Acta et Commentationes, Sciences of Education, nr. 4(26), 2021
p. 95-100

ISSN 1857-0623
E-ISSN 2587-3636

CZU: 371.39+519.677

DOI: 10.36120/2587-3636.v26i4.95-100

# REZOLVAREA PROBLEMELOR CU AJUTORUL ECUAȚIILOR ȘI INECUAȚIILOR

**Iraida BRĂDULEAC**, dr. în pedagogie, gr. didactic superior
https://orcid.org/0000-0003-4500-9925
Colegiul Politehnic din Bălți

**Rezumat**. Rezolvarea problemelor reprezintă o activitate de înțelegere, cu un caracter extrem de înalt de analiză și sinteză. Activitatea de rezolvare a problemelor de matematică școlară constituie un cadru optim pentru cultivarea creativității, în special pentru dezvoltarea gândirii logice. În momentul rezolvării problemelor matematice elevul utilizează toate capacitățile sale intelectuale, disponibilitățile psihice, punând accent pe inteligență.

**Cuvinte cheie**: problemă, rezolvarea problemelor, analiză, sinteză, creativitate, gândire logică, inteligență.

# PROBLEM SOLVING WITH THE HELP OF EQUATIONS AND INEQUATIONS

**Abstract**. Problem solving is an in-depth activity, with the character of superior analysis and synthesis. The activity of solving school mathematics problems is an optimal framework for cultivating creativity, especially for the development of logical thinking. Solving problems tests the intellectual abilities of students to the highest degree, requires all their mental availability, especially intelligence.

**Keywords**: problem, problem solving, analysis, synthesis, creativity, logical thinking, intelligence.

## 1. Bazele psiho-pedagogice și metodologice în rezolvarea problemelor de matematică

G. Polya scria: [3] „Dacă doriți să rezolvați o problemă trebuie … să rezolvați probleme”.

Curriculum la matematică consideră etapa rezolvării problemelor de o importanță mare, deoarece este una dintre cele care dezvoltă gândirea, atenția, imaginația și spiritul de observație al elevilor. Nu se pune accentul pe rezolvarea mai multor tipuri de probleme sau utilizarea mai multor metode de rezolvare, ci pe crearea situațiilor noi de învățare, unde este necesar ca elevul să cerceteze, să investigheze și să răspundă cât mai adecvat. Utilizând intuiția, elevii descoperă calea de rezolvare a problemei, formându-și astfel priceperi și deprinderi de analiză a situației de problemă, îți cultivă și dezvoltă capacitatea creatoare a gândirii, sporește flexibilitatea ei și încrederea în propriile forțe.

Ansamblul obiectelor matematice cu care elevii fac cunoștință la școală constituie un mediu prielnic pentru apariția problemelor, unele transferate din cotidian, altele inventate în scop educativ. Valențele formative ale rezolvării și compunerii de probleme sunt evidente. În general, omul pus în fața rezolvării unei probleme adoptă soluția prin încercări la întâmplare, care uneori poate da rezultate sau soluția rezolvării în baza unor experiențe anterioare (algoritm de rezolvare). Nu este exclusă nici folosirea simultană a două sau a mai multor căi de rezolvare a problemelor. În activitatea didactică, diversitatea problemelor puse spre rezolvare impune luarea în considerare a tuturor căilor de abordare. Astfel se creează premise reale de rezolvare a creativității, a imaginației, crește motivația pentru învățarea matematicii.

În momentul în care elevul încearcă să rezolve o problemă, el se confruntă cu un obstacol care este necesar de a fi ocolit, de aici putem conchide că rezolvarea problemelor semnifică atingerea unor obiective care nu sunt direct abordabile.

Determinarea soluției problemei este o performanță specifică inteligenței, iar inteligența este apanajul speciei umane, se poate spune că, dintre toate îndeletnicirile omenești, cea de rezolvare a problemelor este cea mai caracteristică. Spre deosebire de exercițiu în care majoritatea elevilor aplică un set de reguli de rutină, pentru a ajunge la un răspuns, la rezolvarea problemelor, faci pauză și reflectezi pentru găsirea versiunii matematice a problemei.

Care sunt metodele de predare pentru rezolvarea problemelor în matematică, pe care le considerăm nestandardizate în acest moment? Din păcate, nimeni nu a venit cu o rețetă universală, având în vedere unicitatea acestor sarcini. Unii profesori se antrenează în exerciții tipare. Se întâmplă în felul următor: profesorul arată soluția, iar apoi elevul repetă acest lucru de multe ori când rezolvă probleme. Acest lucru ucide interesul elevilor față de matematică, ceea ce este cel puțin trist.

