Acta et Commentationes, Sciences of Education, nr. 4(22), 2020 ISSN 1857-0623
p. 18-31 E-ISSN 2587-3636

CZU: 372.851 DOI: 10.36120/2587-3636.v22i4.18-31

METODE ALGORITMICE DE REZOLVARE A INECUAȚIILOR ȘI SISTEMELOR DE INECUAȚII ALGEBRICE CU PARAMETRI

Ilie LUPU, prof. univ. dr. hab.
https://orcid.org/0000-0003-1375-3071
Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. Articolul conține probleme cu diverse grade de dificultate, destinate organizării muncii individuale și diferențiate cu elevii din învățământul secundar. Sunt propuși algoritmi universali de rezolvare a inecuațiilor și sistemelor de inecuații algebrice.
Cuvinte-cheie: procesul instructiv-educativ la matematică, metode, învățământul secundar, algoritm de rezolvare, lucrul individual, diferențierea învățării, inecuații algebrice.

ALGORITHMIC METHODS FOR SOLVING INEQUALITIES AND ALGEBRAIC INEQUALITY SYSTEMS WITH PARAMETERS

Abstract. The article contains problems with various degrees of difficulty, destined for the organization of individual and differentiated work with secondary school students. Universal algorithms for solving inequalities and systems of algebraic inequalities are proposed.
Keywords: instructive-educational process in mathematics, methods, secondary education, solving algorithm, individual work, learning differentiation, algebraic inequalities.

În procesul instructiv-educativ la matematică există o tendință de a construi structuri generale de comportament cu aspect algoritmic aplicativ la rezolvarea anumitor categorii de probleme, ceea ce reprezintă o deosebită importanță pentru învățare.

Fundamentând învățământul pe astfel de structuri algoritmice, s-a ajuns ca algoritmii să devină noi mijloace de instruire și să se dezvolte o așa-numită „pedagogie algoritmică”.

Exemplul 1. Să rezolvăm inecuația $(a^2+a-2)x-a<0$.

Inecuația $(a^2+a-2)x-a<0 \Leftrightarrow (a-1)(a+2)x<a$. Examinăm următoarele cazuri:

1. $a=1$. Inecuația $0\cdot x<1$ soluțiile căreia reprezintă mulțimea numerelor reale;
2. $a=-2$. Inecuația $0\cdot x<-2$ nu are soluții;
3. $a\in(-2;1)$. Pentru aceste valori ale lui a $(a-1)(a+2)<0$, de aceea inecuația $(a-1)(a+2)x<a \Leftrightarrow x>\frac{a}{(a-1)(a+2)}$;
4. $a\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$, atunci $(a-1)(a+2)>0$ și inecuația $(a-1)(a+2)x<a \Leftrightarrow x<\frac{a}{(a-1)(a+2)}$.

Răspuns: pentru $a\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$, $x<\frac{a}{(a-1)(a+2)}$;
pentru $a\in(-2;1)$, $x>\frac{a}{(a-1)(a+2)}$;
pentru $a=1$, R; pentru $a=-2$, $\emptyset$.

Exemplul 2. Să rezolvăm inecuația $ax+1>a^2+x$.

Inecuația $ax+1>a^2+x \Leftrightarrow (a-1)x>a^2-1 \Leftrightarrow (a-1)x>(a+1)(a-1)$.
Examinăm următoarele cazuri:

1. $a>1$. Inecuația $(a-1)x>(a+1)(a-1)$ are soluțiile
$$x>\frac{(a+1)(a-1)}{a-1} \Leftrightarrow x>a+1;$$
2. $a<1$. Inecuația $(a-1)x>(a+1)(a-1) \Leftrightarrow x<a+1$;
3. $a=1$. Inecuația $0\cdot x>0$ - nu are soluții.

Răspuns: pentru $a>1$, $x>a+1$;
pentru $a<1$, $x<a+1$;
pentru $a=1$, $\emptyset$.

Exemplul 3. Să cercetăm și să rezolvăm inecuația $\frac{mx}{m-2}-\frac{x-1}{3}<\frac{2x+3}{4}$.

Domeniul valorilor admisibile ale parametrului $m\neq 2$. Aducem inecuația dată la forma $\frac{2(m+10)x-5m+10}{12(m-2)}<0$. Ulterior cercetăm următoarele cazuri:

1. Dacă $m>2$, atunci $2(m+10)x-5m+10<0$. $m>2 \Rightarrow m>-10$; atunci $x<\frac{5m-10}{2(m+10)}$.
2. Dacă $m<2$, atunci $2(m+10)x-5m+10>0$.
   2.1) $-10<m<2$; $x>\frac{5m-10}{2(m+10)}$.
   2.2) $m=-10$; $0\cdot x>-60$; $x\in R$.
   2.3) $m<-10$; $x<\frac{5m-10}{2(m+10)}$.

Răspuns: pentru $m>2$, $x<\frac{5m-10}{2(m+10)}$;
pentru $-10<m<2$, $x>\frac{5m-10}{2(m+10)}$;
pentru $m=-10$, $x\in R$;
pentru $m<-10$, $x<\frac{5m-10}{2(m+10)}$.

Exemplul 4. Să cercetăm și să rezolvăm inecuația $\frac{x}{m}-\frac{3}{m-1}>\frac{x}{2}$.

Aducem inecuația dată la forma $\frac{-(m-1)(m-2)x-6m}{2m(m-1)}>0$. Expresia $(m-1)(m-2)$ obține valori

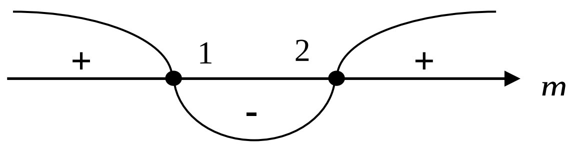


Figura 1.

