Acta et Commentationes, Sciences of Education, nr. 1(27), 2022 ISSN 1857-0623
p. 63-71 E-ISSN 2587-3636

CZU: 519.1:001.2 DOI: 10.36120/2587-3636.v27i1.63-71

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ ÎN CONTEXTE INTRADISCIPLINARE

Marcel TELEUCA, dr., conf. univ.
https://orcid.org/0000-0003-1730-5284
Larisa SALI, dr., conf. univ.
https://orcid.org/0000-0003-1172-3055
Universitatea de Stat din Tiraspol, Republica Moldova

Rezumat. În articol sunt examinate unele aspecte ale realizării conexiunilor între elementele de combinatorică și geometrie, combinatorică și teoria numerelor. Sunt ilustrate unele modele de organizare a activității investigaționale la rezolvarea de probleme. În particular, sunt expuse soluții comentate pentru câteva probleme propuse la concursuri internaționale în care este evidențiată intradisciplinaritatea.

Cuvinte cheie: combinatorică, combinatorică geometrică, permutări, aranjamente, combinări, intradisciplinaritate.

ELEMENTS OF COMBINATORICS IN INTRADISCIPLINARY CONTEXTS

Summary. The article examines some aspects of making connections between elements of combinatorics and geometry, combinatorics and number theory. Some models of organizing the investigative activity to solve problems are illustrated. In particular, commented solutions are presented for some problems proposed in international competitions in which intradisciplinarity is highlighted.

Keywords: combinatorics, geometric combinatorics, permutations, arrangements, combinations, intradisciplinarity.

Mileniului trei îi este caracteristic fenomenul de politică științifică care se manifestă prin transpunerea unor valori sociale și obiective de politici în problematica științifică. În abordarea STEAM a educației formarea competenței de cercetare devine o prioritate educațională, ceea ce explică preocuparea cercetătorilor pentru acest subiect.

Este indicat ca elevii să parcurgă sub îndrumarea profesorului un traseu de cunoaștere, având multiple puncte comune cu cel care are loc în mintea savantului. Elevii ar trebui să formuleze probleme și tot ei să caute soluții. Un compartiment al matematicii, elocvent în acest sens, este *Combinatorica*, care penetrează atât algebra și analiza matematică cât și geometria, exploatând în procesul de predare-învățare legătura între intuiție, inducție, raționamentul euristic și aplicațiile matematicii, pe de o parte, și rigoarea matematică, în sensul ei de azi, pe de altă parte [1, 6].

Rolul profesorului modern se asociază cu pretenția de a construi procesul de învățare din perspectivele tehnologiei de cercetare, accesibilă celor care trăiesc o practică investigațională zilnică. O diagramă de sinteză a acțiunilor ce urmează a fi efectuate în cadrul unei cercetări științifice în domeniul matematicii este prezentată în [2]. Prin similitudine cu activitatea de învățare a teoriilor matematice, se examinează desfășurarea procesului de cercetare din două aspecte: analiza cantitativă și analiza calitativă. Procesul de cercetare se extinde de la identificarea noțiunilor, termenilor, proprietăților elementare ale unei teorii spre generalizare și integrare de domenii.

Vom explicita aceste deziderate examinând câteva probleme de concurs care necesită aplicarea unor elemente de geometrie combinatorială, demonstrând concomitent unele relații intradisciplinare în cursul de matematică. Denumirea de geometrie combinatorială a fost folosită pentru prima dată de matematicianul elvețian Hugo Hadwiger. Geometria combinatorială se referă la acele compartimente ale geometriei care se ocupă de aranjamente, combinări și enumerări de obiecte geometrice. Domeniul este nou și nu a căpătat o poziție bine definită în lumea matematică. Geometria combinatorială se preocupă de relațiile dintre elementele sistemelor finite de figuri geometrice, multe dintre acestea cu accent special pe aplicarea lor la teoria mulțimilor convexe: probleme de acoperire; probleme de împachetare; probleme cu privire la simetrie, tangență, extreme (maxime și minime), continuitate; demonstrarea unor egalități și inegalități. Câteva dintre problemele fundamentale ale geometriei combinatoriale au fost examinate de Newton și Euler. Cu toate acestea, majoritatea progreselor semnificative în domeniu au fost făcute începând cu anii 1940. Principalele noțiuni, termeni, formule, proprietăți elementare la compartimentul *Combinatorica* sunt sistematizate în [3].