În matematică, nu există reguli generale pentru rezolvarea oricărei probleme nestandardizate, deoarece astfel de probleme sunt într-o oarecare măsură unice. O sarcină nestandardizată în majoritatea cazurilor este percepută ca o provocare a intelectului și generează nevoia de a se realiza în depășirea obstacolelor, în dezvoltarea abilităților creative.

## 2. Probleme nestandard ce se rezolvă cu ajutorul sistemelor de ecuații și inecuații

Prezint câteva exemple de probleme netipice ce se rezolvă cu ajutorul sistemelor de ecuații și inecuații. Rezolvarea acestora necesită iscusință, cunoștințe vaste din diverse domenii ale matematicii, gândire logică și deprinderi practice.

**Problema 1:** Un număr rațional pozitiv este reprezentat de o fracție nenulă. Numitorul ei este mai mic decât pătratul numărătorului cu 1. Dacă adunăm la numărător și numitor 2 atunci fracția este mai mare decât $1/_2$. Aflați această fracție.

***Rezolvare:*** Fie $\frac{n}{m}$ fracția căutată, unde $n$ și $m$ sunt numere naturale nenule. Din condiția problemei rezultă că:

$$\begin{cases} m = n^2 - 1 \\ \frac{n+2}{m+2} > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Deoarece $n + 2 > 0$ și $m + 2 > 0$ rezultă că $2n + 4 > m + 2$ și $2n + 4 > n^2 - 1 + 2$, de unde $n^2 - 2n - 3 < 0$. Rezolvând această inecuație obținem $n \in (-1; 3)$. Din prezizările anterioare decidem că $n = 1$ sau $n = 2$. Dacă $n = 1$ atunci $m = 0$, iar dacă $n = 2$ atunci $m = 3$.

***Răspuns:*** $\frac{2}{3}$.

**Problema 2:** La un depozit s-a adus făină în saci de 15 kg și mălai în saci de 20 kg, numărul sacilor de 20 kg fiind mai mare decât a celor de 15 kg. Doi saci s-au dus la cantină, ceea ce reprezintă $1/5$ din toată cantitatea. Trei saci, ce constituie jumătate din toată cantitatea rămasă, s-au vândut. Câți saci cu făină și câți saci cu mălai au fost aduși la depozit?

***Rezolvare:*** Notăm cu *x* numărul sacilor cu făină, cu *y* numărul sacilor cu mălai iar cu *m* – cantitatea de făină și mălai adusă la depozit. Atunci $\frac{1}{5}m$ – a primit cantina și $\frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{5}m\right)$ s-a vândut.

Deoarece $x < y, \frac{1}{5}m \geq 30$ și $\frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{5}m\right) \leq 60$ rezultă:

$$\begin{cases} \frac{m}{5} \geq 30 \\ \frac{2m}{5} \leq 60 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} m \geq 150 \\ m \leq 150 \end{cases},$$

deci $m = 150$.

Rezultă că la cantină s-au trimis 30 kg de făină, adică 2 saci cu făină iar 60 kg s-a vândut, adică 3 saci cu mălai. La depozit au rămas 60 kg, adică 4 saci cu făină sau 3 saci cu mălai. Din condițiile problemei $x = 2$ și $y = 6$.

***Răspuns:*** *2 saci cu făină și 6 saci cu mălai.*

**Problema 3:** Nouă numere naturale formează o progresie aritmetică. Suma pătratelor acestor numere este egală cu pătratul unui număr natural mai mic decât 50. Aflați aceste numere.

***Rezolvare:*** Fie *a* termenul al cincilea al regresiei și *r* rația progresiei. Termenii progresiei sunt: $a - 4r; a - 3r; a - 2r; a - r; a; a + r; a + 2; a + 3r; a + 4r$. Dacă $b$ este un număr natural mai mic decât 50, atunci, conform condițiilor problemelor obținem:

$$\begin{cases} (a-4r)^2 + (a-3r)^2 + (a-2r)^2 + (a-r)^2 + a^2 + (a+r)^2 + (a+2r)^2 + (a+3r)^2 + (a+4r)^2 = b^2 \\ a - 4r \geq 0 \\ 0 < b < 50 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 9a^2 + 60r^2 = b^2 \\ a \geq 4r \\ 0 < b < 50 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 3(3a^2 + 20r^2) = b^2 \\ a \geq 4r \\ 0 < b < 50 \end{cases}.$$

Cercetăm prima ecuație a sistemului $3(3a^2 + 20r^2) = b^2$. Deoarece membrul stâng este un număr natural divizibil cu 3 rezultă că *b* este divizibil cu 3 sau $b = 3x$, unde $x > 0$ este un număr natural.

