

**PROBLEMA GRUPĂRII
SURSELOR DE CURENT ELECTRIC CONTINUU**
E. GHEORGHÎĂ, L. GUȚULEAC, V. SPÎNU*, P. UNTILĂ
*UST, *Liceul Teoretic „Ion Vatamanu”, Strășeni, e.gheorghita@mail.ru*

Abstract: The problems of grouping sources of continuous electric current are important in the process of teaching-learning physics. Existing textbooks treat differently the solving of exercises of this kind. The present work presents distinct methods of solving the grouping problems for the sources with different characteristics connected in parallel.

Keywords: grouping of current sources.

Rezumat: Problemele referitoare la gruparea surselor de curent electric continuu sunt importante în predarea-învățarea fizicii. Manualele școlare tratează în mod diferit rezolvarea acestora. În lucrarea dată sunt prezentate diferite moduri de rezolvare a problemei grupării surselor de curent continuu pentru cazul conectării în paralel a surselor cu caracteristici diferite.

Cuvinte-cheie: gruparea surselor de curent.

Problema grupării surselor de curent electric continuu este actuală în sistemul de predare-învățare a fizicii. Manualele utilizate tratează în mod diferit rezolvarea problemelor de grupare a surselor.

În lucrarea dată se prezintă diferite modalități de rezolvare a problemei grupării surselor de curent continuu pentru cazul conectării în paralel a surselor cu caracteristici diferite.

Analizăm cazul conectării surselor identice grupate în paralel. Schema conectării este reprezentată în figura 1. Avem n surse identice cu tensiunile electromotoare ε și rezistența interioară r .

În manualele liceale această problemă nu este rezolvată. Analizăm cazul grupării a n surse de curent cu aceleași t.e.m. și rezistențe interioare egale. Evident că intensitățile curentilor prin ele, deci:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_n, \quad (1)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_n = \varepsilon. \quad (2)$$

În conformitate cu teorema I-a Kirchhoff, avem:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n. \quad (3)$$

Conform teoremei a II-a Kirchhoff pentru un ochi de rețea ce conține rezistorul de rezistență R , de exemplu pentru ochiul $A \varepsilon_n B R A$, avem:

$$I_n \cdot r + I \cdot R = \varepsilon_n, \text{ de unde}$$

$$I_n = \frac{\varepsilon_n - I \cdot R}{r}. \quad (4)$$

$$\text{Ținând cont de relația (2) și substituind (4) în (3), obținem: } I = \frac{n \cdot \varepsilon_n - n \cdot I \cdot R}{r}. \quad (5).$$

Rezolvând această ecuație:

$$I \cdot r = n \cdot \varepsilon - n \cdot I \cdot R; I \cdot (n \cdot R + r) = n \cdot \varepsilon, I = \frac{n \cdot \varepsilon}{n \cdot R + r} = \frac{n \cdot \varepsilon}{n \left(R + \frac{r}{n} \right)}, \text{ de unde } I = \frac{\varepsilon}{R + \frac{r}{n}}. \quad (6)$$

Astfel am ajuns la concluzia că la gruparea în paralel a n surse identice, tensiunile electromotoare rămân aceleași, iar rezistența interioară se micșorează de n ori, după cum se vede din relația (6).

În cazul surselor de curent continuu diferite, problema este mai complicată. În manualul respectiv [1] cazul surselor diferite nu este analizat. Vom analiza trei cazuri de conectare a surselor cu caracteristici diferite, și anume:

1) Sursele au aceeași t.e.m., dar rezistența interioară diferită: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$ și

$$r_1 \neq r_2 \neq r_3;$$

2) Sursele au aceeași rezistențe interioare, iar t.e.m. diferită: $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ și

$$r_1 = r_2 = r_3;$$

3) Sursele au diferite t.e.m. și diferite rezistențe interioare: $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ și $r_1 \neq r_2 \neq r_3$.

În figura 2 este prezentată schema grupării în paralel a trei surse cu aceleași t.e.m. și cu rezistențe interioare diferite. Prezentăm rezolvarea acestei probleme: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$ și $r_1 \neq r_2 \neq r_3$.

