CZU: 37.016:519.1 DOI: 10.36120/2587-3636.v27i1.21-30

METODOLOGIA REZOLVĂRII PROBLEMELOR DE COMBINATORICĂ

Ilie LUPU, dr. hab., prof.univ. UST
https://orcid.org/0000-0003-1375-3071

Rezumat. Materia expusă în articol punctează probleme majore ale metodologiei rezolvării problemelor de combinatorică, accesibile elevilor din licee, conține un număr impunător de exerciții, însoțite de rezolvări cu aplicarea unor diverse strategii. Lucrarea va contribui la dezvoltarea învățământului matematic, constituind un suport științific și didactic util și eficient.

Cuvinte-cheie: metodologie, probleme, combinatorică, strategii, învățământ matematic.

METHODOLOGY OF SOLVING COMBINATORY PROBLEMS

Abstract. The subject presented in the article points out major problems of the methodology of solving combinatorics problems, accessible to high school students, contains an impressive number of exercises, accompanied by solutions with the application of various strategies. The paper will contribute to the development of mathematics education, providing a useful and effective scientific and didactic support.

Keywords: methodology, problems, combinatorics, strategies, mathematics education.

Introducere

Domeniul matematicii în care se studiază probleme referitoare la numărul combinărilor posibile de obiecte date se numește *combinatorică*. Combinatorica este un compartiment al teoriei mulțimilor. Orice problemă de combinatorică poate fi redusă la o problemă despre mulțimi finite.

Combinatorica a luat naștere în secolul XVI. Problemele jocurilor de noroc au reprezentat forța motrică în dezvoltarea combinatoricii și, în același timp, a teoriei probabilității.

Cu cercetarea teoretică a problemelor combinatoricii în secolul XVII s-au ocupat savanții francezi Pascal Blaise (1623-1662) și Fermat Pierre (1601-1665), pornind de la probleme de noroc. Cu studiul aranjamentelor s-a ocupat pentru prima dată Jacques Bernoulli (1654-1705), căruia i se datorează și denumirea. Simbolul A_n^k a fost introdus de matematicianul italian Eugen Netto (1846-1919) în anul 1901.

Primele procedee de calcul pentru unele combinări au fost date de savantul indian Anarya Bhaskara (1114-1178). Contribuții ulterioare au adus celebrul matematician italian Nicolo Tartaglia (1500-1557) și savantul francez Pierre Hérigone (1501-1576).

Notația C_n^k a fost introdusă de Eugen Netto în 1901. Denumirea se întâlnește inițial la Blaise Pascal.

În ultimii ani combinatorica se dezvoltă intens, în legătură cu creșterea interesului general referitor la problemele matematicii discrete.

Probleme combinatorii de calcul

Ex.1. Să calculăm $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$.

Rezolvare: Notăm $S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$.

Aplicând formula combinărilor complementare $C_n^k = C_n^{n-k}$, obținem:

$$S_n = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1}.$$

Adunând aceste două egalități, obținem: $2S_n = n[C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n] = n \cdot 2^n$, de unde $S_n = n \cdot 2^{n-1}$.

<u>Ex.2.</u> Să se calculeze $\frac{A_{n+k}^{k+3} + A_{n+k}^{k+2}}{A_{n+k}^{k+1} - A_{n+k}^{k}}$.

Rezolvare: Utilizând formula $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, obținem:

$$\frac{A_{n+k}^{k+3} + A_{n+k}^{k+2}}{A_{n+k}^{k+1} - A_{n+k}^{k}} = \left[\frac{(n+k)!}{(n-3)!} + \frac{(n+k)!}{(n-2)!}\right] : \left[\frac{(n+k)!}{(n-1)!} - \frac{(n+k)!}{n!}\right] =$$

$$= \left[\frac{(n+k)!}{(n-3)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)\right] : \left[\frac{(n+k)!}{(n-1)!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = \left[\frac{(n+k)!}{(n-3)!} \cdot \frac{n-1}{n-2}\right] : \left[\frac{(n+k)!}{(n-1)!} \cdot \frac{n-1}{n}\right] =$$

$$= \frac{(n+k)!}{(n-3)!} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{(n-1)!\,n!}{(n-1)(n+k)!} = \frac{(n-1)!\,n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{(n-2)!\,(n-1)n}{(n-2)!} =$$

$$= n(n-1).$$

<u>Ex.3.</u> Să se calculeze $C_8^2 + C_8^3 + C_9^4 + C_{10}^5 + C_{11}^6$.