Unele afirmații geometrice simple despre figurile plane au implicații profunde în teoria numerelor și combinatorică. Foaia de hârtie în carouri pe care preferăm să desenăm reprezintă un important exemplu de rețea laticială în plan. Rețeaua plană este un instrument puternic care permite traducerea problemelor analitice în limbaj geometric și invers. O teoremă importantă în teoria mulțimilor convexe este următoarea teoremă.

Teorema lui Helly: *Fie $X_1,\ X_2 \ldots, X_n$ o familie finită de submulțimi convexe din R^d, unde $n > d + 1$. Dacă intersecția oricăror $d + 1$ dintre aceste submulțimi este nevidă, atunci intersecția tuturor acestor submulțimi este nevidă: $\bigcap_{j=1}^{n} X_j \neq \emptyset$.*

În problemele de concurs este utilizată teorema lui Helly pentru $d = 2$ și $n \geq 3$:

Fie $X_1,\ X_2 \ldots, X_n$ o familie finită de submulțimi convexe din R^2, unde $n > 3$. Dacă intersecția oricăror 3 dintre aceste submulțimi este nevidă, atunci intersecția tuturor acestor submulțimi este nevidă: $\bigcap_{j=1}^{n} X_j \neq \emptyset$.

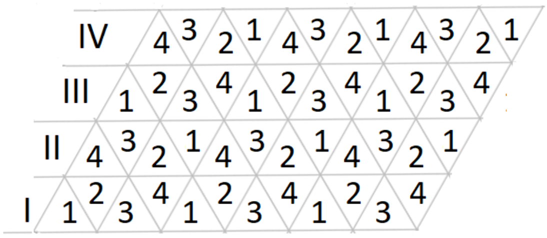
Alte exemple tipice de raționament utilizate frecvent la rezolvarea problemelor de geometrie combinatorială sunt: epuizarea posibilităților; utilizarea proprietăților extremale, metoda colorării ș.a.

Vom examina câteva probleme de combinatorică care permit rezolvare geometrică.

Problema 1. Se consideră rețeaua plană de triunghiuri echilaterale de latură 1. Un „pion” aflat într-un triunghi se poate „muta” în alt triunghi cu care are un vârf comun și laturile opuse vârfului paralele. Numim drum o succesiune finită de mutări. Să se arate că:

a) Nu există nici un drum între două triunghiuri care au o latură comună.
b) Din oricare 5 triunghiuri putem alege două între care există un drum [4, p. 123].

Soluție. Împărțim rețeaua în benzi orizontale de lățime $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și numerotăm triunghiurile ca în figura alăturată.



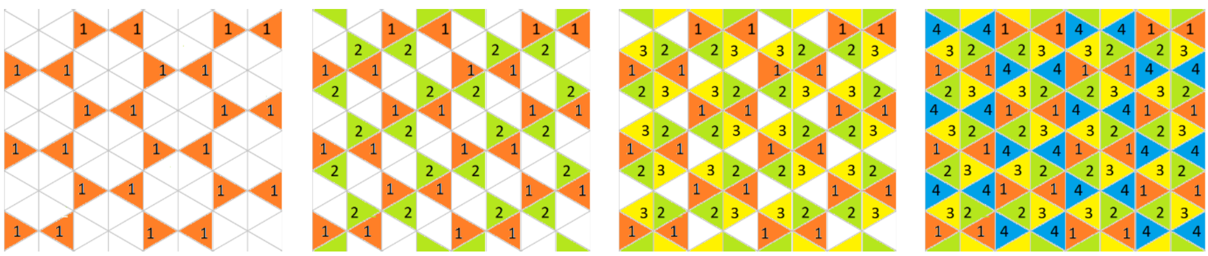
Pe prima bandă punem 1, 2, 3, 4 care se repetă periodic. Pe a doua bandă punem 4, 3, 2, 1 pe care le repetăm periodic. Pe banda a treia repetăm banda 1, iar pe banda 4 repetăm banda 2 și așa mai departe (benzile de pe poziții impare ca prima, benzile de pe poziții pare ca a doua).

a) Observăm că orice mutare (din prima poziție) nu schimbă numărul aflat în triunghi. Cum orice două triunghiuri care au o latură comună au înscrise numere diferite rezultă că nu putem ajunge din unul în celălalt.

b) Din 5 triunghiuri cel puțin două sunt numerotate la fel. Orice două triunghiuri numerotate ambele cu 2 sau ambele cu 4, aflate pe primele două benzi, pot fi unite cu un drum conținut în aceste benzi și în același timp din orice poziție cu 2 sau 4 putem ieși în banda a treia. Același lucru se întâmplă cu triunghiurile numerotate cu 1 sau 3, situate pe benzile II sau III. Astfel putem aduce pionii din orice bandă în benzile I, II sau III și apoi îi putem uni între ei printr-un drum.