În conformitate cu teorema I Kirchhoff:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (7)$$

Scriem teorema a doua Kirchhoff pentru trei ochiuri: ochiul $A I_1 B R A$, obținem:

$$I_1 \cdot r_1 + I \cdot R = \varepsilon_1 \quad (8)$$

Pentru ochiul $A I_2 B R A$, obținem:

$$I_2 \cdot r_2 + I \cdot R = \varepsilon_2 \quad (9)$$

Pentru ochiul $A I_3 B R A$, obținem

$$I_3 \cdot r_3 + I \cdot R = \varepsilon_3 \quad (10)$$

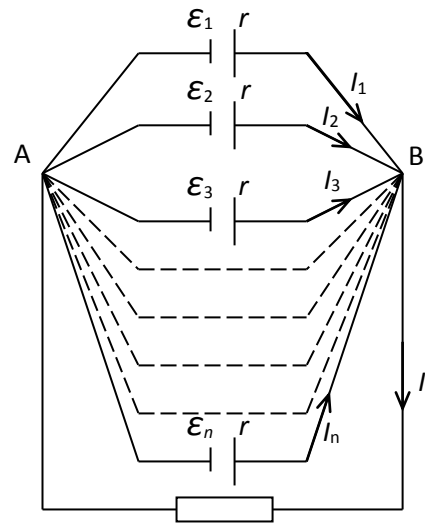


Fig. 1. Gruparea a n surse identice de curent electric continuu

$$\text{Din (8), (9) și (10), găsim } I_1; I_2; I_3: I_1 = \frac{\varepsilon - I \cdot R}{r_1} \quad (11); \quad I_2 = \frac{\varepsilon - I \cdot R}{r_2} \quad (12);$$

$$I_3 = \frac{\varepsilon - I \cdot R}{r_3} \quad (13)$$

$$\text{Substituind (11), (12) și (8) în (7), aflăm: } I = \frac{\varepsilon - I \cdot R}{r_1} + \frac{\varepsilon - I \cdot R}{r_2} + \frac{\varepsilon - I \cdot R}{r_3}. \quad (14)$$

Rezolvând această ecuație, găsim intensitatea curentului în circuit (fig.2):

$$\begin{aligned} I \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 &= r_2 \cdot r_3 \cdot \varepsilon - r_2 \cdot r_3 \cdot R \cdot I + r_1 \cdot r_3 \cdot \varepsilon - r_1 \cdot r_3 \cdot R \cdot I + r_2 \cdot r_1 \cdot \varepsilon - r_2 \cdot r_1 \cdot R \cdot I \\ (r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 \cdot R + r_1 \cdot r_3 \cdot R + r_1 \cdot r_2 \cdot R) \cdot I &= \varepsilon \cdot (r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2) \\ I &= \frac{\varepsilon \cdot (r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2)}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 \cdot R + r_1 \cdot r_3 \cdot R + r_1 \cdot r_2 \cdot R} = \frac{\varepsilon \cdot \left(\frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_1} + \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_2} + \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_3} \right)}{R \cdot \left(\frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_1} + \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_2} + \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_3} \right) + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} \\ &= \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \varepsilon \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \left(\frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2} + \frac{R}{r_3} + 1 \right)} = \frac{\varepsilon \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)}{R \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + 1} = \frac{\varepsilon \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{1}{r_i}}{R \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{1}{r_i} + 1} \end{aligned}$$

Pentru n surse cu tensiuni electromotoare identice și cu rezistențe interioare diferite,

$$\text{obținem: } I = \frac{\varepsilon \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}}{R \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} + 1} \quad (15)$$

Prin urmare, gruparea de n surse de curent legate în paralel, unde t.e.m sunt egale, iar rezistențele lor interioare sunt diferite, din (15) observăm că tensiunea electromotoare rămâne aceeași, însă rezistența lor interioară se micșorează.