Deci:

$$\begin{cases} 3(3a^2 + 20r^2) = 9x^2 \\ a \geq 4r \\ 0 < 3x < 50 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 + 20r^2 = 3x^2 \\ a \geq 4r \\ 0 < x \leq 16 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 3(x^2 - a^2) = 20r^2 \\ a \geq 4r \\ 0 < x \leq 16 \end{cases}.$$

Din prima ecuație a ultimului sistem rezultă că $r = 3y$, unde *y* este un număr natural nenul. Atunci:

$$\begin{cases} 3(x^2 - a^2) = 20 \cdot (3y)^2 \\ a \geq 12y \\ 0 < x \leq 16 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 - a^2 = 60y^2 \\ a \geq 12y \\ 0 < x \leq 16 \end{cases}.$$

Deoarece $60y^2 > 0$ și $x + a > 0$ rezultă că $x - a > 0$ sau $x > a$ de unde obținem că $y = 1$. Deci:

$$\begin{cases} x^2 - a^2 = 60 \\ a \geq 12 \\ 0 < x \leq 16 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 60 + a^2 = 60 \\ a \geq 12 \\ 0 < x \leq 16 \end{cases}.$$

Deoarece în membrul drept al primei ecuații trebuie să fie un pătrat perfect rezultă că $60 = 2ac + c^2$ , unde $c > 0$ este număr natural. Acest lucru se mai scrie $c^2 = 60 - 2ac$ sau $c^2 = 2(30 - ac)$, rezultă că c este un număr par. Înlocuind obținem $4n^2 = 2(30 - 2an) \leftrightarrow n^2 = 15 - an \leftrightarrow 15 - an > 0$, adică $a < \frac{15}{n}$. Ținând cont ș de celelalte condiții rezultă că *a* poate fi egal cu 12, 13 și 14. Unica valoare convenabilă este 14, de unde reiese că $x = 16$, pentru *b* obținem valoarea 48 iar pentru *r* – 3.

***Răspuns:*** $\{2; 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; 26\}$ .

**Problema 4:** Un elev a cumpărat de o sumă de bani rechizite, caiete și manuale. Dacă rechizitele ar fi fost de 5 ori mai ieftine, caietele de 2 ori mai ieftine, iar manualele de două ori și jumătate mai ieftine, atunci el ar fi plătit 8 lei. Dacă rechizitele ar fi fost de două ori mai ieftine, caietele de 4 ori mai ieftine, iar manualele de 3 ori mai ieftine, atunci totul ar fi costat 12 lei. Ce a costat mai mult, rechizitele sau caietele? Care a fost suma minimă pe care a avut-o elevul?

***Rezolvare:***

Fie *x* – suma plătită pe rechizite, *y* – suma plătită pe caiete și *z* – suma plătită pe manuale. Alcătuim sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2,5} = 8 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 12 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y + 4z = 80 \\ 6x + 3y + 4z = 144 \end{cases}.$$

Scăzând prima ecuație din a doua obținem:

$$2x - y = 32 \leftrightarrow x = 16 + \frac{y}{2}.$$

Deoarece $y > 0$ rezultă că $x > 16$, deci rechizitele au costat mai mult de 16 lei. Înlocuind în sistem obținem:

$$y = 8 - \frac{2}{3}z \leftrightarrow z = 12 - \frac{3}{2}y\,;$$

$z > 0$ implică $0 < y < 8$ . Deci dacă $x > 16$ atunci $0 < y < 8$ și $0 < z < 12$ .

***Răspuns:*** Rechizitele sunt mai scumpe decât caietele, elevul a avut peste 24 lei.

**Problema 5:** Unui elev i s-a cerut să afle un număr natural obținut în rezultatul înmulțirii a două numere naturale de trei cifre împărțit la un număr natural de cinci cifre. El nu a observat semnul înmulțirii și a împărțit un număr de șase cifre la numărul de cinci cifre. Astfel a obținut un număr de 3 ori mai mare. Aflați aceste trei numere.