Această problema admite și o rezolvare prin colorare.

Începem prin colorarea unui triunghi. Vom considera „mutare” a pionului în alt triunghi conform cerințelor ipotezei, colorarea următorului triunghi în aceiași culoare. Efectuând mai multe asemenea operații obținem un tablou în care rămân necolorate hexagoane regulate, care au latura egală cu latura triunghiului rețelei. Colorând un triunghi din interiorul unui hexagon cu altă culoare, prin operații similare celor de la pasul precedent, în hexagon mai rămân 4 triunghiuri necolorate. La următorul pas, alegem un triunghi necolorat din hexagonul nominalizat și îl colorăm în a treia culoare, apoi efectuăm operația de colorare conform descrierii de mai sus. În final, observăm că a patra culoare va completa golurile rămase. În figurile de mai jos se observă că au fost suficiente 4 culori să acoperim rețeaua de triunghiuri.

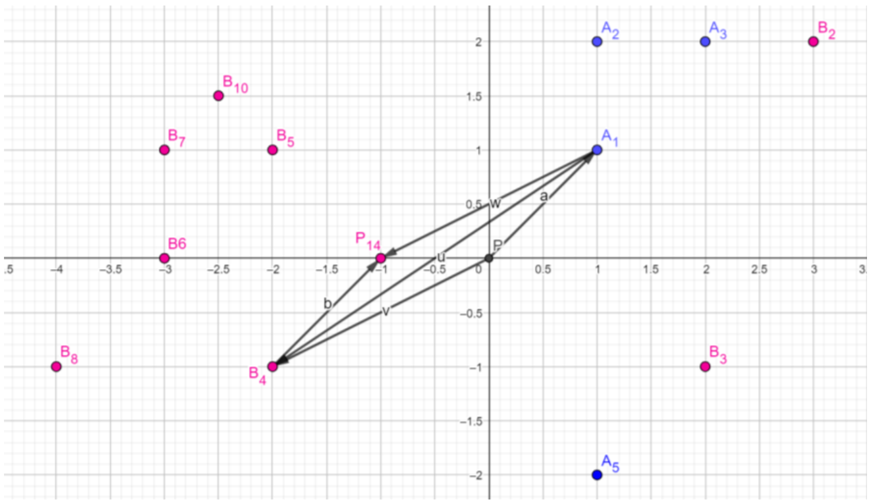


De aici devine clar de ce în soluția problemei sunt considerate numerele 1, 2, 3, 4. Legenda va fi: 1 – roșu, 2 – verde, 3 - galben, 4 – albastru.

Problema 2. Fiecare pătrat al unei rețele laticiale pătrate este colorat în roșu sau albastru. Se consideră două figuri, A și B în plan, A formată din 5 pătrate și B formată din 10 pătrate. Se știe că oriunde am transla figura A, numărul pătratelor roșii acoperite este cel puțin 3. Să se arate că putem transla figura B într-o poziție în care ea acoperă cel puțin 6 pătrate roșii.

Rezolvare. Pentru vizualizarea modalității de translare putem utiliza un sistem de coordonate, în care (pentru comoditate) fiecare pătrat va fi asociat unui punct cu coordonate întregi. Vectorul de poziție al pătratului M_i este vectorul cu originea în originea de coordonate și extremitatea în punctul M_i.

În figura de mai jos este reprezentată translarea punctului A_1 cu vectorul de poziție al punctului B_4 în punctul P_{14}, care se obține și prin translarea punctului B_4 cu vectorul de poziție al punctului A_1.



Asociind unui pătrat roșu numărul „1”, iar unui pătrat albastru „−1”, obținem o funcție pe mulțimea tuturor pătratelor. Fie A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pătratele figurii A și $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{10}$ pătratele figurii B. Dacă translatăm pătratul A_i cu vectorul de poziție al pătratului B_j se obține pătratul P_{ij}, același cu cel obținut prin translația pătratului B_j cu vectorul de poziție al pătratului A_i. Pentru o translație a figurii A după orice pătrat B_j obținem figura $P_{1j}P_{2j}P_{3j}P_{4j}P_{5j}$ și notăm cu c_{ij} numărul scris (asociat) în pătratul P_{ij}.