Rezolvare: Utilizând formula $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$, obținem consecutiv: $C_8^2 + C_8^3 = C_9^3$; $C_9^3 + C_9^4 = C_{10}^4$; $C_{10}^4 + C_{10}^5 = C_{11}^5$ și $C_{11}^5 + C_{11}^6 = C_{12}^6 = \frac{12!}{6!6!} = 924$.

<u>Ex.4.</u> Să se calculeze $\left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}\right] : \frac{n^2-1}{(n+1)!}$.

Rezolvare: $\left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}\right] : \frac{n^2-1}{(n+1)!} = \left(\frac{1}{n!} - \frac{n}{n!}\right) \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)(n+1)} = \frac{1-n}{n!} \cdot \frac{n!\cdot(n+1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{1-n}{n-1} = -1$.

<u>Ex.5.</u> Să se calculeze $3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + \cdots + (4n-1)C_n^n$.

Rezolvare:

$$3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + \cdots + (4n-1)C_n^n =$$

$$= 4(C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n) - (C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n) = n \cdot 2^{n-1} - 2^{n+1}.$$

<u>Ex.6.</u> Știind că $C_{99}^5 = a$ și $C_{100}^{95} = b$, să se exprime C_{100}^{95} prin a și b.

Rezolvare:

Cum $C_{99}^4 + C_{99}^5 = C_{100}^5$, iar $C_{100}^{95} = C_{100}^5$, obținem $C_{100}^{95} = a + b$.

<u>Ex.7</u> Știind că $C_{13}^1 + C_{13}^3 + C_{13}^5 + \cdots + C_{13}^{13} = A$ și $C_{30}^0 + C_{30}^2 + C_{30}^4 + \cdots + C_{30}^{30} = B$, să calculăm $A \cdot B$.

Rezolvare: $C_{13}^1 + C_{13}^3 + C_{13}^5 + \cdots + C_{13}^{13} = 2^{13-1} = 2^{12}$, iar $C_{30}^0 + C_{30}^2 + C_{30}^4 + \cdots + C_{30}^{30} = 2^{30-1} = 2^{29}$. Astfel, $A \cdot B = 2^{12} \cdot 2^{29} = 2^{41}$.

<u>Ex.8.</u> Să se calculeze $\frac{n! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$.

Rezolvare: $\frac{n!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!} = \frac{n!+n!(n+1)!}{n!(n+1)(n+2)-n!(n+1)} = \frac{n!(1+n+1)}{n!(n+1)(n+2-1)} = \frac{n+2}{(n+1)(n+1)} = \frac{n+2}{(n+1)^2}$.

Egalități combinatorii

<u>Ex.1.</u> Să se demonstreze că pentru orice $n \in N^*$are loc egalitatea

$$\frac{C_n^1}{C_n^0}+\frac{2C_n^2}{C_n^1}+\frac{3C_n^3}{C_n^2}+\cdots+\frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Rezolvare: $\frac{C_n^1}{C_n^0}=n;\ \frac{2C_n^2}{C_n^1}=n-1;\ \frac{3C_n^3}{C_n^2}=n-2;$

$$\frac{(n-2)C_n^{n-2}}{C_n^{n-3}}=\frac{(n-2)\cdot C_n^2}{C_n^3}=3;\ \frac{(n-1)C_n^{n-1}}{C_n^{n-2}}=\frac{(n-1)\cdot C_n^1}{C_n^2}=2;\ \frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}}=\frac{n\cdot C_n^0}{C_n^1}=1.$$

Adunând aceste egalități membru cu membru, obținem:

$$\frac{C_n^1}{C_n^0}+\frac{2C_n^2}{C_n^1}+\frac{3C_n^3}{C_n^2}+\cdots+\frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}}=1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ex.2. Să se demonstreze că pentru orice $n\in N^*$ are loc egalitatea

$$C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\cdots+2^nC_n^n=3^n.$$

Utilizând formula lui Newton, obținem:

$$(1+2x)^n=C_n^0+C_n^1\cdot 2x+C_n^2\cdot 2^2\cdot x^2+C_n^3\cdot 2^3\cdot x^3+\cdots+C_n^n\cdot 2^n\cdot x^n.$$

Substituind $x=1$, obținem:

$3^n=C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+2^3C_n^3+\cdots+2^nC_n^n.$