Expresia $m(m-1)$ obține valori

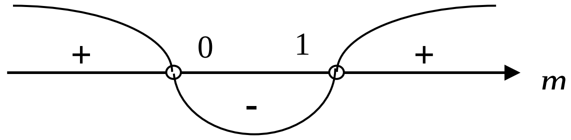


Figura 2.

a) Dacă $m < 0$, atunci $2m(m-1) > 0 \Rightarrow -(m-1)(m-2)x - 6m > 0$. Deoarece $(m-1)(m-2) > 0$, atunci $x < \frac{6m}{-(m-1)(m-2)}$.

b) Dacă $m \in (0;1) \Rightarrow 2m(m-1) < 0$ și $(m-1)(m-2) > 0$.
Deoarece $-(m-1)(m-2) < 0 \Rightarrow -(m-1)(m-2)x - 6m < 0$, atunci $x > \frac{6m}{-(m-1)(m-2)}$.

c) Dacă $m \in (1;2) \Rightarrow 2m(m-1) > 0$, $(m-1)(m-2) < 0$;
$\Rightarrow -(m-1)(m-2)x - 6m > 0$; $x > \frac{6m}{-(m-1)(m-2)}$.

d) $m = 2$, atunci $\frac{0 \cdot x - 12}{4 \cdot 1} > 0$, $-3 > 0$. Deci inecuația dată nu are soluții.

e) Dacă $m > 2 \Rightarrow 2m(m-1) > 0$, $(m-1)(m-2) > 0 \Rightarrow$
$-(m-1)(m-2)x - 6m > 0$, de unde $x < \frac{6m}{-(m-1)(m-2)}$.

Răspuns: pentru $m < 0$, $x < \frac{6m}{-(m-1)(m-2)}$;

pentru $0 < m < 1$, $x > \frac{6m}{-(m-1)(m-2)}$;

pentru $1 < m < 2$, $x > \frac{6m}{-(m-1)(m-2)}$;

pentru $m = 2$, $\emptyset$;

pentru $m > 2$, $x < \frac{6m}{-(m-1)(m-2)}$.

Exemplul 5. Să cercetăm și să rezolvăm inecuația $\frac{2}{x+a} - \frac{x}{x^2-a^2} < \frac{1}{a-x}$.

Aducem inecuația dată la forma $\frac{2x-a}{(x-a)(x+a)} < 0$. DVA: $x \neq -a$, $x \neq a$.

1. Dacă $a > 0$, atunci $x < -a$; $\frac{a}{2} < x < a$.

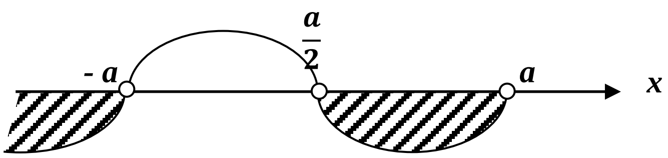


Figura 3.

2. Dacă $a = 0$, atunci $\frac{2x}{x^2} < 0$; $x < 0$.

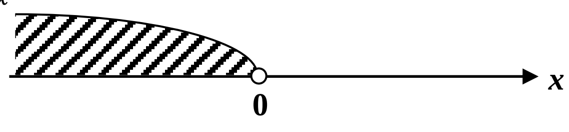


Figura 4.

3. Dacă $a < 0$, atunci $x < a$; $\frac{a}{2} < x < -a$.

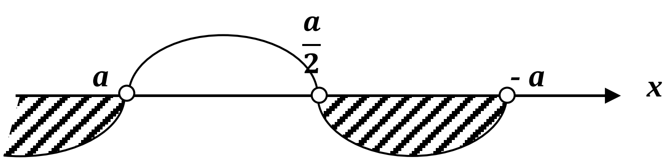


Figura 5.

Răspuns: pentru $a > 0$, $x < -a$; $\frac{a}{2} < x < a$;

pentru $a = 0$, $x \in (-\infty; 0)$;

pentru $a < 0$, $x < a$; $\frac{a}{2} < x < -a$.

Exemplul 6. Să cercetăm și să rezolvăm inecuația $\frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{m+1}} - \frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{2(m-1)}} > \frac{\boldsymbol{2x-3}}{\boldsymbol{m-1}}$.

DVA: $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$. Aducem inecuația dată la forma $\frac{-(m+9)x+5m+5}{2(m+1)(m-1)} > 0$.

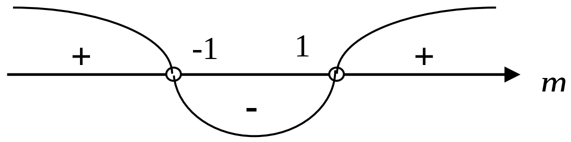


Figura 6.

Examinăm următoarele cazuri:

1. $m < -1$, deci $(m+1)(m-1) > 0 \Rightarrow -(m+9)x + 5m + 5 > 0$;
$-(m+9)x > -5m - 5$.

1.1) $-(m+9) > 0$; $m + 9 < 0$; $x > \frac{-5m-5}{-(m+9)}$, adică $x > \frac{5m+5}{m+9}$.

1.2) $\begin{cases} m > -9 \\ m < -1 \end{cases}$; $x < \frac{5m+5}{m+9}$.

1.3) $m = -9$; $0 \cdot x > 40$, care nu are soluții.

2. $m \in (-1; 1) \Rightarrow -(m+9)x + 5m + 5 < 0$, deci pentru $\begin{cases} m + 9 > 0 \\ (m+1)(m-1) < 0 \end{cases}$, $x > \frac{5m+5}{m+9}$.

3. $m > 1$; $\Rightarrow -(m+9)x + 5m + 5 > 0$, deci pentru $\begin{cases} (m+1)(m-1) > 0 \\ m + 9 > 0 \end{cases}$, $x < \frac{5m+5}{m+9}$.

Răspuns: pentru $m < -9$, $x > \frac{5m+5}{m+9}$;

pentru $m = -9$, $\emptyset$;

pentru $m \in (-9; -1)$, $x < \frac{5m+5}{m+9}$;

pentru $m \in (-1; 1)$, $x > \frac{5m+5}{m+9}$;

pentru $m > 1$, $x < \frac{5m+5}{m+9}$.

Exemplul 7. Să cercetăm și să rezolvăm inecuația $\frac{\boldsymbol{3x-a}}{\boldsymbol{(a+3)(x-2)}} + \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a+3}} < \frac{\boldsymbol{-3}}{\boldsymbol{x-2}}$.

DVA: $\begin{cases} a \neq -3 \\ x \neq 2 \end{cases}$. Inecuația dată este echivalentă cu inecuația $\frac{\boldsymbol{3x-a+ax-2a+3a+9}}{\boldsymbol{(a+3)(x-2)}} < 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{(a+3)x+9}{(a+3)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{9}{a+3}\right)(x-2) < 0 \qquad (1)$$

Vom rezolva inecuația (1) prin metoda intervalelor. Rezolvând ecuațiile $x - 2 = 0$ și $x + \frac{9}{a+3} = 0$, obținem $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{9}{a+3}$. Sunt posibile următoarele cazuri: $2 < \frac{-9}{a+3}$, $2 = \frac{-9}{a+3}$, $2 > \frac{-9}{a+3}$.

