Acta et Commentationes, Sciences of Education, nr. 3(25), 2021 ISSN 1857-0623
p. 34-43 E-ISSN 2587-3636

CZU: 372.851 DOI: 10.36120/2587-3636.v25i3.34-43

METODE ȘI PROCEDEE DE REZOLVARE A ECUAȚIILOR DE GRAD SUPERIOR CU PARAMETRI

Ilie LUPU, dr. hab.,prof. univ., UST
https://orcid.org/0000-0003-1375-3071
Eugeniu CABAC, dr. conf. univ., USARB
https://orcid.org/0000-0002-7906-7624

Rezumat. Rezolvarea de probleme și creativitate reprezintă culmi ale performanței cognitive. Învățarea prin rezolvarea de probleme sau altfel spus, prin explorarea alternativelor, este o variantă a euristicii, o altă modalitate, mai complexă, de aplicare a teoriei învățării prin descoperire, încurajează activitatea mintală a elevilor și dezvoltă invenția și creativitatea. În lucrare sunt propuse diverse metode și procedee de rezolvare a ecuațiilor cu parametri cu un grad sporit de dificultate.
Cuvinte cheie: metodă, procedeu, strategie euristică, creativitate, ecuație, parametru.

METHODS AND PROCEDURES FOR SOLVING HIGHER DEGREE EQUATIONS WITH PARAMETERS

Abstract. Problem solving and creativity are tops of cognitive performance. Problem-solving learning, or in other words, exploring alternatives, is a variant of heuristics, another, more complex way of applying the theory of learning through discovery, encourages students' mental activity and develops invention and creativity. Various methods and procedures for solving equations with parameters with a high degree of difficulty are proposed in the paper.
Keywords: method, procedure, heuristic strategy, creativity, equation, parameter.

Teoretic, ideea de metodă vine dinspre cunoașterea științifică, dinspre știință și acțiunea întemeiată pe cunoaștere. Astfel, în semnificație originară, cuvântul metodă, provenit din grecescul methodos (odos = cale, drum și metha = către, spre), înseamnă drum de parcurs în vederea atingerii unui scop, a obținerii unui rezultat determinat.

Realitatea este că metodele de instruire își au originea în metodele de cunoaștere științifică, de cercetare științifică. Metoda transpusă în domeniul activității didactice, obține alte înțelesuri, devenind un instrument destinat să faciliteze cunoașterea științifică, preia un statut pedagogic devenind o modalitate de formare în mintea elevilor a unor reprezentări despre lumea obiectelor și fenomenelor realității.

Într-o versiune mai modernă, metoda este interpretată drept modalitate pe care profesorul o urmează pentru ai face pe elevi să găsească singuri calea proprie de urmat în găsirea soluțiilor necesare la rezolvarea problemelor matematice cu care ei se confruntă în procesul învățării.

Activitatea instructiv-educativă reprezintă un ansamblu de acțiuni interdependente subordonate atingerii unor finalități generale ale învățământului.

Din punct de vedere executiv, activității îi corespunde o anumită metodologie; acțiunii- o metodă, iar operației - un procedeu.

Procedeele sunt definite drept tehnici mai limitate de acțiune sau componente particulare în cadrul metodei.

La rezolvarea ecuațiilor de grad superior cu parametri, utilizăm metode activ participative, metode interactive, metode euristice și metode de învățare prin cercetare.

Exemplul 1. Să rezolvăm ecuația $2x^3 + ax^2 + x + 2 = 0$, dacă una din soluțiile ei este numărul 1.

Deoarece $x = 1$ este soluția ecuației date, avem $2 + a + 1 + 2 = 0$, de unde

$$a = -5.$$

Astfel ecuația dată ia forma:

$$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 - 3x - 2) = 0.$$

Ecuația $2x^2 - 3x - 2 = 0$ are soluțiile $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 2$.

Răspuns: pentru $a = -5, x \in \{-\frac{1}{2};\ 1;\ 2\}$.

Exemplul 2. Să determinăm valorile parametrului a astfel încât suma a două soluții a ecuației $2x^3 - x^2 + (2a-1)x + a = 0$ să fie egală cu 1.