Ex.3. Să demonstrăm că pentru orice $n\in N^*$ are loc egalitatea

$$2C_n^0+\frac{2^2C_n^1}{2}+\frac{2^3C_n^2}{3}+\cdots+\frac{2^{n+1}C_n^n}{n+1}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}.$$

Aplicând formula lui Newton, obținem:

$$(1+x)^{n+1}=C_{n+1}^0+C_{n+1}^1x+C_{n+1}^2x^2+C_{n+1}^3x^3+\cdots+C_{n+1}^{n+1}x^{n+1};$$

$$(1+x)^{n+1}-1=C_{n+1}^1x+C_{n+1}^2x^2+C_{n+1}^3x^3+\cdots+C_{n+1}^nx^n+C_{n+1}^{n+1}x^{n+1}.$$

Însă $C_{n+1}^1=n+1;\ C_{n+1}^2=\frac{(n+1)\cdot n}{2};\ \ C_{n+1}^3=\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3};$

Astfel, $(x+1)^{n+1}-1=(n+1)x+\frac{n(n+1)}{2}x^2+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots+x^{n+1}.$

Împărțind ambii membri ai ultimei egalități la $(n+1)$, obținem:

$$\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}=x+\frac{n}{2}x^2+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n+1}=$$

$$=C_n^0x+\frac{C_n^1}{2}\cdot x^2+\frac{C_n^2}{3}\cdot x^3+\cdots+\frac{C_n^n}{n+1}\cdot x^{n+1}.$$

Pentru $x=2$, obținem $\frac{3^{n+1}-1}{n+1}=2C_n^0+\frac{2^2\cdot C_n^1}{2}+\frac{2^3\cdot C_n^2}{3}+\cdots+\frac{2^{n+1}\cdot C_n^n}{n+1}.$

Ex.4. Să se demonstreze că pentru orice $n,k\in N, k\geq 2$, are loc egalitatea

$$\frac{A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}}{A_{n+k}^n}=k^2.$$

Aplicând formula pentru calculul numărului de aranjamente, obținem:

$$\frac{A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}}{A_{n+k}^n}=\frac{\frac{(n+k)!}{(k-2)!}+\frac{(n+k)!}{(k-1)!}}{\frac{(n+k)!}{k!}}=\frac{\frac{1}{(k-2)!}+\frac{1}{(k-1)!}}{\frac{1}{k!}}=\frac{k!}{(k-2)!}+\frac{k!}{(k-1)!}=k(k-1)+k=k^2.$$

Ex.5. Să se demonstreze că pentru orice $k,n\in N^*, k<n$, are loc egalitatea

$$A_n^k=A_{n-1}^k+k\cdot A_{n-1}^{k-1}.$$

$$A_{n-1}^k+k\cdot A_{n-1}^{k-1}=\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}+k\cdot\frac{(n-1)!}{(n-k)!}=(n-1)!\left[\frac{1}{(n-k-1)!}+\frac{k}{(n-k)!}\right]=$$

$$= (n-1)! \cdot \frac{1}{(n-k-1)!}\left(1+\frac{k}{n-k}\right) = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k.$$

Ex.6. Să se demonstreze că are loc egalitatea

$$\frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{3!(n-3)!} + \frac{1}{5!(n-5)!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{2^{n-1}}{n!}.$$

Înmulțind ambii membri ai egalității cu $n!$, obținem

$$\frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{5!(n-5)!} + \cdots + \frac{n!}{(n-1)!} = 2^{n-1} \Leftrightarrow C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots + C_n^n = 2^{n-1}.$$

Ultima egalitate este adevărată, deoarece membrul stâng reprezintă suma coeficienților binomiali ai termenilor de rang impar, care este egală cu 2^{n-1}.

Ex.7. Să se demonstreze că pentru orice $n \in N$ are loc egalitatea

$$16 \cdot C_{2n}^2 + 32 \cdot C_{2n}^4 + 48 \cdot C_{2n}^6 + \cdots + 8(2n-2)C_{2n}^{2n-2} + 8 \cdot 2nC_{2n}^{2n} = n \cdot 2^{2n+2}.$$