Dacă $2 < \frac{-9}{a+3}$, adică $\frac{2a+15}{a+3} < 0$, atunci $a \in (-\frac{15}{2}; -3)$.

Inecuația $2 > \frac{-9}{a+3}$ are soluțiile $\left(-\infty; -\frac{15}{2}\right) \cup (-3; \infty)$. Deoarece soluțiile X ale inecuației (1) este intervalul $(x_1; x_2)$, dacă $x_1 < x_2$ și intervalul $(x_2; x_1)$, dacă $x_2 < x_1$, atunci $X = (2; -\frac{9}{a+3})$ pentru $a \in (-\frac{15}{2}; -3)$; $X = (-\frac{9}{a+3}; 2)$ pentru $a \in \left(-\infty; -\frac{15}{2}\right) \cup$ $\cup (-3; \infty)$.

Dacă $x_1 = x_2$ ($a = -\frac{15}{2}$), atunci inecuația (1) ia forma $(x-2)^2 < 0$ care nu are soluții.

Răspuns: pentru $a \in \left(-\infty; -\frac{15}{2}\right) \cup (-3; \infty)$, $x \in (-\frac{9}{a+3}; 2)$;

pentru $a \in (-\frac{15}{2}; -3)$, $x \in (2; -\frac{9}{a+3})$;

pentru $a \in \{-\frac{15}{2}; -3\}$, $\emptyset$.

Exemplul 8. Să rezolvăm inecuația $x^2 - 2(a+1)x + 4a < 0$.

Rădăcinile trinomului pătrat $x_{1,2} = a + 1 \pm \sqrt{(a+1)^2 - 4a} = a + 1 \pm \sqrt{(a-1)^2} = (a+1) \pm (a-1)$. Fie $x_1 = 2a$, $x_2 = 2$. Vom considera următoarele cazuri:

1) $x_1 = x_2 \Leftrightarrow a = 1$. Inecuația $x^2 - 4x + 4 < 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 < 0$ nu are soluții.

2) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a < 1$. Mulțimea soluțiilor inecuației date $X = (x_1; x_2) = (2a; 2)$.

3)) $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a > 1$. În acest caz $X = (2; 2a)$.

Răspuns: pentru $a < 1$, $2a \le x < 2$; pentru $a > 1$, $2 < x < 2a$; pentru $a = 1$, $\emptyset$.

Exemplul 9. Să rezolvăm inecuația $(a^2 - 1)x^2 - 2ax + 1 < 0$.

Inițial considerăm cazul când $a = \pm 1$, adică acele valori ale lui a, pentru care coeficientul de pe lângă x^2 este egal cu zero.

1) $a = -1$. Inecuația dată ia forma $2x + 1 < 0$, având soluțiile $x < -\frac{1}{2}$.

2) $a = 1$. Inecuația ia forma $-2x + 1 < 0$, de unde $x > \frac{1}{2}$.

3) Fie $a \neq \pm 1$. Rădăcinile trinomului pătrat $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - (a^2-1)}}{a^2-1} = \frac{a \pm 1}{a^2-1}$. Deci $x_1 = \frac{1}{a-1}$, $x_2 = \frac{1}{a+1}$.

Dacă $a \in (-1; 1)$, atunci $x_1 - x_2 = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} = \frac{2}{a^2-1} < 0$. Deci $x_1 < x_2$. Având în vedere că coeficientul de pe lângă x^2 este negativ $\Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{a-1}\right) \cup (\frac{1}{a+1}; \infty)$.

Dacă $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, atunci $x_1 > x_2$, coeficientul de pe lângă x^2, $a^2 - 1 > 0$, de aceea $x \in \left(\frac{1}{a+1}; \frac{1}{a-1}\right)$.

Răspuns: pentru $a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$., $x \in (\frac{1}{a+1}; \frac{1}{a-1})$;

pentru $a \in (-1; 1)$, $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a-1}\right) \cup (\frac{1}{a+1}; \infty)$;

pentru $a = 1$, $x \in (\frac{1}{2}; \infty)$; pentru $a = -1$, $x \in (-\infty; -\frac{1}{2})$.

Exemplul 10. Să rezolvăm inecuația $\frac{1}{x} + \frac{3}{2a} < \frac{1}{x+3a}$.

DVA: $x \neq 0$, $x \neq -3a$, $a \neq 0$.

Inecuația $\frac{1}{x}+\frac{3}{2a}-\frac{1}{x+3a}<0 \Leftrightarrow \frac{3(x^2+3ax+2a^2)}{2ax(x+3a)}<0 \Leftrightarrow \frac{(x+a)(x+2a)}{ax(x+3a)}<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+a)(x+2a)(x+3a)ax<0.$

Rezolvăm ultima inecuație prin metoda intervalelor. Axa numerică o divizăm în intervale cu ajutorul punctelor $x=0$, $x=-a$, $x=-2a$, $x=-3a$.

Considerăm două cazuri.

1) $a<0$.

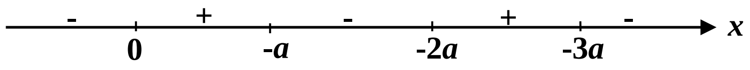


Figura 7.

Mulțimea soluțiilor inecuației date $X=(-\infty;0)\cup(-a;-2a)\cup(-3a;\infty)$.

2) $a>0$.

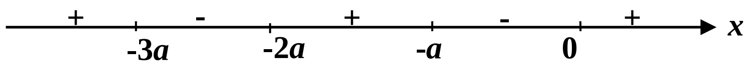


Figura 8.

$X=(-3a;-2a)\cup(-a;0)$.

Răspuns: pentru $a\in(-\infty;0)$, $x=(-\infty;0)\cup(-a;-2a)\cup(-3a;\infty)$;

pentru $a\in(0;\infty)$, $X=(-3a;-2a)\cup(-a;0)$;

pentru $a=0$, $\emptyset$.

Exemplul 11. Pentru care valori ale parametrului *a* inecuația

$$(\boldsymbol{a-3})\boldsymbol{x^2-2ax+3a-6}>0$$

este verificată de orice $x\in R$?