Conform ipotezei avem:

$c_{1j} + c_{2j} + c_{3j} + c_{4j} + c_{5j} \geq 3 - 2 = 1 > 0$, pentru $j \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.

Adunând aceste inegalități, obținem:

$$\sum_{j=1}^{10}\left(\sum_{i=1}^{5} c_{ij}\right) > 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{10} c_{ij}\right) > 0.$$

Deci, există $i_o \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, astfel încât $\sum_{j=1}^{10} c_{i_o j} > 0$. Această sumă reprezintă suma numerelor asociate pătratelor $P_{i_o 1}, P_{i_o 2}, P_{i_o 3}, \dots, P_{i_o 10}$, obținute prin translația figurii B după vectorul de poziție al pătratului A_{i_o}.

În această figură avem mai multe pătrate cu 1 decât cu -1, deci, cel puțin 6 pătrate au numărul 1, adică cel puțin 6 pătrate colorate în roșu.

Problema 3. Fie $\boldsymbol{S = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}}$ mulțimea de submulțimi ale mulțimii $\boldsymbol{A}$ formată din $\boldsymbol{n}$ elemente. Dacă pentru oricare 2 elemente $\boldsymbol{x, y \in A}$ există un subset $\boldsymbol{A_i} \in \boldsymbol{S}$ ce îl conține doar pe unul dintre $\boldsymbol{x, y}$, demonstrați că $\boldsymbol{2^k \geq n}$.

(*Olimpiada Balcanică, 1997*)

Metoda 1: Definim $\boldsymbol{S_x}$ mulțimea submulțimilor $\boldsymbol{A_j}$, $\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{\{1,\dots,k\}}$, care îl conțin pe $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$. Cu alte cuvinte, dacă $\boldsymbol{A_j}$ îl conține pe $\boldsymbol{x}$ atunci $\boldsymbol{A_j} \in \boldsymbol{S_x}$. Pentru fiecare element $\boldsymbol{x}$ există o singură mulțime $\boldsymbol{S_x}$. Numărul de elemente este egal, prin urmare, cu numărul de astfel de mulțimi. Ipoteza problemei implică faptul că pentru oricare două elemente distincte $\boldsymbol{a, b \in A}$, $\boldsymbol{S_a \neq S_b}$. Numărul mulțimilor $\boldsymbol{S_i}$, $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{\{1,\dots,k\}}$, e mai mic sau egal ca numărul total de combinări dintre toate $\boldsymbol{A_j}$, adică $\boldsymbol{2^k}$. Prin urmare, $\boldsymbol{2^k \geq n}$**.**

Metoda a 2-a: Vom asocia fiecărui element a_i din mulțimea A un vector de dimensiunea *k* de tipul $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), i = \overline{1, n}$, unde $\alpha_j \in \{0,1\}$ și $\alpha_j = 1$, dacă $a_i \in A_j$ și $\alpha_j = 0$, dacă $a_i \notin A_j$. Observăm că oricăror două elemente din mulțimea *A* le corespund vectori diferiți. Conform regulii produsului obținem numărul de variante posibile:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{de\ k-ori} = 2^k.$$

Această situație poate fi ilustrată în felul următor:

α_1	α_2	α_3	α_4	...
0	0	0	0	
			1	
		1	0	
			1	
	1	0	0	
			1	
		1	0	
			1	
1	0	0	0	
			1	
		1	0	
			1	
	1	0	0	
			1	
		1	0	
			1	

Deoarece numărul maximal posibil de vectori va fi 2^k, dar noi avem $\boldsymbol{n}$ vectori, rezultă că $2^k \geq n$.

Problema 4. La olimpiada de matematică elevii au avut de rezolvat 6 probleme. S-a constatat că oricare două probleme au fost rezolvate de cel puțin $\frac{2}{5}$ din numărul de participanți, dar nimeni nu a rezolvat toate cele 6 probleme. Demonstrați că cel puțin 2 participanți, au rezolvat exact câte 5 probleme.

(*OIM, 2006*)

Rezolvare. Vom ilustra cum aplicăm metoda numărării în două moduri la rezolvarea acestei probleme.