Aplicând formula $kC_m^k = mC_{m-1}^{k-1}$, obținem

$$16 \cdot C_{2n}^2 + 32 \cdot C_{2n}^4 + 48 \cdot C_{2n}^6 + \cdots + 8(2n-2) \cdot C_{2n}^{2n-2} + 8 \cdot 2nC_{2n}^{2n} =$$
$$= 8[2C_{2n}^2 + 4C_{2n}^4 + 6C_{2n}^6 + \cdots + (2n-2)C_{2n}^{2n-2} + 2nC_{2n}^{2n}] =$$
$$= 8(2C_{2n-1}^1 + 2nC_{2n-1}^3 + \cdots + 2nC_{2n-1}^{2n-2} + 2nC_{2n-1}^{2n-1}) =$$
$$= 16n(C_{2n-1}^1 + C_{2n-1}^3 + C_{2n-1}^5 + \cdots + C_{2n-1}^{2n-3} + C_{2n-1}^{2n-1}) = 16n \cdot \frac{2^{2n-1}}{2} = n \cdot 2^{2n+2}.$$

Ecuații combinatorii

Ex.1. Să se rezolve ecuația

$$C_x^3 + C_x^4 = x(x-2).$$

Rezolvare: $DVA: x \geq 4\,, x \in N$

Aplicând formula $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$, obținem ecuația

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!} = x(x-2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{3!} + \frac{(x-1)(x-3)}{4!} = 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{6} + \frac{(x-1)(x-3)}{24} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x - 4 + x^2 - 4x + 3 = 24 \Leftrightarrow\Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x_1 = -5, x_2 = 5;\ -5 \notin DVA\,.$$

Răspuns: $S = \{5\}$.

Ex.2. Să se rezolve ecuația

$$A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 58.$$

Rezolvare: $DVA: x \geq 4\,, x \in N.$

$$A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 58 \Leftrightarrow A_{x-2}^2 + C_x^2 = 58 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) + \frac{x(x-1)}{2!} = 58 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 11x - 104 = 0,$$

de unde $x = 8, x = -\frac{13}{3}$.

Constatăm că doar $8 \in N$.

Răspuns: $S = \{8\}$.

Ex.3. Să rezolvăm ecuația $A_x^5 = 18\, A_{x-2}^4$.

Rezolvare: $DVA: x \geq 6\,, x \in N.$

$$A_x^5 = 18\ \ A_{x-2}^4 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)(x-4) = 18(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) = 18(x-5) \Leftrightarrow x^2 - 19x + 90 = 0, \text{ de unde } x_1 = 9, x_2 = 10.$$

Răspuns: $S = \{9,10\}$.

Ex.4. Să se rezolve ecuația

$$P_{x+3}(A_x^5 \cdot P_{x-5}) = 720.$$

Rezolvare: $DVA: x \geq 5, x \in N$.

$$P_{x+3}: (A_x^5 \cdot P_{x-5}) = 720 \Leftrightarrow (x+3)! : \frac{x!}{(x-5)!} \cdot (x-5)! = 720 \Leftrightarrow \frac{(x+3)!}{x!} = 720 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x!(x+1)(x+2)(x+3)}{x!} = 720 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 11x - 714 = 0 \Leftrightarrow (x-7)(x^2 + 13x + 102) = 0,$$

de unde $x = 7$. (Ecuația $x^2 + 13x + 102 = 0$ nu are soluții reale, deci nici naturale).

Răspuns: $S = \{7\}$.

Ex.5. Să se rezolve ecuația

$$C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + \cdots + C_x^{x-9} + C_x^{x-10} = 1023.$$

Rezolvare: $DVA: x \geq 10, x \in N$.

$$C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + \cdots + C_x^{x-9} + C_x^{x-10} = 1023 \Leftrightarrow C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 + \cdots + C_x^9 + C_x^{10} =$$

$$= 1023 \Leftrightarrow (C_x^0 + C_x^1 + C_x^2 + \cdots + C_x^9 + C_x^{10}) - C_x^0 = 1023 \Leftrightarrow 2^X - 1 = 1023 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 1024 \Leftrightarrow 2^x = 2^{10},$$

de unde $x = 10$.

Răspuns: $S = \{10\}$.

Ex.6. Să se rezolve ecuația

$$A_x^{x-3} = x \cdot P_{x-2}.$$

Rezolvare: $DVA: x \geq 3, x \in N$.

$$A_x^{x-3} = x \cdot P_{x-2} \Leftrightarrow \frac{x!}{3!} = x \cdot (x-2)! \Leftrightarrow \frac{(x-2)!(x-1)x}{6} = x(x-2)! \Leftrightarrow \frac{x-1}{6} = 1,$$

de unde $x = 7$.