Trinomul pătrat va obține valori pozitive pentru toate valorile *x*, dacă $a-3>0$ și $D<0$, adică *a* va verifica sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} a-3>0 \\ a^2-(a-3)(3a-6)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3>0 \\ 2a^2-15a+18>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>3 \\ \left[\begin{array}{l} a<\frac{3}{2} \\ a>6 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a>6.$$

Răspuns: $a>6$.

Exemplul 12. Să rezolvăm inecuația

$$(\boldsymbol{a^2+a-2})\boldsymbol{x^2}+(\boldsymbol{2a^2+a+3})\boldsymbol{x+a^2-1}>0.$$

Pentru $\begin{cases} a\neq-2 \\ a\neq1 \end{cases}$ discriminantul trinomului pătrat

$D=(2a^2+a+3)^2-4(a^2+a-2)(a^2-1)=(5a+1)^2;\quad x_{1,2}=\frac{-(2a^2+a+3)\pm(5a+1)}{2(a^2+a-2)}$,

atunci $x_1=\frac{1-a}{2+a}$; $x_2=\frac{a+1}{1-a}$ sunt soluțiile ecuației $(a^2+a-2)x^2+(2a^2+a+3)x+a^2-1=0$.

Să determinăm valorile parametrului *a* pentru care $\frac{1-a}{a+2}<\frac{a+1}{1-a}$.

$$\frac{(1-a)^2-(a+1)(a+2)}{(a+2)(1-a)}<0 \Leftrightarrow \frac{-(5a+1)}{(a+2)(1-a)}<0 \Leftrightarrow$$

$$-(5a+1)(a+2)(1-a)<0.$$

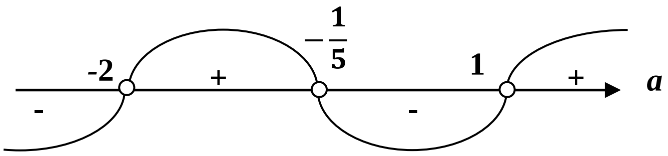


Figura 9.

Astfel $\frac{1-a}{a+2} < \frac{a+1}{1-a}$ pentru $a \in (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{5}; 1)$, iar $\frac{1-a}{a+2} > \frac{a+1}{1-a}$ pentru $a \in \left(-2; -\frac{1}{5}\right) \cup (1; \infty)$.

Ulterior vom considera următoarele cazuri:

1) Dacă $a^2 + a - 2 > 0$, atunci $a > 1$ sau $a < -2$.

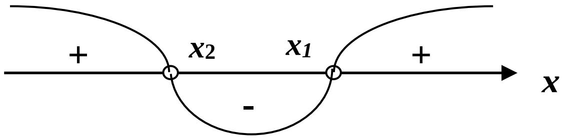


Figura 10.

1.1) $a > 1$, atunci $x < \frac{a+1}{1-a}$ sau $x > \frac{1-a}{a+2}$;

1.2) $a < -2$, atunci $x < \frac{1-a}{a+2}$ sau $x > \frac{a+1}{1-a}$.

2) Dacă $a = 1$, atunci $0 \cdot x^2 + 6x + 0 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

3) Dacă $a = -2$, atunci $0 \cdot x^2 + 9x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$.

4) Dacă $-2 < a < 1$, atunci

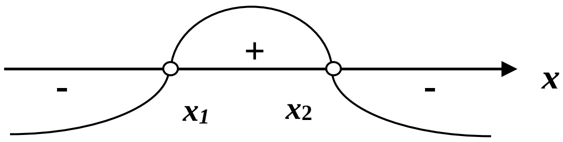


Figura 11.

4.1) $-2 < a < -\frac{1}{5}$, atunci $\frac{a+1}{1-a} < x < \frac{1-a}{a+2}$;

4.2) $a = -\frac{1}{5}$, atunci $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$, prin urmare, $\emptyset$;

4.3) $a \in (-\frac{1}{5}; 1)$, atunci $\frac{1-a}{a+2} < x < \frac{a+1}{1-a}$.

Răspuns: pentru $a < -2$, $x < \frac{1-a}{a+2}$ sau $x > \frac{1+a}{1-a}$;

pentru $a = -2$, $x > -\frac{1}{3}$;

pentru $-2 < a < -0{,}2$, $\frac{a+1}{1-a} < x < \frac{1-a}{a+2}$;

pentru $a = -0{,}2$, $\emptyset$;

pentru $-0{,}2 < a < 1$, $\frac{1-a}{a+2} < x < \frac{a+1}{1-a}$;

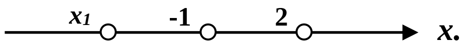
pentru $a = 1$, $x > 0$;

pentru $a > 1$, $x < \frac{a+1}{1-a}$ sau $x > \frac{1-a}{a+2}$.

Exemplul 13. Să cercetăm și să rezolvăm inecuația $\frac{(a^2-a-6)x+a}{x^2-x-2} < 0$.

DVA: $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$. Dacă $a^2 - a - 6 \neq 0$, atunci $x_1 = -\frac{a}{a^2-a-6}$ este soluția ecuației $(a^2 - a - 6)x + a = 0$.

Numerele -1 și 2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - x - 2 = 0$. Să examinăm diverse relații dintre soluțiile numărătorului și numitorului.

1) 

Dacă $x < -1$, atunci $-\frac{a}{a^2-a-6} < -1$, adică $\frac{a^2-2a-6}{a^2-a-6} < 0$, care are soluțiile

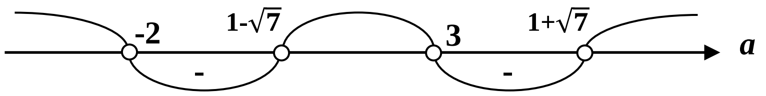
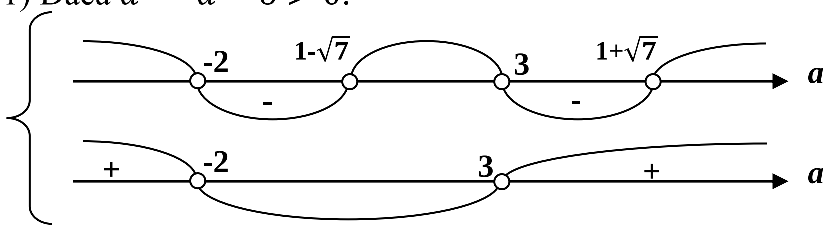
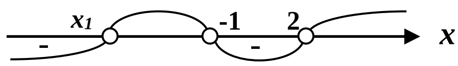


Figura 12.