Etichetăm toți participanții la olimpiadă cu numere naturale de la ***1*** la ***n*** și prezentăm rezultatele la olimpiadă într-un tabel cu ***n***-linii și ***6*** coloane, în care la intersecția liniei ***i*** cu coloana ***j*** punem semnul plus, dacă elevul cu numărul ***i*** a rezolvat problema ***j***.

	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
Elevul 1		+	+	+	+	+
Elevul 2			+	+	+	+
Elevul 3	+		+			
...						
Elevul ***i-1***	+	+				
Elevul ***i***			+	+	+	
Elevul ***i+1***		+	+	+		+
...						
Elevul ***n***	+	+	+	+		

Din enunț deducem că nu există linii în care sunt ***6*** semne plus.

Pentru fiecare pereche ***(j;k)*** de coloane, unde $1 \leq j < k \leq 6$, definim parametrul $b_{j,k}$, care este egal cu numărul de linii în care la intersecția cu coloanele ***j*** și ***k*** sunt plusuri. Vom avea în total $C_6^2 = 15$ astfel de parametri: $b_{1,2}, b_{1,3}, b_{1,4}, b_{1,5}, b_{1,6}, b_{2,3}, b_{2,4}, b_{2,5}, b_{2,6}, b_{3,4}, b_{3,5}, b_{3,6}, b_{4,5}, b_{4,6}, b_{5,6}$.

Din ipoteză știm că fiecare parametru $b_{j,k} > \frac{2}{5}n$, prin urmare $b_{j,k} > \frac{2}{5}n + 1 - \left\{\frac{2}{5}n\right\} + a_{j,k}$ ($a_{j,k}$ este un număr natural care va fi identificat mai târziu, iar $\left\{\frac{2}{5}n\right\}$ – reprezintă partea fracționară a numărului $\frac{2}{5}n$).

Presupunem că nu se respectă condiția problemei, adică este o linie cu 5 semne plus sau nu este nici una.

Vom cerceta cazul când doar un participant a rezolvat 5 probleme, adică în tabel într-o singură linie sunt 5 semne de „+”. Pentru comoditate vom considera că primul participant a rezolvat 5 probleme. Prin urmare, $n-1$ participanți au rezolvat mai puțin de 5 probleme.

Cazul când cei $n-1$ participanți au rezolvat câte 4 probleme fiecare, nu influențează soluția problemei, dar simplifică raționamentele. Vom adăuga, dacă este posibil, semne de plus în fiecare linie, astfel încât în una dintre linii să fie cinci plusuri, iar în celelalte $n-1$ linii – câte 4 plusuri. În acest caz condiția problemei se respectă. De asemenea condiția problemei se respectă, dacă (pentru comoditate) vom considera că primul elev nu a rezolvat prima problemă.

Vom considera pentru fiecare linie i mulțimea P_i care reprezintă mulțimea tuturor perechilor de probleme rezolvate pe care le putem forma. De exemplu, în versiunea din tabelul nostru avem:

$P_1 = \{(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$;

$P_2 = \{(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$; ș.a.m.d.

Calculăm numărul de *perechi* de semne de plus din fiecare linie: $|P_1| = C_5^2 = 10$, iar în celelalte $n-1$ – linii vor fi câte $C_4^2 = 6$ perechi de semne de „+" posibile. În total vor fi $P = |P_1| + |P_2| + \dots + |P_n| = 6(n-1) + 10$.

Prin urmare sunt $P = 6n + 4$ perechi de semne de „+" posibile în tot tabelul.

Dacă sumăm după parametrii $b_{j,k}$, obținem $P = b_{1,2} + b_{1,3} + \dots + b_{5,6} = 15\left(\frac{2}{5}n + 1 - \left\{\frac{2}{5}n\right\}\right) + a_{1,2} + a_{1,3} + \dots + a_{5,6} = 6n + 15 - 15\left\{\frac{2}{5}n\right\} + a_{1,2} + a_{1,3} + \dots + a_{5,6}$.

Partea fracționară $\left\{\frac{2}{5}n\right\}$ poate primi valorile $0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$.

Dacă $\left\{\frac{2}{5}n\right\} = 0$, atunci $P = 6n + 15 - 0 + \sum_{1\le j<k\le 6} a_{j,k} \neq 6n + 4$.