Răspuns: $S = \{7\}$.

Ex.7. Să se rezolve ecuația

$$A_{x+1}^{x-1} + 2 \cdot P_{x-1} = \frac{30}{7} \cdot Px.$$

Rezolvare: $DVA: x \geq 1, x \in N$.

$$A_{x+1}^{x-1} + 2 \cdot P_{x-1} = \frac{30}{7} \cdot Px \Leftrightarrow \frac{(x+1)!}{2!} + 2 \cdot (x-1)! = \frac{30}{7} \cdot x! \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)! \cdot x \cdot (x+1)}{2} + 2 \cdot (x-1)! = \frac{30}{7} \cdot (x-1)! \cdot x \Leftrightarrow x^2 + x + 4 = \frac{60}{7} \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 - 53x + 28 = 0,$$

de unde $x_1 = 7;\ x_2 = \frac{7}{4}$.

Răspuns: $S = \{7\}$.

Ex.8. Să se rezolve ecuația

$$A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-2} = 14(x+1).$$

Rezolvare: $DVA: x \geq 3, x \in N$.

$$A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-2} = 14(x+1) \Leftrightarrow A_{x+1}^3 + C_{x+1}^3 = 14(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot x\cdot(x-1)+\frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-1)}{6}=14(x+1)\Leftrightarrow 7x(x-1)=84\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-12=0,$$

de unde $x_1=4\,,x_2=-3$.

Constatăm că doar $4\in DVA$.

Răspuns: $S=\{4\}$.

Ex.9. Să se rezolve ecuația

$$A_{x+1}^{n+1}\cdot(x-n)!=90(x-1)!.$$

$DVA: x\in N^+$.

$$A_{x+1}^{n+1}\cdot(x-n)!=90(x-1)!\Leftrightarrow \frac{(x+1)!}{(x-n)!}\cdot(x-n)!=90(x-1)!\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)!\,x(x+1)=90(x-1)!\Leftrightarrow x(x+1)=90\Leftrightarrow x^2+x-90=0,$$

de unde $x_1=9, x_2=-10$.

Constatăm că $-10\notin DVA$.

Răspuns: $S=\{9\}$.

Ex.10. Să se rezolve ecuația

$$C_{x+1}^2\cdot A_x^2-4x^3=(A_{2x}^1)^2.$$

$DVA: x\geq 2\,,x\in N$.

$$C_{x+1}^2\cdot A_x^2-4x^3=(A_{2x}^1)^2\Leftrightarrow \frac{A_{x+1}^2}{P_2}\cdot A_x^2-4x^3=4x^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)x}{2}\cdot x(x-1)-4x^3=4x^2\Leftrightarrow x^2-8x-9=0,$$

de unde $x_1=9, x_2=-1$. Constatăm că doar $9\in DVA$.

Răspuns: $S=\{9\}$.

Ex.11. Să se rezolve ecuația

$$\frac{n!(n+2)}{(n-1)!(n+2)}=480.$$

$DVA: n\in N^*$.

$$\frac{n!\,(n+2)!}{(n-1)!\,(n+2)}=480\Leftrightarrow\frac{(n-1)!\,n\cdot(n+1)!\,(n+2)}{(n-1)!\,(n+2)}=480\Leftrightarrow n(n+1)!=480\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n(n+1)!=4\cdot 120,$$

de unde $n=4$.

Răspuns: $S=\{4\}$.

Ex.12. Să se rezolve ecuația

$$n:\frac{(3n+2)!}{(3n-1)!}=60.$$

$DVA: n\in N^*$.

$$n:\frac{(3n+2)!}{(3n-1)!}=60\Leftrightarrow\frac{(3n-1)!\,(3n)\cdot(3n+1)(3n+2)}{(3n-1)!}=60\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3n)\cdot(3n+1)(3n+2)=60\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3n)(3n+1)(3n+2)=3\cdot 4\cdot 5,$$

de unde $n = 1$.

Răspuns: $S = \{1\}$.

Inecuații combinatorii

<u>Ex.1.</u> Să se rezolve inecuația

$$x(x-3)! < 108 \cdot (x-4)!$$

Rezolvare: $DVA: x \geq 4, x \in N$.

$$x(x-3)! < 108 \cdot (x-4)! \Leftrightarrow x \cdot (x-4)!\,(x-3) < 108(x-4)! \Leftrightarrow x(x-3) < 108 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 108 < 0 \text{ , de unde } -9 < x < 12.$$

Ținând cont de DVA , obținem $x \in \{4,5,6,7,8,9,10,11\}$.