Fie x_1, x_2, x_3 soluțiile ecuației date. Conform teoremei lui Viète: $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$.

Din ipoteza problemei rezultă că $x_1 + x_2 = 1$. Deci $x_3 = -\frac{1}{2}$.

Polinomul atașat ecuației va fi divizibil la $2x + 1$.

$$\begin{array}{rl|l}
- & 2x^3 - x^2 + (2a-1)x + a & 2x+1 \\ \cline{3-3}
 & -2x^3 + x^2 & x^2 - x + a \\ \cline{2-2}
- & -2x^2 + (2a-1)x + a & \\
 & -2x^2 - x & \\ \cline{2-2}
- & 2ax + a & \\
 & 2ax + a & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Ecuația dată este echivalentă cu ecuația $(2x+1)(x^2 - x + a) = 0$. Ecuația $x^2 - x + a = 0$ are două soluții reale $x_1 = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$ și $x_2 = \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$ pentru $a \leq \frac{1}{4}$, suma cărora este egală cu 1.

Exemplul 3. Să rezolvăm ecuația $x^3 - (a+1)x^2 - (2a^2 - a)x + 2a^2 = 0$.

Ușor se observă că $x = 1$ este soluție a ecuației date, deoarece:

$$1 - a - 1 - 2a^2 + a + 2a^2 = 0,$$

prin urmare, polinomul din membru stâng al ecuației date este divizibil prin $(x-1)$.

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^3 - (a+1)x^2 - (2a^2 - a)x + 2a^2 & x-1 \\ \cline{3-3}
 & x^3 - x^2 & x^2 - ax - 2a^2 \\ \cline{2-2}
 & -ax^2 - (2a^2 - a)x + 2a^2 & \\ \cline{2-2}
 & -ax^2 + ax & \\ \cline{2-2}
 & -2a^2x + 2a^2 & \\ \cline{2-2}
 & -2a^2x + 2a^2 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Astfel ecuația dată devine $(x-1)(x^2 - ax - 2a^2) = 0$, care are soluțiile $x_1 = 1$, $x_2 = -a$, $x_3 = 2a$.

Discuția numărului de soluții în funcție de valorile parametrului a.

1) $x_1 = x_2 \neq x_3 \begin{cases} 1 = -a \\ 2a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1.$

Deci, dacă $a = -1$ soluțiile ecuației sunt: $x_1 = x_2 = 1;\ x_2 = -2.$

2) $x_1 = x_3 \neq x_2 \begin{cases} 1 = 2a \\ -a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

În acest caz soluțiile sunt: $x_1 = x_3 = 1\ ; x_2 = -\frac{1}{2}$.

3) $x_1 \neq x_2 = x_3 \begin{cases} 2a = -a \\ -a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0.$

În acest caz soluțiile sunt: $x_1 = 1\ ; x_2 = x_3 = -\frac{1}{2}$.

4) $x_1 = x_2 = x_3 \begin{cases} -a = 1 \\ 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset.$

În acest caz, nu există valori ale lui a pentru care $x = 1$ ar fi soluție triplă.

Răspuns: Dacă $a \in R\{-1; 0; \frac{1}{2}\}$, atunci $S = \{1; -a; 2a\}$;

Dacă $a = -1$, atunci $S = \{-2; 1\}$;

Dacă $a = \frac{1}{2}$, atunci $S = \{-\frac{1}{2}; 1\}$;

Dacă $a = 0$, atunci $S = \{0; 1\}$.

Exemplul 4. Să rezolvăm ecuația $x^3 - (2a+1)x^2 + (a^2 + 2a - b^2)x - a^2 + b^2 = 0$. Ușor se observă că $x = 1$ este soluție a ecuației date, deoarece:

$$1 - 2a - 1 + a^2 + 2a - b^2 - a^2 + b^2 = 0$$

Prin urmare, polinomul atașat ecuației este divizibil prin $(x - 1)$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - (2a+1)x^2 + (a^2 + 2a - b^2)x - a^2 + b^2 & x - 1 \\ \cline{2-2} -\ \underline{x^3 \qquad - x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & x^2 - 2ax + a^2 - b^2 \\ -2ax^2 + (a^2 + 2a - b^2)x - a^2 + b^2 & \\ -\ \underline{-2ax^2 \qquad\qquad + 2ax \qquad\qquad} & \\ (a^2 - b^2)x - a^2 + b^2 & \\ -\ \underline{(a^2 - b^2)x - a^2 + b^2} & \\ 0 & \end{array}$$

Ecuația dată ia forma: $(x - 1)(x^2 - 2ax + a^2 - b^2) = 0$, care are soluțiile $x_1 = 1$, $x_2 = a - b\ , x_3 = a + b$.