Dacă $\left\{\frac{2}{5}n\right\} = \frac{1}{5}$, atunci $P = 6n + 15 - 15 \cdot \frac{1}{5} + \sum_{1\le j<k\le 6} a_{j,k} \neq 6n + 4$

Dacă $\left\{\frac{2}{5}n\right\} = \frac{2}{5}$, atunci $P = 6n + 15 - 15 \cdot \frac{2}{5} + \sum_{1\le j<k\le 6} a_{j,k} \neq 6n + 4$

Dacă $\left\{\frac{2}{5}n\right\} = \frac{3}{5}$, atunci $P = 6n + 15 - 15 \cdot \frac{3}{5} + \sum_{1\le j<k\le 6} a_{j,k} \neq 6n + 4$.

În toate aceste cazuri se obțin contradicții.

Dacă $\left\{\frac{2}{5}n\right\} = \frac{4}{5}$, atunci

$P = 6n + 15 - 15 \cdot \frac{4}{5} + \sum_{1\le j<k\le 6} a_{j,k} = 6n + 3 + \sum_{1\le j<k\le 6} a_{j,k}$.

În acest caz este posibil ca $P = 6n + 4$.

Obținem $\sum_{1\le j<k\le 6} a_{j,k} = 1$.

Deci, exact unul din cele 15 numere $a_{1,2}, a_{1,3}, \dots, a_{5,6}$ este egal cu 1, iar celelalte sunt egale cu 0. Presupunem că $a_{1,2} = 1$, atunci $b_{1,2} = \frac{2}{5}n + 1 - \frac{4}{5} + 1 = 2l + 2$, iar $b_{1,3} = b_{1,4} = \dots = b_{5,6} = 2l + 1$.

Vom folosi metoda numărării în două moduri.

Considerăm o linie i, adică un participant.

Fie $t_{i,1}$ – numărul total de perechi de plusuri formate cu plusul de pe prima poziție (în cazul când pe prima poziție este semnul „+", adică participantul etichetat cu numărul i a rezolvat prima problemă) în linia i.

Fie $t_{i,2}$ – numărul total de perechi de plusuri formate cu plusul de pe poziția a doua (în cazul când pe poziția a doua este semnul „+") în linia i.

Fie $t_{i,3}$ – numărul total de perechi de plusuri formate cu plusul de pe poziția a treia (în cazul când pe poziția a treia este semnul „+") în linia i.

Fie $t_{i,4}$ – numărul total de perechi de plusuri formate cu plusul de pe poziția a patra (în cazul când pe poziția a patra este semnul „+") în linia i.

Fie $t_{i,5}$ – numărul total de perechi de plusuri formate cu plusul de pe poziția a cincea (în cazul când pe poziția a cincea este semnul „+") în linia i.

Fie $t_{i,6}$ – numărul total de perechi de plusuri formate cu plusul de pe poziția a șasea (în cazul când pe poziția a șasea este semnul „+") în linia i.

Introducem notațiile $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$, unde $t_m = t_{1,m} + t_{2,m} + t_{3,m} + \cdots t_{n,m}$ numărul de perechi de semne plus, care se află într-o linie, în care unul dintre semnele plus se află în coloana m.

$t_1 = t_{1,1} + t_{2,1} + t_{3,1} + \cdots t_{n,1} = b_{1,2} + b_{1,3} + b_{1,4} + b_{1,5} + b_{1,6} = 2l + 2 + 4(2l + 1) = 10l + 6$;

$t_2 = t_{1,2} + t_{2,2} + t_{3,2} + \cdots t_{n,2} = b_{1,2} + b_{2,3} + b_{2,4} + b_{2,5} + b_{2,6} = 2l + 2 + 4(2l + 1) = 10l + 6$;

$t_3 = t_{1,3} + t_{2,3} + t_{3,3} + \cdots t_{n,3} = b_{1,3} + b_{2,3} + b_{3,4} + b_{3,5} + b_{3,6} = 10l + 5$;

$t_4 = t_{1,4} + t_{2,4} + t_{3,4} + \cdots t_{n,4} = b_{1,4} + b_{2,4} + b_{3,4} + b_{4,5} + b_{4,6} = 10l + 5$;

$t_5 = t_{1,5} + t_{2,5} + t_{3,5} + \cdots t_{n,5} = b_{1,5} + b_{2,5} + b_{3,5} + b_{4,5} + b_{5,6} = 10l + 5$;

$t_6 = t_{1,6} + t_{2,6} + t_{3,6} + \cdots t_{n,6} = b_{1,6} + b_{2,6} + b_{3,6} + b_{4,6} + b_{5,6} = 10l + 5$.