Răspuns: $S = \{4,5,6,7,8,9,10,11\}$.

<u>Ex.2.</u> Să se rezolve inecuația $C_{16}^{x-2} > C_{16}^{x}$.

Rezolvare: $DVA: 2 \leq x \leq 16, x \in N$.

$$C_{16}^{x-2} > C_{16}^{x} \Leftrightarrow \frac{16!}{(x-2)!\,(18-x)!} > \frac{16!}{x!\,(16-x)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (17-x)(18-x) < x(x-1) \Leftrightarrow 17 \cdot 18 + x^2 - 35x < x^2 - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 34x > 17 \cdot 18 \Leftrightarrow x > 9.$$

Ținând cont de DVA , obținem $\{9 < x \leq 16, x \in N\}$.

Răspuns: $S = \{9 < x \leq 16, x \in N\}$.

<u>Ex.3.</u> Să se rezolve inecuația $C_{x}^{x-1} \leq C_{x}^{x-3}$.

Rezolvare: $DVA: x \geq 3, x \in N$.

$$C_{x}^{x-1} \leq C_{x}^{x-3} \Leftrightarrow C_{x}^{1} \leq C_{x}^{3} \Leftrightarrow x \leq \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \geq 0,$$

de unde $x \leq -1$ sau $x \geq 4$.

Răspuns:$\{x \geq 4 | x \in N\}$.

<u>Ex.4.</u> Să se rezolve inecuația

$$A_{x+1}^{4} : C_{x-1}^{x-3} > 14 \cdot P_3.$$

Rezolvare: $DVA: x \ \geq 3, x \in N$.

$$A_{x+1}^{4} : C_{x-1}^{x-3} > 14 \cdot P_3 \Leftrightarrow A_{x+1}^{4} : C_{x-1}^{x-3} > 14 \cdot P_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot 2 > 14P_3 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) > 42 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 - 42 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 44 > 0,$$

de unde

$$\left[\begin{array}{l} x > \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{177}\right) \\ x > \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{177}\right) \end{array}\right..$$

Ținând cont de DVA, obținem $\{x \geq 8 | x \in N\}$.

Răspuns: $S = \ \{x \geq 8 | x \in N\}$.

Ex.5. Să se rezolve inecuația

$$C_{x+5}^{4}-\frac{143\cdot P_{x+5}}{96\cdot P_{x+3}}<0.$$

Rezolvare: $DVA: x \in N$.

$$C_{x+5}^{4}-\frac{143\cdot P_{x+5}}{96\cdot P_{x+3}}<0 \Leftrightarrow \frac{A_{x+5}^{4}}{P_4}-\frac{143\cdot P_{x+5}}{96\cdot P_{x+3}}<0 \Leftrightarrow \frac{(x+5)!}{24(x+1)!}-\frac{143}{96}\cdot\frac{(x+5)!}{(x+3)!}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{24}-\frac{143}{96}\cdot\frac{1}{(x+2)(x+3)}<0 \Leftrightarrow 4(x+2)(x+3)-143<0 \Leftrightarrow 4x^2+20x-119<0,$$

de unde $-\frac{17}{2}<x<\frac{7}{2}$.

Ținând cont de DVA, obținem $x \in \{0,1,2,3\}$.

Răspuns: $S=\{0,1,2,3\}$.

Ex.6. Să se rezolve inecuația

$$C_x^6<C_x^4.$$

Rezolvare: $DVA: x \geq 6, x \in N$.

$$C_x^6<C_x^4 \Leftrightarrow \frac{x!}{6!\,(x-6)!}<\frac{x!}{4!\,(x-4)!} \Leftrightarrow \frac{1}{30}<\frac{1}{(x-4)(x-5)} \Leftrightarrow x^2-9x+20<30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-9x-10<0,$$

de unde $-1<x<10$.

Ținând cont de DVA, obținem $6 \leq x<10$.

Răspuns: $S=\{6,7,8,9\}$.