1.1) Dacă $a^2 - a - 6 > 0$:

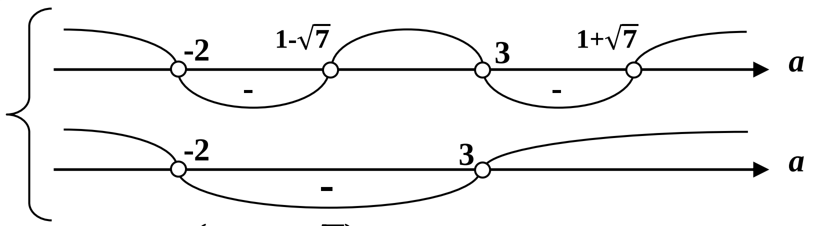


Prin urmare $a \in (3; 1 + \sqrt{7})$, atunci

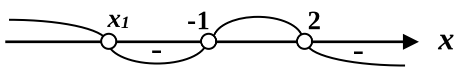


$x \in \left(-\infty; -\frac{a}{a^2-a-6}\right) \cup (-1; 2)$.

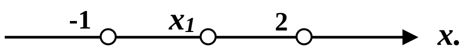
1.2) Dacă $a^2 - a - 6 < 0$:



Prin urmare $a \in (2; 1 - \sqrt{7})$, atunci



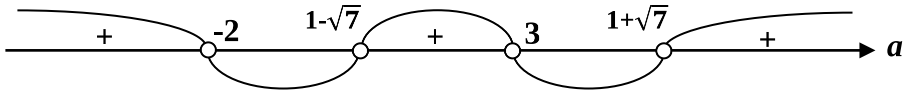
$x \in \left(-\frac{a}{a^2-a-6}; -1\right) \cup (2; \infty)$.

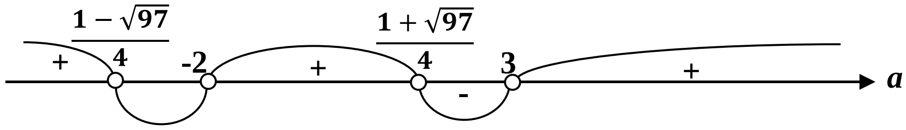
2) 

Dacă $-1 < x_1 < 2$, atunci $-1 < -\frac{a}{a^2-a-6} < 2$, adică $\begin{cases} \frac{a^2-2a-6}{a^2-a-6} > 0 \\ \frac{2a^2-a-12}{a^2-a-6} > 0 \end{cases}$.

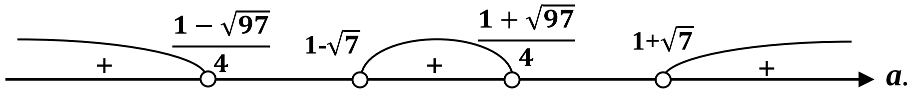
Ușor ne putem convinge că $\frac{1 \pm \sqrt{97}}{4}$ sunt soluțiile ecuației $2a^2 - a - 12 = 0$; $1 \pm \sqrt{7}$ sunt soluțiile ecuației $a^2 - 2a - 6 = 0$; iar -2 și 3 sunt soluțiile ecuației $a^2 - a - 6 = 0$.

Ținând cont că $\frac{1+\sqrt{97}}{4} < 3$ și că $\frac{1-\sqrt{97}}{4} < -2 < 1 - \sqrt{7}$ obținem soluțiile sistemului:

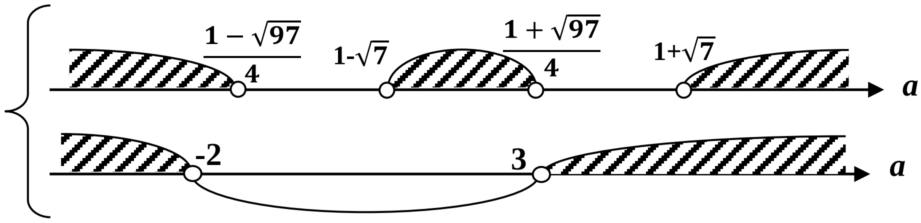




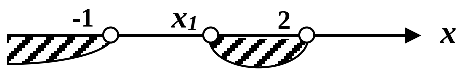
sau



2.1) Dacă $a^2 - a - 6 > 0$:

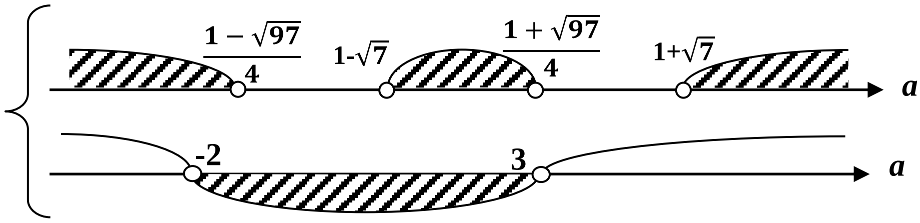


$a \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{97}}{4}\right) \cup (1+\sqrt{7}; \infty)$, atunci

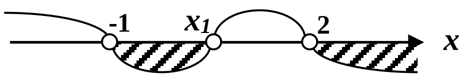


$x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{a}{a^2-a-6}; 2\right)$.

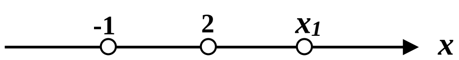
2.2) Dacă $a^2 - a - 6 < 0$:



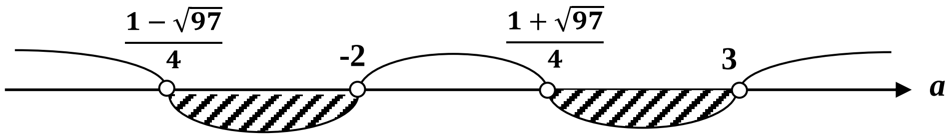
$a \in \left(1-\sqrt{7}; \frac{1+\sqrt{97}}{4}\right)$, atunci



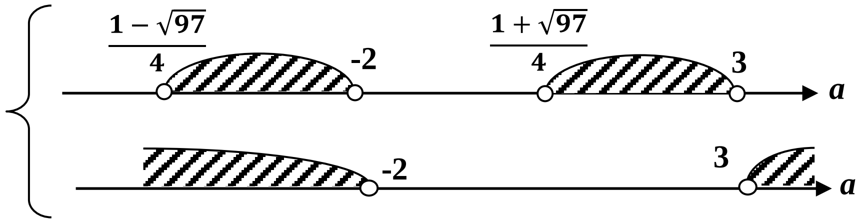
$x \in \left(-1; -\frac{a}{a^2-a-6}\right) \cup (2; \infty)$.

