

FORMAREA COMPETENȚELOR SPECIFICE MATEMATICII PRIN PROBLEME DE TIP CASCADĂ

Ion ACHIRI, dr., conf. univ.

<https://orcid.org/0000-0002-8874-2329>

Institutul de Științe ale Educației

Rezumat. În articol este abordată problema formării competențelor specifice matematicii în gimnaziu și liceu prin rezolvarea problemelor de tip cascadă. Rezultatele sondajului privind aplicarea problemelor de tip cascadă la studierea matematicii sunt analizate în articol. Sunt prezentate avantajele și dezavantajele utilizării problemelor de tip cascadă în procesul educațional. Se trage concluzia că problemele de tip cascadă sunt eficiente atât în cadrul predării-învățării matematicii, cât și în cadrul evaluării rezultatelor școlare.

Cuvinte cheie: matematica, competențe specifice, probleme de tip cascadă, avantaje, dezavantaje, aspecte didactice, predare-învățare, evaluare.

TRAINING SPECIFIC COMPETENCIES IN MATHEMATICS THROUGH WATERFALL TYPE PROBLEMS

Abstract. The article addresses the issue of training specific mathematics competencies in middle school and high school by solving waterfall problems. The results of the survey on the application of cascade problems to the study of mathematics are analyzed in the article. The advantages and disadvantages of using cascade problems in the educational process are presented. It is concluded that cascade problems are effective both in the teaching-learning of mathematics and in the evaluation of school results.

Key words: mathematics, specific competencies, waterfall problems, advantages, disadvantages, didactic aspects, teaching-learning, assessment.

Formarea competențelor specifice disciplinei reprezintă rezultatul final al procesului educațional la matematică în gimnaziu și liceu. Procesul formării acestor competențe este de lungă durată și necesită aplicarea în practica educațională a diferitor tehnologii didactice, Scopul articolului constă în evidențierea aspectelor metodologice privind formarea competențelor specifice matematicii prin rezolvarea sistematică a problemelor de tip cascadă.

Curriculumul școlar la matematică, ediția 2019, evidențiază formarea următoarelor competențe specifice matematicii:

a) în gimnaziu și în liceu, profilul umanist:

- a) *Operarea cu numere reale pentru a efectua calcule în diverse contexte, manifestând interes pentru rigoare și precizie.*
- b) *Exprimarea în limbaj matematic a unui demers, a unei situații, a unei soluții, formulând clar și concis enunțul.*
- c) *Aplicarea raționamentului matematic la identificarea și rezolvarea problemelor, dovedind claritate, corectitudine și concizie.*
- d) *Investigarea seturilor de date, folosind instrumente, inclusiv digitale, și modele*

matematice, pentru a studia/explica relații și procese, manifestând perseverență și spirit analitic.

- e) *Explorarea noțiunilor, a relațiilor și a instrumentelor geometrice pentru rezolvarea problemelor, demonstrând consecvență și abordare deductivă.*
- f) *Extrapolarea achizițiilor matematice pentru a identifica și a explica procese, fenomene din diverse domenii, utilizând concepte și metode matematice în abordarea diverselor situații.*
- g) *Justificarea unui demers sau a unui rezultat matematic, recurgând la argumentări, susținând propriile idei și opinii [1,2].*

b) în liceu, profilul real:

1. *Operarea cu numere reale și complexe pentru a efectua calcule în diverse contexte, manifestând interes pentru rigoare și precizie.*
2. *Utilizarea conceptelor matematice, a metodelor, algoritmilor, proprietăților, teoremelor studiate în contexte variate de aplicare, recurgând la concepte și metode matematice în abordarea unor situații cotidiene și/sau pentru rezolvarea unor probleme din diverse domenii.*
3. *Aplicarea raționamentului matematic în identificarea și rezolvarea problemelor într-o varietate de contexte, dovedind claritate, corectitudine și concizie.*
4. *Analiza rezolvării unei probleme, a unei situații-problemă în contextul corectitudinii, al simplității, al clarității și al semnificației rezultatelor, dezvoltând spiritul obiectivității și al imparțialității.*
5. *Extrapolarea achizițiilor matematice dobândite pentru a identifica și a explica procese, fenomene din diverse domenii, utilizând concepte și metode matematice în abordarea diverselor situații.*
6. *Elaborarea strategiilor și proiectarea activităților pentru rezolvarea unor probleme teoretice și/sau practice, dezvoltând capacitatea de a aprecia rigoarea, ordinea și eleganța în arhitectura rezolvării unei probleme.*
7. *Justificarea unui demers/rezultat matematic, recurgând la argumentări, dovedind tenacitate și perseverență [2].*

Un rol specific în formarea acestor competențe îl are rezolvarea problemelor de tip cascadă. Prin ***problemă de tip cascadă se înțelege problema care conține o condiție și o listă ordonată de cerințe (subsarcini) care trebuie să fie realizate pentru a rezolva complet problema.***

După structură problema de tip cascadă poate fi structurată *linear* sau *ramificat*. Ca exemplu de problemă de tip cascadă lineară poate servi următoarea problemă:

Fie ecuația $-2x^2 + x + 3 = 0$.