Analizăm cazul doi: pentru ε diferite, iar rezistența lor interioară egală, atunci:

$$r_1 = r_2 = r_3 = r.$$

$$\text{Pentru nodul B (Fig.3), în conformitate cu teorema lui Kirchoff, } I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (16)$$

Scriem teorema a doua a lui Kirchoff pentru trei ochiuri: ochiul AI_1BRA , obținem:

$$\text{a) Pentru ochiul } A\varepsilon_1 BRA, \text{ obținem: } I_1 \cdot r + I \cdot R = \varepsilon_1, \text{ de unde } I_1 = \frac{\varepsilon_1 - I \cdot R}{r} \quad (17)$$

$$\text{b) Pentru ochiul } A\varepsilon_2 BRA, \text{ obținem: } I_2 \cdot r + I \cdot R = \varepsilon_2 \text{ de unde } I_2 = \frac{\varepsilon_2 - I \cdot R}{r} \quad (18)$$

$$\text{c) Pentru ochiul } A\varepsilon_3 BRA, \text{ obținem } I_3 \cdot r + I \cdot R = \varepsilon_3 \text{ de unde } I_3 = \frac{\varepsilon_3 - I \cdot R}{r} \quad (19)$$

Substituind (17), (18) și (19) în (16), obținem:

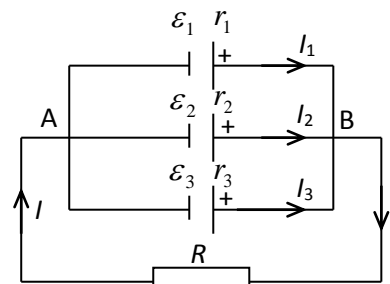


Fig. 2. Gruparea surselor de curent electric continuu de aceeași t.e.m. cu rezistențe interioare diferite

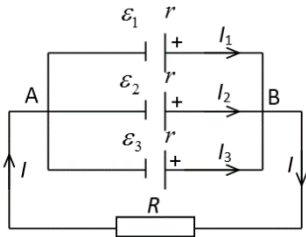


Fig. 3. Gruparea surselor de curent electric continuu cu aceeași rezistență interioară cu t.e.m. diferite

$$I = \frac{\varepsilon_1 - I \cdot R}{r} + \frac{\varepsilon_2 - I \cdot R}{r} + \frac{\varepsilon_3 - I \cdot R}{r} \quad (20)$$

Rezolvând această ecuație, obținem:

$$I \cdot r = \varepsilon_1 - I \cdot R - I \cdot R + \varepsilon_2 + \varepsilon_2 - I \cdot R = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 3 \cdot I \cdot R$$

$$I \cdot (3 \cdot R + r) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$I = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3 \cdot R + r} = \frac{\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^3 R_i + r} \quad (21)$$

Pentru n surse cu t.e.m. (ε) diferite și rezistențele interioare identice, obținem:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^n R_i + r} \quad (22)$$

Din (22) observăm că pentru n t.e.m. diferite, iar în rezistențele lor interioare identice grupate în paralel avem t.e.m. rezultantă este egală cu suma lor, iar rezistența lor rezultantă este aceeași. Analizăm cazul grupării, când $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ diferite și rezistențele lor interioare sunt diferite, adică $r_1 \neq r_2 \neq r_3$. Pentru nodul B (fig. 4), în conformitate cu I teoremă a lui Kirchoff (fig. 4), avem: $I = I_1 + I_2 + I_3$ (23)

Scriem teorema a doua a lui Kirchoff pentru trei ochiuri: ochiul AI_1BRA , obținem:

a) Pentru ochiul $A\varepsilon_1BRA$, obținem: $I_1 \cdot r_1 + I \cdot R = \varepsilon_1$, de unde $I_1 = \frac{\varepsilon_1 - I \cdot R}{r_1}$ (24)

b) Pentru ochiul $A\varepsilon_2BRA$, obținem:

$$I_2 \cdot r_2 + I \cdot R = \varepsilon_2 \text{ de unde } I_2 = \frac{\varepsilon_2 - I \cdot R}{r_2} \quad (25)$$

c) Pentru ochiul $A\varepsilon_3BRA$, obținem $I_3 \cdot r_3 + I \cdot R = \varepsilon_3$

de unde $I_3 = \frac{\varepsilon_3 - I \cdot R}{r_3}$ (26)