3) 

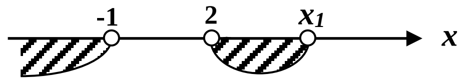
Dacă $x_1 > 2$, atunci $-\frac{a}{a^2-a-6} > 0$, sau $\frac{2a^2-a-12}{a^2-a-6} < 0$, atunci



3.1) Dacă $a^2 - a - 6 > 0$:

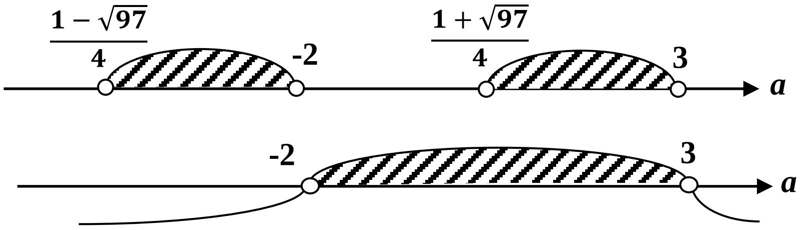


$\frac{1-\sqrt{97}}{4} < a < -2$, atunci

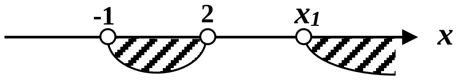


$x \in (-\infty; -1) \cup \left(2; -\frac{a}{a^2-a-6}\right)$.

3.2) Dacă $a^2 - a - 6 < 0$:



$\frac{1+\sqrt{97}}{4} < a < 3$, atunci



$x \in (-1; 2) \cup \left(-\frac{a}{a^2-a-6}; \infty\right)$.

4) Dacă $a = 3$, atunci $\frac{0 \cdot x+3}{(x+1)(x-2)} < 0$, adică $x \in (-1; 2)$.

5) Dacă $a = -2$, atunci $\frac{0 \cdot x-2}{(x+1)(x-2)} < 0$, adică $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$.

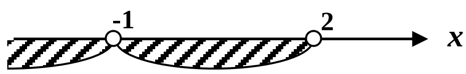
6) Să determinăm pentru care valori ale parametrului a numărătorul inecuației este egal cu zero.

Fie $x = -1$, atunci $(a^2 - a - 6) \cdot (-1) + a = 0$, adică $a^2 - 2a - 6 = 0$, de unde $a_1 = 1 + \sqrt{7}$; $a_2 = 1 - \sqrt{7}$.

6.1) Dacă $a^2 - a - 6 > 0$:

$1 + \sqrt{7} \in (3; \infty)$; $1 - \sqrt{7} \notin (-\infty; -2)$ adică pentru $a = 1 + \sqrt{7}$ inecuația

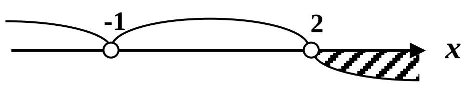
$\frac{x+1}{(x+1)(x-2)} < 0$, de unde



$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2)$.

6.2) Dacă $a^2 - a - 6 < 0$, atunci $1 - \sqrt{7} \in (-2; 3)$, deci pentru $a = 1 - \sqrt{7}$

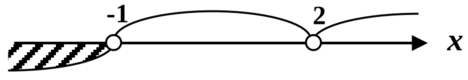
inecuația $\frac{-(x+1)}{(x+1)(x-2)} < 0$, sau



$x \in (2; \infty)$.

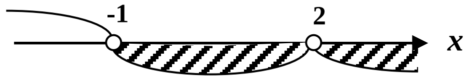
7) Fie $x = 2$, atunci $(a^2 - a - 6) \cdot 2 + a = 0$, adică $2a^2 - a - 12 = 0$, de unde $a_1 = \frac{1+\sqrt{97}}{4}$; $a_2 = \frac{1-\sqrt{97}}{4}$.

7.1) Dacă $a^2 - a - 6 > 0$:

$\frac{1-\sqrt{97}}{4} \in (-\infty; -2)$, atunci $\frac{x-2}{(x+1)(x-2)} < 0$; 

$x \in (-\infty; -1)$.

7.2) Dacă $a^2 - a - 6 < 0$, atunci $\frac{1+\sqrt{97}}{4} \in (-2; 3)$, deci $-\frac{(x-2)}{(x+1)(x-2)} < 0$;



$x \in (-1; 2) \cup (2; \infty)$.

Răspuns: pentru $a \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{97}}{4}\right)$, $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{a}{a^2-a-6}; 2\right)$;

pentru $a = \frac{1-\sqrt{97}}{4}$, $x \in (-\infty; -1)$;

pentru $a \in \left(\frac{1-\sqrt{97}}{4}; -2\right)$, $x \in (-\infty; -1) \cup \left(2; -\frac{a}{a^2-a-6}\right)$;

pentru $a = -2$, $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$;

pentru $a \in (-2; 1-\sqrt{7})$, $x \in \left(-\frac{a}{a^2-a-6}; -1\right) \cup (2; \infty)$;

pentru $a = 1-\sqrt{7}$, $x \in (2; \infty)$;

pentru $a \in \left(1-\sqrt{7}; \frac{1+\sqrt{97}}{4}\right)$, $x \in \left(-1; -\frac{a}{a^2-a-6}\right) \cup (2; \infty)$;

pentru $a = \frac{1+\sqrt{97}}{4}$, $x \in (-1; 2) \cup (2; \infty)$;

pentru $a \in \left(\frac{1+\sqrt{97}}{4}; 3\right)$, $x \in (-1; 2) \cup \left(-\frac{a}{a^2-a-6}; \infty\right)$;

pentru $a = 3$, $x \in (-1; 2)$;

pentru $a \in (3; 1+\sqrt{7})$, $x \in \left(-\infty; -\frac{a}{a^2-a-6}\right) \cup (-1; 2)$;

pentru $a = 1+\sqrt{7}$, $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2)$;

pentru $a \in (1+\sqrt{7}; \infty)$, $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{a}{a^2-a-6}; 2\right)$.

Exemplul 14. Să rezolvăm sistemul de inecuații $\begin{cases} \boldsymbol{a(x-2) \geq x-3} \\ \boldsymbol{8(a+1)x > 8ax+9} \end{cases}$.