Să determinăm pentru care valori ale lui a și b ecuația are soluții egale.

1) Fie $x_1 = x_2$ și $x_1 \neq x_3$.

În acest caz: $\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

Deci ecuația dată admite soluțiile $x_1 = x_2 = 1$ și $x_3 = 1 + 2b$, unde $b \neq 0$, $x = 1$ este soluție dublă.

2) Fie $x_1 = x_3$ și $x_1 \neq x_2$. În acest caz :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ a \neq 1 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ a \neq 1 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ b \neq 0 \end{cases}.$$

Deci ecuația dată admite soluție $x_1 = x_3 = 1$ și $x_2 = 1 - 2b$, unde $b \neq 0. x = 1$ este soluție dublă.

3) Fie $x_2 = x_3$ și $x_1 \neq x_2$. În acest caz:

$$\begin{cases} a-b=a+b \\ a-b\neq 1 \\ a+b\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ orice, b=0 \\ a\neq 1+b \\ a\neq 1-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 1 \\ b=0 \end{cases}.$$

Deci ecuația dată admite soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = x_3 = a$, unde $a \neq 1$. Ecuația are o soluție dublă.

4) Fie $x_1 = x_2 = x_3$. În acest caz:

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}.$$

Ecuația are o soluție triplă $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Exemplul 5. Să demonstrăm că ecuația $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ cu coeficienții reali va avea o soluție imaginară (diferită de zero) atunci și numai atunci când $ad = bc$ și $ac > 0$. Inițial vom demonstra necesitatea condiției.

Fie $x = im$ soluția ecuației date, atunci:

$$a(im)^3 + b(im)^2 + c(im) + d = 0 \Leftrightarrow -am^3 i - bm^2 + cmi + d = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (d - bm^2) + (cm - am^3)i = 0.$$

Amintim că un număr complex este egal cu zero, atunci și numai atunci, când partea reală și imaginară sunt egale cu zero. Deci:

$$\begin{cases} d - bm^2 = 0 \\ cm - am^3 = 0 \end{cases}.$$

Deoarece $m \neq 0$, atunci din egalitatea a doua obținem $c - am^2 = 0$. Astfel $d = bm^2, c = am^2$. Înmulțind aceste egalități obținem $adm^2 = bcm^2$, de unde $ad = bc$. Din egaliatatea $c = am^2$ rezultă că $ac = a^2m^2$, deci $ac > 0$. Astfel, necesitatea condițiilor $ad = bc$ și $ac > 0$ este demonstrată. Ulterior vom demonstra suficiența ipotezei.

Fie $ad = bc$ și $ac > 0$. Înmulțind ambii membri ai ecuației date cu $a(a \neq 0)$ obținem:

$$a^2x^3 + abx^2 + acx + ad = 0 \ \Leftrightarrow ax(ax^2 + c) + abx^2 + ad = 0.$$

În ultima ecuație înlocuim ad prin bc și obținem $ax(ax^2 + c) + abx^2 + bc = 0 \Leftrightarrow$ $(ax^2 + c)(ax + b) = 0$.

Ecuația $ax + b = 0$ are o soluție reală. Soluțiile ecuației $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$ vor fi imaginare, diferite de zero, numai atunci când $\frac{c}{a} > 0$, adică $ac > 0$.

Exemplul 6. Să rezolvăm ecuația $x^3 - ax^2 - 2(1 + a^2)x - 2a = 0$.