Observație: $t_1 = t_2$ și ei sunt diferiți de $t_3 = t_4 = t_5 = t_6$.

Dacă primul participant nu a rezolvat prima problemă, rezultă că:

$t_1 = t_{1,1} + t_{2,1} + t_{3,1} + \cdots t_{n,1}$; $t_{1,1} = 0$; fiecare $t_{i,1} = 0$ (dacă elevul i nu a rezolvat prima problemă) sau $t_{i,1} = 3$ (dacă elevul i a rezolvat prima problemă) pentru $2 \leq i \leq n$. Rezultă că t_1 se divide la 3.

Pentru $t_m = t_{1,m} + t_{2,m} + t_{3,m} + \cdots t_{n,m}$ ($2 \leq m \leq 6$), avem $t_{1,m} = 4$, iar pentru $2 \leq i \leq n$ avem $t_{i,m} = 0$ sau $t_{i,m} = 3$. Atunci t_m dă la împărțirea la 3 restul 1.

Observația de mai sus indică că $t_1 = t_2$, dar la cea de a doua numărare conduce la faptul că t_1 se divide la 3, iar ceilalți t_m dau la împărțirea la 3 restul 1. Contradicție.

Prin urmare, presupunerea că doar un singur participant a rezolvat 5 probleme este greșită.

Concluzii

Misiunea profesorului de matematică include asigurarea condițiilor motivaționale de implementare și dezvoltare a curriculumului școlar. Multiple contexte din Științe, Tehnologii, Inginerie, Arte se dovedesc utile la demonstrarea relevanței studierii matematicii, problema constă în a le adopta și adapta la situații de învățare concrete.

Elevii dotați la matematică sunt interesați de studiul aprofundat al disciplinelor școlare în contexte pluridisciplinare dar și intradisciplinare. Pentru lucrul cu elevii dotați și supradotați la matematică o componentă importantă a educației o constituie activitatea de cercetare interdisciplinară în cadrul unor proiecte, orientată spre extinderea spectrului de probleme de cercetare cu subiecte noi.

Rolul antrenării elevilor în procesul de rezolvare a problemelor de combinatorică nu poate fi supraapreciat.

Dovadă sunt cuvintele lui Grigore Moisil „Metodele întrebuințate în combinatorică diferă de la problemă la problemă. E nevoie de mari puteri informatice și de mai multă deșteptăciune. Rezolvarea problemelor de combinatorică este o plăcere, o ocazie de bucurii mereu reînnoite” [5].

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)”, inclus în „Program de stat” (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. TELEUCĂ, M.; LUPU, I.; SALI, L. Transpunerea didactică a conținuturilor pentru dezvoltarea gândirii matematice. În: *Revista Acta et Commentationes. Științe ale Educației*. Nr. 1. 2012.
2. TELEUCĂ, M.; LUPU, I.; SALI, L. Didactical aspects of the organization of investigational activities in mathematics. În: *The 20th Conference on Applied and Industrial Mathematics dedicated to academician Mitorfan M. Ciobanu*. Chișinău, August, 22-25, 2012. Communications in Education. Chișinău, 2012, p. 93 – 107.
3. TELEUCĂ, M.; SALI, L. Valorificarea contextelor de combinatorică în abordarea STEAM. În: *Materialele Conferinței științifice internaționale ”Abordări inter/transdisciplinare în predarea științelor reale*, (Concept STEAM)” dedicată aniversării a 70 de ani de la nașterea profesorului universitar Anatol Gremalschi, 29 – 30 octombrie 2021. Volumul I: Abordări inter/transdisciplinare în studierea matematicii (concept STEAM) & Studierea informaticii și tehnologiilor informaționale din perspectiva STEAM, p.153-163.
4. POP, V.; TELEUCĂ, M. *Probleme de combinatorică elementară. Numărare, grafuri, jocuri*. Biblioteca Societății de Științe Matematice din România. Matrixrom, 2013. 185 p.
5. TOMESCU, I. *Introducere în combinatorică*. București: Ed. Tehnică, 1972.
6. TELEUCĂ, M.; SPINEI M. The methodology of using the lifting exponent lemma and Hansel’s lemma in contest problems. In: *Acta et commentationes (Științe ale Educației)*, 2019, nr. 4(18). pp. 86-90.