- 1. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația.**
- 2. Reprezentați grafic funcția f de gradul doi, asociată ecuației date.**

3. Utilizând graficul de la p. 2, determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
4. Scrieți o inecuație de gradul I, mulțimea soluțiilor căreia este intervalul pe care funcția f este strict descrescătoare.

Este un exemplu de problemă de matematică de tip cascadă, structurată linear pe patru cascade, care poate fi propusă în clasa a IX-a sau în clasa a X-a .

Ca exemplu de problemă de tip cascadă ramificată poate servi următoarea problemă:

Fie ΔABC , $m(\angle A) = 30^\circ$, $m(\angle B) = 45^\circ$, $AB = 8\text{cm}$.

1. Aflați lungimile laturilor triunghiului.
2. Calculați perimetrul ΔABC .
3. Calculați aria ΔABC .
4. Aflați raza cercului înscris în ΔABC .
5. Calculați lungimea cercului înscris în ΔABC .
6. Determinați raza cercului circumscris ΔABC .
7. Calculați aria discului cu raza obținută în p. 6.
8. Aflați distanța dintre centrul cercului înscris în ΔABC și raza cercului circumscris acestui triunghi.

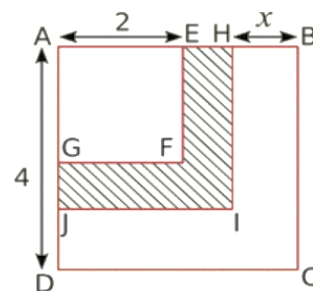
Menționăm că ramificarea se referă la cercurile înscris și circumscris ale triunghiului dat. Problema poate fi propusă spre rezolvare în clasa a X-a, în clasa a XII-a, în cadrul recapitulării finale, sau la examenul de BAC.

Pot fi compuse și propuse spre rezolvare diverse probleme interesante de tip cascadă. De exemplu:

- 1) În figura alăturată ACFG, AHIJ și ABCD sunt pătrate.

Utilizând datele din desen:

- a) exprimați lungimea laturii AH prin x ;
- b) calculați aria pătratului AHIJ;
- c) aflați aria figurii hașurate;
- d) determinați câte procente din aria pătratului ABCD, reprezintă aria figurii hașurate.



- 2) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2(x - 1)(x + 2)$.

- a) Determinați punctele de extrem ale funcției f .
- b) Scrieți o ecuație ale cărei soluții vor fi opusele valorilor lui x , obținute la p. 1.
- c) Aflați primitiva funcției g , asociate ecuației de la p. 2.
- d) Calculați integrala $\int_0^2 g(x) dx$.
- e) Aflați lungimea muchiei cubului a cărui arie a suprafeței totale este valoarea numerică (în unități pătrate), obținută la p.4.
- f) Calculați volumul tetraedrului regulat, a cărui muchie este congruentă cu muchia cubului de la p.5.

Observăm că problema de tip cascadă, care poate fi propusă pentru clasa a XII-a sau la examenul de BAC, integrează cunoștințe și abilități dobândite și formate în cadrul studierii modulelor *Funcții derivabile; Ecuații. Inecuații. Sisteme. Totalități; Primitive și integrale nedefinite; Integrale definite; Poliedre.*

Considerăm că astfel de probleme eficient contribuie la realizarea conexiunilor intra- și transdisciplinare, la formarea competențelor specifice, preconizate de curriculumul școlar la matematică, la majorarea calității învățământului matematic.

Problemele de tip cascadă pot fi propuse spre rezolvare și în cadrul examenelor la matematică. De exemplu, în Ucraina, la examenul de absolvire a școlii în anul 1989 a fost propusă următoarea problemă [3]:

Fie $ABCA_1B_1C_1$ - prisma triunghiulară regulată. Pe muchia laterală BB_1 , este luat punctul M , astfel încât $BM = B_1M$.

- a) *Construiți secțiunea obținută la intersecția prisme cu planul ce trece prin muchia bazei AC și punctul M .*
- b) *Demonstrați că secțiunea obținută este un triunghi isoscel.*
- c) *Calculați perimetrul secțiunii obținute și aria suprafeței totale a prisme, dacă $BB_1 = 8\text{cm}$, iar lungimea laturii bazei e de 3cm .*
- d) *Aflați raportul dintre volumele corpurilor geometrice obținute la divizarea prisme prin secționarea acesteia cu planul respectiv.*

În cadrul examenului la matematică în Germania, Bavaria, în anul 1995 a fost propusă următoarea problemă [4]:

Punctele $A(-1; -1)$ și $C(4; 4)$ aparțin parabolei p_1 , definită prin ecuația $y = -x^2 + 4x + 4$. Punctele $A(-1; -1)$ și $C(4; 4)$ aparțin și parabolei p_2 , definită prin ecuația $y = 0,5x^2 + bx + c$ ($b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}$).