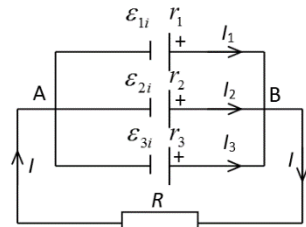


Fig. 4. Gruparea surselor de curent electric continuu cu t.e.m. și rezistențe interioare diferite

Substituind (24), (25) și (26) în (23), obținem:

$$I = \frac{\varepsilon_1 - I \cdot R}{r_1} + \frac{\varepsilon_2 - I \cdot R}{r_2} + \frac{\varepsilon_3 - I \cdot R}{r_3} = \frac{r_2 \cdot r_3 \cdot \varepsilon_1 - r_2 \cdot r_3 \cdot R \cdot I + r_2 \cdot r_3 \cdot \varepsilon_2 - r_1 \cdot r_3 \cdot R \cdot I + r_1 \cdot r_3 \cdot \varepsilon_3 - r_1 \cdot r_2 \cdot R \cdot I}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}$$

. Rezolvând această ecuație, obținem:

$$I \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = r_2 \cdot r_3 \cdot \varepsilon_1 - r_2 \cdot r_3 \cdot R \cdot I + r_1 \cdot r_3 \cdot \varepsilon_2 - r_1 \cdot r_3 \cdot R \cdot I + r_2 \cdot r_1 \cdot \varepsilon_3 - r_1 \cdot r_3 \cdot R \cdot I$$

$$(r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 \cdot R + r_1 \cdot r_3 \cdot R + r_1 \cdot r_3 \cdot R + r_1 \cdot r_2 \cdot R) \cdot I =$$

$$= \varepsilon_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_3 \cdot \varepsilon_2 + r_1 \cdot r_2 \cdot \varepsilon_3$$

$$I = \frac{\varepsilon_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_3 \cdot \varepsilon_2 + r_1 \cdot r_2 \cdot \varepsilon_3}{R(r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2)} = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \frac{\varepsilon_1}{r_1} + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \frac{\varepsilon_2}{r_2} + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \frac{\varepsilon_3}{r_3}}{R \cdot \left(\frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_1} + \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_2} + \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_3} \right) + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} =$$

$$= \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} + \frac{\varepsilon_3}{r_3} \right)}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \left(\frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2} + \frac{R}{r_3} + 1 \right)} = \frac{\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} + \frac{\varepsilon_3}{r_3}}{\frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2} + \frac{R}{r_3} + 1} = \frac{\sum_{i=1}^3 \frac{\varepsilon_i}{r_i}}{R \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{1}{r_i} + 1}; \quad I = \frac{\sum_{i=1}^3 \frac{\varepsilon_i}{r_i}}{R \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{1}{r_i} + 1} \quad (27)$$

Pentru n t.e.m. și n rezistențe interioare, obținem:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{r_i}}{R \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} + 1}. \quad (28)$$

Din relația (28) observăm că pentru acest caz tensiunea electromotoare rezultantă este egală cu suma tuturor tensiunilor electromotoare grupate în paralel, iar rezistența lor internă se micșorează.

În baza celor discutate mai sus, conchidem:

1. La gruparea în paralel a n surse identice tensiunile electromotoare rămân aceleași, iar rezistența interioară se micșorează de n ori;
2. La gruparea de n surse de curent legate în paralel, unde t.e.m. sunt egale, iar rezistențele lor interioare sunt diferite, tensiunea electromotoare rămâne aceeași, însă rezistența lor interioară se micșorează;
3. Pentru n t.e.m. diferite, iar rezistențele lor interioare identice grupate în paralel, avem t.e.m. rezultantă este egală cu suma lor, iar rezistența lor rezultantă este aceeași;
4. Pentru acest caz, tensiunea electromotoare rezultantă este egală cu suma tuturor tensiunilor electromotoare grupate în paralel, iar rezistența lor internă se micșorează.
5. Aceste rezultate pot servi ca un suport didactic pentru elevii și profesorii care utilizează teoremele Kirchhoff la rezolvarea diferitelor probleme.

BIBLIOGRAFIE:

1. Mihai Marinciuc, Spiridon Rusu, "Fizica. Manual pentru clasa a 11-a, profil real umanist", Univers Pedagogic, 2006.