Sistemul $\begin{cases} a(x-2) \geq x-3 \\ 8(a+1)x > 8ax+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a-1) \geq 2a-3 \\ 8x > 9 \end{cases}$.

Vom examina următoarele cazuri:

1). $a = 1$. $\begin{cases} x \cdot 0 \geq -1 \\ 8x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ x > \frac{9}{8} \end{cases}$. Soluțiile sistemului sunt $x \in \left(\frac{9}{8}; \infty\right)$.

2). $a < 1$. $\begin{cases} x \leq \frac{2a-3}{a-1} \\ x > \frac{9}{8} \end{cases}$. Deoarece inecuația $\frac{2a-3}{a-1} > \frac{9}{8} \Leftrightarrow \frac{7a-15}{a-1} > 0$ este verificată de orice valori ale parametrului $a \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{15}{7}; \infty\right)$, atunci, în cazul când $a < 1$, soluțiile sistemului dat sunt $x \in \left(\frac{9}{8}; \frac{2a-3}{a-1}\right)$.

3). $a > 1$. $\begin{cases} x \geq \frac{2a-3}{a-1} \\ x > \frac{9}{8} \end{cases}$. Ecuația $\frac{2a-3}{a-1} = \frac{9}{8}$ are soluția $a = \frac{15}{7}$. Dacă $1 < a < \frac{15}{7}$, atunci $\frac{2a-3}{a-1} \leq \frac{9}{8}$, de aceea soluțiile sistemului sunt $x \in \left(\frac{9}{8}; \infty\right)$. Dacă $a > \frac{15}{7}$, atunci $\frac{2a-3}{a-1} > \frac{9}{8}$ și, în acest caz, soluțiile sistemului sunt $x \in \left[\frac{2a-3}{a-1}; \infty\right)$.

Răspuns: pentru $a < 1$, $x \in \left(\frac{9}{8}; \frac{2a-3}{a-1}\right)$; pentru $a \in \left[1; \frac{15}{7}\right)$, $x \in \left(\frac{9}{8}; \infty\right)$; pentru $a > \frac{15}{7}$, $x \in \left[\frac{2a-3}{a-1}; \infty\right)$.

Exemplul 15. Să rezolvăm sistemul de inecuații $\begin{cases} \frac{ax}{a-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4} \\ \frac{x(a-10)}{2} + a > \frac{a(x+2)}{2} - 5x - 6 \end{cases}$**.**

DVA: $a \neq 2$. Aducem sistemul la forma $\begin{cases} \frac{2x(a+10)-5(a-2)}{12(a-2)} < 0 \\ 0 > -6 \end{cases}$. Prima inecuație nu este definită pentru $a = 2$, iar a doua este verificată de orice *x* și a. Numerele -10 și 2 împart axa numerică în trei domenii:

1). $a < -10$. Deoarece $a - 2 < 0$, atunci prima inecuație a sistemului este echivalentă cu inecuația $2x(a+10) - 5(a-2) > 0 \Leftrightarrow 2x(a+10) > 5(a-2) \Leftrightarrow x < \frac{5(a-2)}{2(a+10)}$.

2). $a = -10$. Inecuația $\frac{0+5\cdot 12}{-12\cdot 12} < 0$ este verificată de orice $x \in R$.

3). $a \in (-10; 2)$. Ținând cont, că $a + 10 > 0$, $a - 2 < 0$, avem $\frac{2x(a+10)-5(a-2)}{12(a-2)} < 0 \Leftrightarrow$ $2x(a+10) - 5(a-2) > 0 \Leftrightarrow 2x(a+10) > 5(a-2) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{5(a-2)}{2(a+10)}$.

4). $a > 2$. Deoarece $a - 2 > 0$ și $a + 10 > 0$, atunci $\frac{2x(a+10)-5(a-2)}{12(a-2)} < 0 \Leftrightarrow$ $2x(a+10) - 5(a-2) < 0 \Leftrightarrow 2x(a+10) < 5(a-2)$, de unde $x < \frac{5(a-2)}{2(a+10)}$.

Răspuns: pentru $a \in (-\infty; -10) \cup (2; \infty)$, $x < \frac{5(a-2)}{2(a+10)}$;

pentru $a \in (-10; 2)$, $x > \frac{5(a-2)}{2(a+10)}$; pentru $a = -10$, $x \in R$.

Exemplul 16. Să rezolvăm sistemul de inecuații $\begin{cases} (a-2)x - 3(a^2+1) < x - a \\ 2ax > (a+1)x + 1 \end{cases}$**.**

Aducem sistemul la forma $\begin{cases} x(a-3) < 3a^2 - a + 3 \\ x(a-1) > 1 \end{cases}$. (1)

Inițial vom rezolva sistemul pentru acele valori ale lui a, pentru care coeficienții de pe lângă *x* sunt egali cu zero.

1). $a = 1$. Inecuația $x \cdot 0 > 1$ nu are soluții, prin urmare și sistemul dat nu are soluții.

2). $a = 3$. Sistemul $\begin{cases} x \cdot 0 < 27 \\ 2x > 1 \end{cases}$ are soluțiile $x \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$. Ulterior vom considera $a \neq 1$, $a \neq 3$.

3). $a \in (-\infty; 1)$. Atunci $a - 1 < 0$, $a - 3 < 0$ de aceea sistemul (1) este echivalent cu sistemul $\begin{cases} x > \frac{3a^2-a+3}{a-3} \\ x < \frac{1}{a-1} \end{cases}$, care are soluțiile $x \in \left(\frac{3a^2-a+3}{a-3}; \frac{1}{a-1}\right)$, dacă $\frac{3a^2-a+3}{a-3} < \frac{1}{a-1}$.

Rezolvând această inecuație, obținem $\frac{(a-1)(3a^2-a+3)-(a-3)}{(a-3)(a-1)} < 0 \Leftrightarrow a(3a^2 - 4a + 3) < 0$ $\Leftrightarrow a < 0$, deoarece $3a^2 - 4a + 3 > 0$ pentru orice a.

Astfel, pentru $a \in (-\infty; 0)$ mulțimea soluțiilor sistemului $x \in \left(\frac{3a^2-a+3}{a-3}; \frac{1}{a-1}\right)$, iar pentru $a \in [0; 1)$ sistemul nu are soluții.