Metoda întâi. Divizorii termenului liber sunt $-a;\ a;\ -2a;\ 2a$. Ne putem convinge ușor că $x = -a$ este soluție a ecuației date. Într-adevăr: $-a^3 - a^3 + 2a + 2a^3 - 2a = 0$. Astfel polinomul $f(x) = x^3 - ax^2 - 2(1 + a^2)x - 2a$ este divizibil prin $(x + a)$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,\underline{x^3 - ax^2 - 2(1+a^2)x - 2a} & \;x + a \\
\underline{x^3 + ax^2 \qquad\qquad\qquad\qquad} & \overline{x^2 - 2ax - 2} \\
-\,\underline{-2ax^2 - 2(1+a^2)x - 2a} & \\
\underline{-2ax^2 \qquad - 2a^2x \qquad\;\;} & \\
-\,\underline{\qquad\qquad -2x - 2a} & \\
\underline{-2x - 2a} & \\
0 &
\end{array}
$$

Astfel ecuația dată ia forma $(x+a)(x^2-2ax-2)=0$.

Ecuația $x^2-2ax-2=0$ are soluțiile $x_1=a-\sqrt{a^2+2}$ și $x_2=a+\sqrt{a^2+2}$ ambele reale pentru orice $a\in R$.

Metoda a doua. Dacă $a=0$, atunci ecuația dată ia forma: $x^3-2x=0$, de unde $x_1=0\,, x_2=-\sqrt{2}\,, x_3=\sqrt{2}$.

Fie $a\neq 0$, prin urmare și $x\neq 0$.

Scriem ecuația dată ca ecuație pătrată în raport cu parametrul a:

$2xa^2+(x^2+2)a-(x^3-2x)=0$, care are soluțiile $a_1=\frac{-(x^2+2)+(3x^2-2)}{4x}=\frac{x^2-2}{2x}$ și $a_2=\frac{-(x^2+2)-(3x^2-2)}{4x}=-x$.

Ecuația $\frac{x^2-2}{2x}=a \Leftrightarrow x^2-2ax-2=0$, care are soluțiile $x=a\pm\sqrt{a^2+2}$, iar ecuația $-x=a$ are soluția $x=-a$.

Răspuns: $x=-a$ și $x=a\pm\sqrt{a^2+2}$.

Exemplul 7. Să se determine parametrii a *și* b ai ecuației $x^3-ax^2+bx-8=0$, știind că soluțiile reale sunt numere naturale și că formează o progresie geometrică în care primul termen, rația și numărul termenilor sunt în progresie aritmetică.

Conform ipotezei și teoremei lui Viète avem:

$$
\begin{cases} x_1+x_1q+x_1q^2=a \\ x^2q+x_1^2q^2+x_1^2q^3=b \\ x_1^2q^3=8 \\ x_1=2q-3 \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} x_1(1+q+q^2)=a \\ x_1^2q(1+q+q^2)=b \\ x_1q=2 \\ x_1=2q-3 \end{cases}
\Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{cases} x_1qa=b \\ x_1q=2 \\ x_1=2q-3 \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} 2a=b \\ x_1q=2 \\ x_1=2q-3 \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} 2a=b \\ x_1=2q-3 \\ 2q^2-3q-2=0 \end{cases}.
$$

de unde $q=2, x_1=1, a=7, b=14$.

Răspuns: pentru $a=7,\ b=14, \{1;2;4\}$.

Exemplul 8. Pentru care valori raționale ale parametrilor a *și* b una dintre soluțiile ecuației $x^4+ax^3+bx^2+6x+2=0$ este egală cu $\sqrt{3}+1$? Să calculăm celelalte soluții.

Înlocuim în ecuația dată $x=\sqrt{3}+1$ și obținem:

$$36+10a+4b+(22+6a+2b)\sqrt{3}=a$$

suma a două numere dintre care unul este rațional iar celălalt irațional poate fi egală cu zero dacă ambele numere sunt egale cu zero:

$$\begin{cases} 36+10a+4b=0 \\ 22+6a+2b=0 \end{cases}, \text{ de unde } a=-4 \text{ și } b=1.$$

Deoarece ecuația $x^4-4x^3+x^2+6x+2=0$ are toți coeficienții numere întregi și admite o soluție irațională rezultă că și numărul conjugat acestei soluții este de asemenea soluție a acestei ecuații, deci

$$x_1=1+\sqrt{3}\,;\ x_2=1-\sqrt{3}.$$

Împărțind polinomul $f(x)=x^4-4x^3+x^2+6x+2$ la produsul:

$$\left(x-\sqrt{3}-1\right)\left(x+\sqrt{3}-1\right)=x^2-2x-2$$

și obținem $f(x)=(x^2-2x-2)(x^2-2x-1)$.