***Rezolvare:*** Fie *a, b* primul și respectiv al doilea număr de trei cifre, iar *c* - numărul de cinci cifre. Câtul ar fi fost $\frac{a \cdot b}{c} \in N$. Elevul a împărțit numărul $1000a + b$ la numărul c și a obținut $\frac{3ab}{c}$ sau

$$\begin{cases} 1000a + b = 3ab \\ c > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b = a(3b - 1000) \\ c > 0 \end{cases}.$$

Din prima relație rezultă că *a* divide *b* sau $b = an, n \in N^*$. Din condiția problemei mai rezultă că $n \in (0; 10)$.

De aici obținem:

$$\begin{cases} b = a(3b - 1000) \\ b = na \\ 0 < n < 10 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} na = a(3an - 1000) \\ b = na \\ 0 < n < 10 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 1000 + n = 3an \\ b = na \\ 0 < n < 10 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 999 + 1 + n = 3an \\ b = na \\ 0 < n < 10 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 1 + n = 3(an - 333) \\ b = na \\ 0 < n < 10 \end{cases}.$$

Din prima ecuație obținem că 3 divide *n + 1* sau $n + 1 = 3p$, unde *p* este un număr natural nenul, rezultă:

$$\begin{cases} 3p = 3((3p - 1)a - 333) \\ b = (3p - 1)a \\ 0 < 3p < 10 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{p + 333}{3p - 1} \\ b = (3p - 1)a \cdot \\ 0 < p \le 3 \end{cases}$$

Deci *p* poate lua una dintre valorile 1, 2, 3. Pentru $p = 1$, obținem $a = 167, b = 334$, pentru $p = 2$, obținem $a = 67, b = 134$, pentru $p = 3$ numerele obținute nu sunt naturale.

Satisfac condițiile problemei doar numerele obținute din cazul $p = 1$. Pentru determinarea numărului c descompunem produsul $167 \cdot 334$. Divizorii proprii al lui sunt: 2, 167, 334, 27889, 55778. Corespund condiției doar ultimele două numere.

***Răspuns***: *a) 167, 334, 27889; b) 167, 334, 55778.*

## 3. Concluzii

Pentru ca activitatea de rezolvare de probleme să-și materializeze valențele formative în direcția dezvoltării gândirii logice este nevoie de un conținut al problemelor și de o orientare a activității de rezolvare a lor în conformitate cu acest scop. Astfel, se formează la elevi capacitatea de a sesiza probleme, de a pune și conștientiza o anumită problemă.

Pentru a dezvolta gândirea creatoare la elevi, aceștia trebuie să fie încurajați în activități, să fie apreciat efortul depus de ei și să fie stimulați chiar și atunci când vor da răspunsuri complet eronate. Dezvoltarea potențialului de gândire și creativitate se realizează prin activități care solicită independența, inteligența, originalitatea.

Compunând și rezolvând aceste probleme se realizează una dintre cele mai importante etape ale cultivării gândirii logice. Confruntarea elevilor cu probleme implică scopul rezolvării, conștiința dificultăților de rezolvare și o anumită motivație. În sarcina profesorului rămâne doar asigurarea condițiilor concrete prin care să-i pună pe elevi în situația de a înțelege conținutul problemei ca și însușirea de către elevi a metodelor de rezolvare a problemelor. Acest proces este uneori mai greoi la unii elevi, din cauza slabelor deprinderi de calcul, efortul lor concentrându-se nu atât asupra liniei raționamentului problemei, cât asupra efectuării calculelor.

În rezolvarea unei probleme este mobilizată nu numai gândirea, ci și întreaga personalitate a celui care rezolvă probleme, în coordonatele ei raționale, afective, volitive.

Așa cum spune Eugen Rusu în [4]: „Nu se lucrează în matematică numai cu mintea".

**Bibliografie**


1. CERGHIT, Ioan. *Metode de învățământ*. Iași: Polirom, 2006.
2. CÎRJAN, Florin. *Didactica Matematicii*. București: Editura Corint, 2007.
3. POLYA, George. *Cum rezolvăm o problemă*. București: Editura Științifică și Enciclopedică, 1965.
4. RUSU, Eugen. Atracția pentru problematic în activitatea matematică. București: *Revista de Pedagogie*, 1965. nr. 1.