Ex.7. Să se rezolve inecuația

$$xC_{x-1}^{x-2}-7C_{x-2}^{x-3} \leq 8(x-2).$$

$DVA: x \geq 3, x \in N$.

$$xC_{x-1}^{x-2}-7C_{x-2}^{x-3} \leq 8(x-2) \Leftrightarrow xC_{x-2}^{1}-7C_{x-2}^{1} \leq 8(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)-7(x-2) \leq 8(x-2) \Leftrightarrow x^2-16x+30 \leq 0,$$

de unde $8-\sqrt{34} \leq x \leq 8+\sqrt{34}$. Ținând cont de DVA, obținem

$$x \in \{3,4,5,\ldots,13\}.$$

Răspuns: $S=\{3,4,5,\ldots,13\}$.

Ex.8. Să se rezolve inecuația

$$C_{18}^{x-2}<C_{18}^{x}.$$

$DVA: 2 \leq x \leq 18, x \in N$.

$$C_{18}^{x-2}<C_{18}^{x} \Leftrightarrow \frac{18!}{(x-2)!\,(20-x)!}<\frac{18!}{x!\,(18-x)!} \Leftrightarrow (19-x)(20-x)>x(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-39x+19\cdot 20>x^2-x \Leftrightarrow 38x<19\cdot 20 \Leftrightarrow 2x<20 \Leftrightarrow x<10.$$

Răspuns: $S=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Aplicații ale formulei lui Newton

Ex.1. Să se determine termenul în dezvoltarea binomului $(x+\frac{1}{x^4})^{10}$ care nu îl conține pe x (adică termenul care îl conține pe x la puterea zero).

În conformitate cu formula termenului general al dezvoltării

$$T_{k+1} = C_{10}^k x^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right)^k = C_{10}^k x^{10-k} \cdot x^{-4k} = C_{10}^k \cdot x^{10-5k}.$$

Conform condiției $10 - 5k = 0$, de unde $k = 2$. Astfel, termenul cerut al dezvoltării este

$$T_3 = C_{10}^2 x^8 \cdot \frac{1}{x^8} = C_{10}^2 = 45.$$

<u>Ex.2.</u> În dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}})^n$, primii trei coeficienți sunt în progresie aritmetică. Să se calculeze toți termenii raționali ai dezvoltării.

Primii trei termeni ai dezvoltării au forma:

$$(\sqrt{x})^n;\ \ n(\sqrt{x})^{n-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt[4]{x}};\ \ \frac{n(n-1)}{2} \cdot (\sqrt{x})^{n-2} \cdot \frac{1}{2^2(\sqrt[4]{x})^2}.$$

Coeficienții lor $1, \frac{n}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{8}$ sunt în progresie aritmetică, deci $1 + \frac{n(n-1)}{8} = 2 \cdot \frac{n}{2}$, de unde $n^2 - 9n + 8 = 0$. Ultima ecuație are soluțiile $n_1 = 1$ și $n_2 = 8$.

Pentru $n = 1$, dezvoltarea nu conține termeni raționali.

Pentru $n = 8$, $T_{k+1} = C_8^k (\sqrt{x})^{8-k} \cdot \frac{1}{2^k(\sqrt[4]{x})^k} = C_8^k \cdot \frac{1}{2^k} \cdot x^{\frac{8-k}{2} - \frac{k}{4}}$, $k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Pentru ca un termen să fie rațional este necesar și suficient ca $\frac{8-k}{2} - \frac{k}{4} = \frac{16-3k}{4}$ să fie un număr întreg, ceea ce este posibil pentru k divizibil cu 4, adică pentru $k \in \{0,4,8\}$.

Astfel, termenii raționali sunt $T_1 = x^4$, $T_5 = \frac{35}{8}x, T_9 = \frac{1}{256}x^{-2}$.

<u>Ex.3.</u> Să se determine termenul care îl conține pe a^3 din dezvoltarea la putere a binomului $(a\sqrt[5]{\frac{a}{3}} - \frac{b}{\sqrt[7]{a^3}})^n$, dacă suma coeficienților binomiali ai termenilor de rang impar este 2048.