Pentru a obține celelalte soluții ale ecuației rezolvăm ecuația $x^2-2x-1=0$, soluțiile căreia sunt numerele $1\pm\sqrt{2}$.

Răspuns: pentru $a=4$ și $b=1, x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}, x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$.

Exemplul 9. Să determinăm valorile parametrilor reali a *și* b astfel încât ecuația:

$$ax^4-(a^2+b^2+2b)x^3+3a(b+1)x^2-2(a+b+2)x+b+2=0$$

să fie reciprocă. Pentru valorile obținute să rezolvăm ecuația.

Conform definiției ecuației reciproce avem: $\begin{cases} a=b+2 \\ a^2+b^2+2b=2(a+b+2) \end{cases}$, de unde rezultă $a_1=0,\ b_1=2$ sau $a_2=3,\ b_2=1$.

Astfel pentru $(0;2)$ sau $(3;1)$ ecuația dată este reciprocă.

Pentru $a=0$ *și* $b=-2$ ecuația dată devine $0\cdot x^4-0\cdot x^3+0\cdot x^2-0\cdot x=0$ o identitate și deci, orice valoare a lui x este soluție a ecuației date.

Pentru $a=3$ și $b=1$ ecuația dată ia forma $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$ sau $(x-1)^4=0$, de unde rezultă soluția cvadruplă $x=1$.

Răspuns: Pentru $a=3$ *și* $b=1$, $\{1;1;1;1\}$; Pentru $a=0$ *și* $b=-2$, $\forall\, x\in R$.

Exemplul 10. Să calculăm valorile reale ale parametrului m pentru care soluțiile ecuației $x^4-(3m-5)x^2+(m+1)^2=0$ alcătuiesc o progresie aritmetică.

Din ipoteza problemei avem: $x_1=a-d\,, x_2=a\,, x_3=a+d\,, x_4=a+2d$.

Conform teoremei lui Viète:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=a-d+a+a+d+a+2d=4a+2d=0 \text{ , de unde } d=-2a.$$

Astfel, $x_1=3a\,, x_2=a\,, x_3=-a\,, x_4=-3a$ și ecuația dată o putem transcrie în felul următor:

$$(x+a)(x-a)(x-3a)(x+3a)=x^4-(3m-5)x^2+(m+1)^2 \text{ sau}$$

$$(x^2-a^2)(x^2-9a^2)=x^4-(3m-5)x^2+(m+1)^2 \text{ sau}$$

$$x^4-10a^2x^2+9a^2=x^4-(3m-5)x^2+(m+1)^2,$$

de unde: $\begin{cases} 9a^2=(m+1)^2 \\ 10a^2=3m-5 \end{cases}$.

Din ecuația a doua a sistemului $a^2=\frac{3m-5}{10}$. Înlocuind în prima ecuație $a^2=\frac{3m-5}{10}$, obținem ecuația:

$$9 \cdot \frac{(3m-5)^2}{100} = (m+1)^2 \Leftrightarrow \ 9(3m-5)^2 = 100(m+1)^2$$
$$\Leftrightarrow [3(3m-5)]^2 - [10(m+1)]^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (9m - 15 - 10m - 10)(9m - 15 + 10m + 10) = 0 \Leftrightarrow (m+25)(19m-5) = 0,$$
de unde $m_1 = -25\ , m_2 = \frac{5}{19}$.

Răspuns: $m \in \left\{-25;\ \frac{5}{19}\right\}$.

