTA = 120°$, $m\measuredangle AND + m\measuredangle ANT = 180°$ și deci, $m\measuredangle ATC = 120°$. Astfel, semidreptele $[TA), [TB)$ și $[TC)$ formează două unghiuri a câte $120°$, dar atunci și cel de-al treilea unghi între ele de asemenea are mărimea de $120°$ (Fig. 16). Prin urmare, punctul T căutat, este punctul ce aparține celor trei locuri geometrice de puncte, din care laturile triunghiului ABC se vede sub un unghi de $120°$. Punctul T din care toate laturile triunghiului se văd sub același unghi de *120°* se numește punctul lui Torricelli, deși alții îl numesc punctul lui Ferma sau punctul lui Steiner.

Soluționând problema pusă, totodată s-a demonstrat: dacă triunghiul posedă punctul Torriceli, atunci acesta este unicul punct de minimum pentru suma distanțelor de la el până la vârfurile triunghiului. Se poate demonstra că triunghiul posedă punctul Torricelli atunci și numai atunci, când toate unghiurile triunghiului au mărime mai mică decât $120°$.

Pentru a aduce soluția completă a problemei vom aduce conținutul teoremei Torricelli – Fermat – Steiner.

Dacă toate unghiurile au mărime mai mică de $120°$, atunci punctul minim pentru suma distanțelor de la acest punct până la vârfurile triunghiului este punctul *Torriceli.*

Dacă însă unul din unghiuri are mărimea $\geq 120°$, atunci așa punct este vârful acestui unghi.

Să menționăm că nu pentru orice triunghi există punctul Torricelli.

14. De aflat cea mai mică arie a secțiunii cubului cu un plan, ce trece prin diagonala cubului, dacă muchia cubului este egala cu a.

Soluție. Fie dat cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$, muchia căruia este egala cu a (Fig.17). Dacă secțiunea este un dreptunghi, care trece prin diagonala cubului și cele doua muchii ce pornesc din extremitățile acestei diagonale, atunci aria acestei secțiuni $A_1 = a^2\sqrt{2}$ (produsul dintre lungimea muchiei cubului la lungimea diagonalei feței cubului). În toate celelalte cazuri posibile, putem considera că planul secant intersectează muchia $[AA_1]$. În așa caz, secțiunea va fi un paralelogram (la intersecția a două plane paralele cu un alt plan, liniile de intersecție sunt paralele). Să notăm acest paralelogram prin $PBQD$, iar $|A_1P| = x$, unde $x \in [0; a]$. Atunci $|AP| = a - x$ și conform teoremei lui Pitagora determinăm laturile secțiunii.

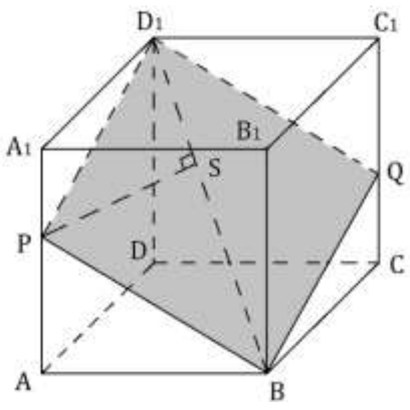

Figura 17

$|PD_1| = \sqrt{x^2 + a^2}$ și $|PB|=\sqrt{(a-x)^2 + a^2}$ și P diagonala cubului $|BD_1| = a\sqrt{3}$. Evident, aria paralelogramului , va fi cea mai mică atunci când aria jumătății acestuia va fi cea mai mică , adică atunci, când aria triunghiului PD_1B va fi cea mai mică.

Aplicăm teorema cosinusurilor în triunghiul PD_1B și obținem :

$$\cos P\widehat{D_1}B = \frac{|PD_1|^2 + |BD_1|^2 + |BP|^2}{2|PD_1| \cdot |D_1B|} = \frac{a+x}{\sqrt{3(a^2+x^2)}}.$$

Atunci,

$$\sin P\widehat{D_1}B = \sqrt{\frac{2(a^2 - ax + x^2)}{3(a^2 + x\hat{}2)}},$$

iar aria triunghiului PD_1B o calculăm după formula:

$$A = \frac{1}{2}|PD_1| \cdot |BD_1| \sin P\widehat{D_1}B = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 - ax + x^2}.$$

Să cercetăm funcția: $y(x) = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 - ax + x^2}$.

Pentru a determina cea mai mică valoare a acestei funcții este suficient să cercetăm funcția $y^2(x) = a^2 - ax + x^2$, care obține cea mai mică valoare pentru $x = \frac{a}{2}$ și egală cu $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Prin urmare, cea mai mică arie posibilă a triunghiului PD_1B este egală cu $\frac{1}{2}a^2\sqrt{\frac{3}{2}}$, iar aria corespunzătoare a secțiunii $A_{min} = a^2\sqrt{\frac{3}{2}}$. Comparând A_1 cu A_{min}, ne convingem, că $A_{min} < A_1$.

A doua metodă. Fie S – piciorul perpendicularei coborâte din punctul P pe diagonala BD_1. Să calculăm aria paralelogrmului $PBQD_1$ cu ajutorul formulei $A = |PS| \cdot |BD_1|$. Evident, aria paralelogramului primește cea mai mică valoare atunci, când PS primește cea mai mică valoare atunci, când ea este egală cu distanța dintre dreptele (AA_1) și (BD_1). Calculăm distanța dintre dreptele (AA_1) și (BD_1), ne convingem că ea este egală cu $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Prin urmare, cea mai mică arie a secțiunii $A_{min} = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a\sqrt{3} = a^2\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Răspuns: $a^2\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Fiecare problemă rezolvată de către elev sau student reprezintă o mică descoperire. Astfel, învățarea prin descoperire denotă un mai mare grad de eficiență intelectuală, cultivă o motivație interioară a învățării.

Bibliografie

1. Calmuțchi L. Probleme geometrice de maxime și minime – eficient mijloc de dezvoltare a găndirii logice.CAIM 2018. Procedings of the 26 conference on

applied and industrial matematics, Chişinău, Moldova, September 20-23, 2018. p.88-97.

2. Calmuţchi L., Şumila Iu. Maxime și minime geometrice. Conferința științifico-didactică națională cu participare internațională Probleme actuale ale didacticii științelor reale. Chişinău, 11-12 mai, 2018. p.44-49.
3. Ionescu I. Maxime și minime geometrice. Bucureşti: Ed. Tehnica, 1955.
4. Lupu I. Probleme de optimizare. Chişinău: Ed. Lumina, 1993.
5. Lupu I. Metodologia rezolvării problemelor geometrice de optimizare. Acta et Commentationes, Ştiințe ale Educației, Nr.2(16), 2019. p.43-51.
6. Делоне Б., Житомирский О. Задачник по геометрии. Москва: Физматгиз, 1959. 294 с.
7. Готман Э. Г. Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений. Математика в школе № 2, 1979. с. 36-39.
8. Протасов В. Ю. Максимумы и минимумы в геометрии. Москва: МЦНМО, 2005. 56 с.
9. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. Москва: Наука, 1970.
10. Зетель С.И. Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений,решаемые эллементарно. Математика в школе №2, 1966.