Cum suma coeficienților binomului de rang impar este 2^{n-1}, obținem

$$2^{n-1} = 2048 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{11} \Leftrightarrow n - 1 = 11 \Leftrightarrow n = 12.$$

Aplicând formula termenului general al dezvoltării la putere a binomului, obținem:

$$T_{k+1} = C_{12}^k \cdot \left(a\sqrt[5]{\frac{a}{3}}\right)^{12-k} \cdot \left(-\frac{b}{\sqrt[7]{a^3}}\right)^k = C_{12}^k \cdot \frac{a^{\frac{5(12-k)}{5}}}{3^{\frac{12-k}{5}}} \cdot \frac{(-b)^k}{a^{\frac{3k}{7}}} =$$

$$= C_{12}^k \cdot \frac{(-b)^k}{3^{\frac{12-k}{5}}} \cdot \frac{a^{\frac{77-6k}{5}}}{a^{\frac{3k}{7}}} = C_{12}^k \cdot \frac{(-b)^k}{3^{\frac{12-k}{5}}} \cdot a^{\frac{504-57k}{35}}.$$

Conform condiției, $a^3 = a^{\frac{504-57k}{55}}$, deci

$$\frac{504 - 57k}{35} = 3 \Leftrightarrow 504 - 57k = 105 \Leftrightarrow 57k = 399 \Leftrightarrow k = 7.$$

Astfel, $T_8 = C_{12}^7 \cdot \frac{(-b)^k}{3} \cdot a^3 = -C_{12}^5 \cdot \frac{1}{3}a^3b^7 = -264\, a^3b^7$.

<u>Ex.4.</u> Pentru care valori ale lui x suma termenilor al treilea și al cincilea din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^m$ este egală cu 135, dacă suma coeficienților binominali ai ultimilor 3 termeni este egal cu 22?

Inițial calculăm exponentul puterii m. Conform condiției , $C_m^m + C_m^{n-1} + C_m^{n-2} = 22$, de unde $1 + C_m^1 + C_m^2 = 22 \Leftrightarrow m + \frac{m(m-1)}{2} = 21 \Leftrightarrow m^2 + m - 42 = 0$, care are soluție $m_1 = -7, m_2 = 6$. Deci, m = 6.

Termenul $T_3 = C_6^2 \left(2^{\frac{7}{2}}\right)^4 \cdot \left(2^{\frac{1-x}{2}}\right)^2 = C_6^2 \cdot 2^{x+1}$, iar $T_5 = C_6^4 \left(2^{\frac{7}{2}}\right)^2 \cdot \left(2^{\frac{1-x}{2}}\right)^4 = C_6^2 \cdot 2^{2-x}$.

Astfel,

$$C_6^2 \cdot 2^{x+1} + C_6^2 \cdot 2^{2-x} = 135 \Leftrightarrow 15(2^{x+1} + 2^{2-x}) = 135 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^x + \frac{4}{2^x} = 9 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0,$$

de unde $2^x = \frac{1}{2}$, $2^x = 4$. Deci $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Prin urmare, $x \in \{-1; 2\}$.

Ex.5. Să se determine termenul care nu îl conține pe x din dezvoltarea la putere a binomului $(x\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}})^n$, dacă suma dintre coeficientul binomial al termenului al doilea de la începutul dezvoltării și al termenului al treilea de la sfârșitul dezvoltării este 78.

Conform condiției,

$$C_n^1 + C_n^{n-2} = 78 \Leftrightarrow n + C_n^2 = 78 \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} = 78 \Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0\,,$$

de unde $n_1 = -13$, $n_2 = 12$. Astfel, exponentul puterii binomului este 12. Prin urmare,

$$T_{k+1} = C_{12}^k \cdot \left(x\sqrt[4]{x}\right)^{12-k} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}\right)^k \Leftrightarrow C_{12}^k \cdot x^{\frac{5(12-k)}{4}} \cdot (-1)^k x^{-\frac{5k}{8}} = C_{12}^k \cdot (-1)^k x^{\frac{120-15k}{8}}\,.$$

Egalând exponentul lui x cu zero, obținem ecuația $120 - 15k = 0 \Leftrightarrow k = 8$.

Deci , termenul de rang 9 , $T_9 = C_{12}^8 = C_{12}^7$, nu îl conține pe x.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. LUPU, I.; POȘTARU, A. *Metodologia studierii combinatoricii și a binomului lui Newton.* Chișinău: Ed. Prut International, 2007.
2. GOIAN, I. ș. a. *Algebra în exerciții și probleme pentru liceu*. Chișinău: Ed. Cartier, 2000.
3. IAVORSCHI, V. *Algebră. Culegere de exerciții și probleme pentru clasele X – XII.* Chișinău: Prut Internațional, 2002.
4. ВИЛЕНКИН, Н.Я. *Комбинаторика*. Москва: Наука, 1969.
5. ЦЫПКИН, А.Г.; ПИНСКИЙ, А.И. *Справочник по методам решения задач по математике*. Москва: Наука, 1989.