Exemplul 11. Să rezolvăm ecuația:
$$x^4 + (4-2m)x^3 + (5-9m)x^2 + (2m^2+20)x - 5m = 0 \qquad (1)$$
Ecuația dată reprezintă o ecuație de gradul doi în raport cu parametrul m :
$$2xm^2 - (2x^3 + 9x^2 + 5)m + x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 20x = 0 \qquad (2)$$
Calculăm discriminantul polinomului atașat ecuației (2):
$$D = (2x^3 + 9x^2 + 5)^2 - 8x^2(x^3 + 4x^2 + 5x + 20) =$$
$$= 4x^6 + 28x^5 + 49x^4 - 20x^3 - 70x^2 + 25 = (2x^3 + 7x^2 - 5)^2.$$
Astfel ecuația (2) are soluțiile:

$m_{1,2} = \frac{1}{4}[2x^3 + 9x^2 + 5 \pm (2x^3 + 7x^2 - 5)]$, de unde $m_1 = x^2 + 4x;\ m_2 = \frac{x^2+5}{2x}$.

Astfel, ecuația (1) este echivalentă cu totalitatea de ecuații:
$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 4x - m = 0 \\ x^2 - 2mx + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{m+4} \\ x_{3,4} = m \pm \sqrt{m^2-5} \end{array}\right. . \qquad (3)$$
Să determinăm valorile parametrului m, astfel ca toate soluțiile (3) să fie reale:

$\begin{cases} m + 4 \geq 0 \\ m^2 - 5 \geq 0 \end{cases}$, de unde $\begin{cases} m \geq -4 \\ m \in (-\infty;\ -\sqrt{5}) \cup [\sqrt{5};\ \infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-4; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5};\ \infty)$.

Răspuns: pentru $m \in [-4; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5};\ \infty), x = -2 - \sqrt{m+4}, x = -2 + \sqrt{m+4}$, $x = m - \sqrt{m^2-5}, x = m + \sqrt{x+5}.$

Exemplul 12. Pentru care valori ale parametrului a ecuația $x^5 - 5x + a = 0$ are soluție dublă?

Fie t soluția dublă a ecuației date. Polinomul $f(x) = x^5 - 5x + a = 0$ se împarte exact la $x^2 - 2tx + t^2$, deci restul $R = 0$. Împărțind $x^5 - 5x + a$ la $x^2 - 2tx + t^2$ obținem restul $R = 5(t^4 - 1) - 4t^5 + a$.

Deci $5(t^4 - 1) - 4t^5 + a = 0$ pentru orice x, prin urmare obținem sistemul
$$\begin{cases} 1 - t^4 = 0 \\ 4t^5 - a = 0 \end{cases}, \text{ de unde } t^4 = 1,\ a = 4t, \text{ adică } t = \pm 1, a = \pm 4.$$
Exemplul 13. Să rezolvăm ecuația $x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + ax + b = 0$ și să determinăm parametrii reali a și b, știind că ecuația are o soluție triplă.

Fie t soluția triplă a ecuației date. Polinomul $g(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + ax + b$ se împarte exact la $(x-t)^3 = x^3 - 3x^2t + 3xt^2 - t^3$, deci restul $R = 0$.

Împărțind $g(x)$ la $(x-t)^3$ obținem restul
$$R = (10t^3 + 6t^2 - 15t - 1)x^2 + (-15t^4 - 8t^3 + 15t^2 + a)x + b +$$
$$+t^3(6t^2 + 3t - 5) = 0$$

pentru orice $x \in R$. Prin urmare obținem sistemul:

$$\begin{cases} 10t^3 + 6t^2 - 15t - 1 = 0 \\ -15t^4 - 8t^3 + 15t^2 + a = 0 \\ b + t^3(6t^2 + 3t - 5) = 0 \end{cases}$$

Prima ecuație a sistemului are o soluție reală $t = 1$.
Deci $10t^3 + 6t^2 - 15t - 1 = (t - 1)(10t^2 + 16t + 1)$.

Ușor calculăm $a = 8$, $b = -4$.

Deci ecuația dată devine:

$$x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^3(x + 2)^2 = 0,$$

care are soluțiile $x_1 = x_2 = x_3 = 1, x_4 = x_5 = -2$.

Răspuns: pentru $a = 8$, $b = -4$, $x \in \{1; 1; 1; -2; -2\}$.