4). $a \in (1; 3)$. În acest caz $\begin{cases} x(a-3) < 3a^2 - a + 3 \\ x(a-1) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3a^2-a+3}{a-3} \\ x > \frac{1}{a-1} \end{cases}$. Deoarece $\frac{1}{a-1} > 0$, iar $\frac{3a^2-a+3}{a-3} < 0$, atunci mulțimea soluțiilor sistemului $x \in \left(\frac{1}{a-1}; \infty\right)$.

5). $a \in (3; \infty)$. Sistemul $\begin{cases} x(a-3) < 3a^2 - a + 3 \\ x(a-1) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3a^2-a+3}{a-3} \\ x > \frac{1}{a-1} \end{cases}$. Pentru $a > 3$ inecuația $\frac{1}{a-1} < \frac{3a^2-a+3}{a-3} \Leftrightarrow 0 < a(3a^2 - 4a + 3)$ este verificată de toate valorile parametrului $a > 3$. De aceea mulțimea soluțiilor $x \in \left(\frac{1}{a-1}; \frac{3a^2-a+3}{a-3}\right)$.

Răspuns: pentru $a \in (-\infty; 0)$, $x \in \left(\frac{3a^2-a+3}{a-3}; \frac{1}{a-1}\right)$;

pentru $a \in [0; 1)$, $\emptyset$; pentru $a \in (1; 3]$, $x \in \left(\frac{1}{a-1}; \infty\right)$;

pentru $a \in (3; \infty)$, $x \in \left(\frac{1}{a-1}; \frac{3a^2-a+3}{a-3}\right)$.

Exemplul 17. Să rezolvăm sistemul de inecuații $\begin{cases} \boldsymbol{a(x-2)+3 > x} \\ \boldsymbol{(2a+3)(x-1) > (a-1)(x+2)} \end{cases}$.

Aducem sistemul la forma $\begin{cases} (a-1)x > 2a - 3 \\ (a+4)x > 4a + 1 \end{cases}$. Pentru $a = 1$ sistemul devine $\begin{cases} 0 > -1 \\ 5x > 5 \end{cases}$, de unde $x > 1$. Dacă $a = -4$, $\begin{cases} 5x < 11 \\ 0 > -15 \end{cases}$, de unde $x < \frac{11}{5}$. Ulterior vom considera că $a \neq 1$, $a \neq -4$. Dacă $a > 1$, atunci obținem $\begin{cases} x > \frac{2a-3}{a-1} \\ x > \frac{4a+1}{a+4} \end{cases}$.

Examinăm diferența $\frac{4a+1}{a+4} - \frac{2a+3}{a-1} = \frac{2a^2-8a+11}{(a+4)(a-1)}$. Trinomul $2a^2 - 8a + 11 > 0$, pentru $a \in R$. Pentru $a > 1$, numitorul $(a+4)(a-1) > 0$. Deci $\frac{4a+1}{a+4} - \frac{2a+3}{a-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{4a+1}{a+4} > \frac{2a+3}{a-1}$. Astfel, dacă $a > 1$, atunci $x > \frac{4a+1}{a+4}$.

Dacă $a < -4$, atunci obținem $x < \frac{2a-3}{a-1}$. Pentru $-4 < a < 1$, $\frac{4a+1}{a+4} < x < \frac{2a-3}{a-1}$.

Răspuns: pentru $a = 1$, $x \in (1; \infty)$; pentru $a = -4$, $x \in \left(-\infty; \frac{11}{5}\right)$;

pentru $a > 1$, $x > \frac{4a+1}{a+4}$; pentru $a < -4$, $x < \frac{2a+3}{a-1}$;

pentru $-4 < a < 1$, $\frac{4a+1}{a+4} < x < \frac{2a-3}{a-1}$.

Exemplul 18. Pentru care valori ale parametrului m sistemul de inecuații $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \leq m \\ x^2 - 2x \leq 3 - 6m \end{cases}$ are o singură soluție?

Sistemul dat este echivalent cu sistemul $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 - m \leq 0 \\ x^2 - 2x - 3 + 6m \leq 0 \end{cases}$. (1)

Discriminanții trinoamelor pătrate din stânga inecuațiilor sunt respectiv: $D_1 = 4 + 4m$ și $D_2 = 16 - 2m$.

Sistemul (1) admite soluții numai pentru acele valori ale parametrului m, pentru care $\begin{cases} 1 + m \geq 0 \\ 2 - 3m \geq 0 \end{cases}$, deci $-1 \leq m \leq \frac{2}{3}$.

Fie $m = -1$, atunci prima inecuație a sistemului (1) are unica soluție $x = -2$, care verifică și inecuația a doua. Deci pentru $m = -1$ sistemul dat are o singură soluție.

Fie $m = \frac{2}{3}$, atunci inecuația a doua a sistemului (1) are unica soluție $x = 1$ care nu verifică prima inecuație. Deci, pentru $m = \frac{2}{3}$, sistemul (1) nu are soluții.

Fie $-1 < m < \frac{2}{3}$. Din prima inecuație aflăm $-2 - \sqrt{1+m} \leq x \leq -2 + \sqrt{1+m}$, iar din a doua inecuație $1 - \sqrt{4-6m} \leq 1 + \sqrt{4-6m}$.

Sistemul (1) va avea o singură soluție, dacă aceste două intervale închise vor avea un singur punct comun. Deoarece $-2 - \sqrt{1+m} < 1 + \sqrt{4-6m}$ va exista un singur punct comun atunci și numai atunci, când $-2 + \sqrt{1+m} = 1 - \sqrt{4-6m} \Leftrightarrow$

$49m^2 + 48m = 0, m = 0$. Astfel, pentru $m = 0$, sistemul (1) are o singură soluție.

Răspuns: $m \in \{-1; 0\}$.

Este important de a pune la îndemâna elevilor anumiți algoritmi de învățare a matematicii, să-i învățăm să analizeze problemele, să recurgă la procese cognitive superioare în rezolvarea acestora, să însușească metode generale de gândire care domină învățământul modern, să studieze metode de algoritmizare a procedurilor, metode raționale de gândire ușor transferabile în situații analoage.

Bibliografie

1. Cerghit I. Metode de învățământ. Iași: Polirom, 2006.
2. Lupu I. Practicum de rezolvare a problemelor de matematică. Chișinău: CE USM, 2002.
3. Шахмейстр А. Х. Уравнения и неравенства с параметрами. С.-Петербург Москва, 2006.
4. Локоть В. В. Задачи с параметрами. Москва, 2005.
5. Lupu I. Metodologia rezolvării problemelor de matematică cu un grad sporit de dificultate. Chișinău: Prut Internațional, 2011.