Exemplul 14. Numărul $1 + \sqrt{2}$ este soluția ecuației $x^5 + ax^3 + bx^2 + 5x + 2 = 0$.

Să calculăm celelalte soluții, dacă se știe că a *și* b sunt numere raționale.

Fie $x = 1 + \sqrt{2}$ este soluția ecuației date, atunci $x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, $x^3 = 7 + 5\sqrt{2}$, $x^4 = 17 + 12\sqrt{2}$, $x^5 = 41 + 29\sqrt{2}$.

Înlocuind aceste valori în ecuația dată, obținem

$$41 + 29\sqrt{2} + a(7 + 5\sqrt{2}) + b(3 + 2\sqrt{2}) + 5(1 + \sqrt{2}) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (7a + 3b + 48) + (5a + 2b + 34\sqrt{2}) = 0.$$

Deoarece a *și* b sunt numere raționale, atunci ultima egalitate este posibilă atunci și numai atunci când

$$\begin{cases} 7a + 3b + 48 = 0 \\ 5a + 2b + 34 = 0 \end{cases}.$$

Rezolvând acest sistem, obținem $a = -6$, $b = -2$. Astfel ecuația dată devine $x^5 - 6x^3 - 2x^2 + 5x + 2 = 0$.

Deoarece $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, rezultă că $x_2 = 1 - \sqrt{2}$. Prin urmare polinomul

$$f(x) = x^5 - 6x^3 - 2x^2 + 5x + 2$$

se divide prin produsul $(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}) = x^2 - 2x - 1$.

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 6x^3 - 2x^2 + 5x + 2 & x^2 - 2x - 1 \\ \hline - \; x^5 - 2x^4 - x^3 \qquad\qquad\quad & x^3 + 2x^2 - x - 2 \\ \hline 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 5x + 2 & \\ - \; -2x^4 - 4x^3 - 2x^2 \qquad\quad & \\ \hline -x^3 \qquad\qquad + 5x + 2 & \\ - \; x^3 + 2x^2 + x \qquad & \\ \hline -2x^2 + 4x + 2 & \\ - \; -2x^2 + 4x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ecuația dată devine $(x^2 - 2x - 1)(x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0)$. Celelalte soluții le aflăm din ecuația $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 2) - (x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x + 2)(x + 1)(x - 1) = 0$, de unde $x_3 = -2$, $x_4 = -1$, $x_5 = 1$.

Răspuns: pentru $a = -6$ *și* $b = -2, x \in \{-2;\ -1; 1 - \sqrt{2}; 1; 1 + \sqrt{2}\}$.

Exemplul 15. Să determinăm parametrii a, b $și$ c astfel încât ecuația $x^6 + ax^4 + 10x^3 + bx + c = 0$ să admită o soluție cuadruplă.

Fie $x = t$ soluția cuadruplă a ecuației date, atunci polinomul $f(x) = x^6 + ax^4 + 10x^3 + bx + c$ se divide cu $(x - t)^4 = x^4 - 4x^3t + 6x^2t^2 - 4xt^3 + t^4$.

Efectuând împărțirea respectivă, obținem sistemul $\begin{cases} 20t^3 + 4at + 10 = 0 \\ 45t^4 + 6at^2 = 0 \\ 36t^5 + 4at^3 + b = 0 \\ -10t^6 - at^4 + c = 0 \end{cases}$

Din ecuația a doua a sistemului obținem $2a = -15t^2$. Înlocuind în prima ecuație $a = -\frac{15}{2}t^2$ obținem ecuația $2t^3 - 3t + 1 = 0$, care are soluția $t = 1$(alte soluții raționale ecuația nu are). Astfel, $a = -\frac{15}{2}$ $, b = -6$, $c = \frac{5}{2}$. Celelalte soluții le aflăm din ecuația $x^2 + 4x + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x + 5 = 0$, care are soluțiile $x_{5,6} = \frac{-4 \pm \sqrt{6}}{2}$.

Răspuns: pentru $a = -\frac{15}{2}$, $b = -6$, $c = \frac{5}{2}$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = \frac{-4-\sqrt{6}}{2}$, $x_6 = \frac{4+\sqrt{6}}{2}$.

Exemplul 16. Ecuația $x^6 - 6x^5 + 15x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ are numai soluții reale. Să se afle a, b, c $și$ d.

Conform teoremei lui Viète:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 6 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_5x_6 = 15 \end{cases}$$

Însă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_5x_6) = 36 - 30 = 6$.

Calculăm $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \cdots + (x_5 - x_6)^2 = 5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_5x_6) = 30 - 30 = 0$.

Deci $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 1$.

Ecuația se poate scrie sub forma $(x - 1)^6 = 0$. Din egalitatea $x^6 - 6x^5 + 15x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - 1)^6, x^6 - 6x^5 + 15x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$, obținem

$$a = -20, b = 15, c = -6 \text{ și } d = 1$$

Exemplul 17. Să calculăm valorile parametrilor a $și$ b pentru care polinomul $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ se împarte fără rest la polinomul $q(x) = x^2 - x + b$.

Prima metodă

Se știe că pentru ca polinomul $f(x)$ să se împartă fără rest la polinomul $g(x)$ este necesar și suficient ca să existe un $Q(x)$ astfel încât $f(x) = q(x) \cdot Q(x)$.

Polinomul $Q(x)$ este de gradul al doilea, primul termen al căruia este egal cu câtul de la împărțirea primului termen a lui $f(x)$ la primul termen a lui $g(x)$, adică $\frac{6x^4}{x^2} = 6x^2$.

Polinomul $Q(x)$ are forma $6x^2 + mx + n$ și de aceea avem identitatea
$6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2 = (6x^2 - x + b)(6x^2 + mx + n)$.

Deoarece coeficienții de pe lângă x la aceeași putere trebuie să fie egali, avem sistemul:

$$\begin{cases} -7 = m - 6 & (1) \\ a = n - m + 6b & (2) \\ 3 = -n + bm & (3) \\ 2 = bn\,, & (4). \end{cases}$$

din care calculăm cele 4 necunoscute m, n, a, b :

Din (1) calculăm $m = -1$, ia din (3) și (4) obținem $n = -b - 3$, $2 = b(-b - 3)$ sau $b^2 + 3b + 2 = 0$, de unde $b = -1$ *și* $b = -2$.

Dacă $b = -1$, atunci $n = -2$, și prin urmare $a = -7$.

Dacă $b = -2$, atunci $n = -1, a = -12$. Astfel obținem

$$6x^4 - 7x^3 - 7x^2 + 2 = (x^2 - x - 1)(6x^2 - x - 2).$$

Metoda a doua

În mod obișnuit împărțim $f(x)$ la $g(x)$ și obținem câtul $Q(x) = 6x^2 - x + a - 6b - 1$ și restul $R(x) = (a - 5b + 2)x + 6b^2 - ab + b + 2$.

Pentru ca $f(x)$ să se divide exact la $g(x)$ este necesar și suficient ca restul $R(x)$ să fie identic cu zero. Deci:

$$\begin{cases} a - 5b + 2 = 0 \\ 6b^2 - ab + b + 2 = 0 \end{cases}$$

Acest sistem are două soluții

1. $a = -7,\ b = -1$
2. $a = -12,\ b = -2.$

Rezolvând ecuații de grad superior cu parametri, este necesar ca profesorul de matematică să stăpânească un repertoriu cât mai larg de metode, să cunoască principiile care reglementează utilizarea lor, cât și spiritul modern în care trebuie aplicate, găsind o alternativă metodologică optimală.

Articol elaborat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de Stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20.

Bibliografie

1. CERGHIT, Ioan. Metode de învățământ. Iași:Polirom, 2006.
2. LUPU, Ilie; CABAC, Eugeniu. Metodologia rezolvării ecuațiilor de grad superior. Bălți: Presa universitară bălțeană, 2009.
3. LUPU, Ilie. Practicum de rezolvare a problemelor de matematică. Chișinău: CE USM, 2002.
4. РЯЗАНОВСКИЙ, А.Р; МИРОШИН, В.В. Математика. Решение задач повышенной сложности. М.: Интеллект-Центр, 2008.