1. *Aflați coordonatele vârfului S_1 a parabolei p_1 și trasați această parabolă în sistemul cartezian de coordonate. Pentru a trasa graficul luați segmentul unitar de 1cm și intervalele : $-3 \leq x \leq 6$; $-6 \leq y \leq 9$.*

2. *Aflați valorile parametrilor b și c din ecuația parabolei p_2 . Trasați această parabolă în sistemul cartezian de coordonate din p.1, utilizând tabelul de valori pentru $x \in [-2; 5]$ cu pasul $\Delta x = 1$ (**Răspunsul intermediar așteptat: $p_2: y = 0,5x^2 - 0,5x - 2$**).*

3. *Punctele $D_n(x; -x^2 + 4x + 4)$, care aparțin parabolei p_1 și sunt situate între punctele A și C , sunt vârfurile triunghiului ACD_n . Reprezentați triunghiul ACD_1 , pentru $x = 1$, în sistemul de coordonate din p.1.*

4. *Dreapta q este definită prin ecuația $y = 0,5x - 2,5$. Arătați că dreapta q este tangentă la parabola p_2 și determinați coordonatele punctului de tangență B (**Răspunsul intermediar așteptat: $B(1; -2)$**).*

5. Punctul B este vârful patrulaterelor $ABCD_n$, care au aria $S(x)$. Dintre aceste patrulatere patrulaterul $ABCD_0$ are cea mai mare arie S_{max} . Aflați $S(x)$ și S_{max} (**Răspunsul intermediar așteptat: $S(x) = -2,5x^2 + 7,5x + 17,5$**).

6. Patrulaterul $ABCD_2$ este un trapez, în care $BC \parallel AD_2$. Reprezentați acest trapez în sistemul de coordonate din p.1 și aflați coordonatele punctului D_2 .

Pentru a determina atitudinea profesorilor de matematică din Republica Moldova față de utilizarea problemelor de tip cascadă în predarea-învățarea-evaluarea matematicii în gimnaziu și liceu a fost aplicat prin intermediul Google Forms, pe un eșantion de 106 cadre didactice, următorul chestionar:

Chestionar Probleme de tip cascadă

Stimați colegi!

Vă rugăm să răspundeți la întrebările privind utilizarea problemelor de tip cascadă în procesul de învățare a matematicii. Sondajul este realizat pentru a determina fezabilitatea și eficacitatea utilizării unor astfel de sarcini la diferite etape ale procesului de învățare.

1. Definiție: **Problema de tip cascadă este problema care conține o condiție și o listă ordonată de cerințe (subsarcini) care trebuie să fie realizate pentru a rezolva complet problema.**

Sunteți familiarizați cu această definiție și acest tip de probleme?

- a) Da, cunosc bine definiția și acest tip de probleme.
- b) Cunosc bine acest tip de probleme, dar văd definiția pentru prima dată.
- c) Am auzit ceva despre acest tip de probleme, dar văd definiția pentru prima dată.
- d) Nu cunosc această definiție și nu am auzit niciodată despre acest tip de probleme.

2. *Ați folosit probleme de tip cascadă în practica dumneavoastră și cât de des ați făcut acest lucru?*

- a) Da, folosesc în mod constant problem de tip cascadă.
- b) Folosesc acest tip de probleme, dar rar.
- c) Am folosit acest tip de probleme cu mult timp în urmă, dar nu le mai folosesc acum.
- d) Nu am folosit niciodată astfel de probleme.

3. *Ați creat vreodată probleme de tip cascadă și cât de des?*

- a) Da, creez în mod constant astfel de sarcini și folosesc numai propriile probleme de tip cascadă.
- b) Da, adesea creez astfel de probleme și folosesc propriile probleme de tip cascadă, mai degrabă decât cele gata compuse.
- c) Da, din când în când creez astfel de probleme, dar folosesc probleme de tip cascadă 5deja gata compuse.
- d) Nu am creat niciodată propriile probleme de tip cascadă, le-am folosit doar pe cele gata compuse.

4. *La ce etape ale studierii temei sau lecției de matematică, după părerea Dumneavoastră, ar fi oportun să folosiți probleme de tip cascadă? (Puteți selecta mai multe răspunsuri)*

- a) La explicarea temei noi.
- b) Concomitent cu formarea capacității de a rezolva probleme tipice temei.
- c) În cadrul pregătirii pentru lucrările independente și de evaluare.
- d) Direct în cadrul lucrărilor independente și de evaluare formativă.
- e) La etapa de generalizare și sistematizare a cunoștințelor și aptitudinilor elevilor.
- f) La rezolvarea testelor sumative.
- h) În cadrul examenelor de absolvire.
- i) Altele (versiunea proprie) _____.

5. *Ați dori să vă dezvoltați competența de creare a problemelor de tip cascadă?*

- a) Da, aș fi bucuros să particip la un curs de formare în viitorul apropiat.
- b) Da, dar nu consider că este atât de important și urgent.
- c) Nu, acum nu există timp și/sau oportunitate pentru aceasta.
- d) Nu, consider că deloc nu am nevoie de aceasta.

6. *Ce avantaje ale utilizării problemelor de tip cascadă ați menționa? (Întrebare cu răspuns deschis)?*

7. *Ce dezavantaje ale utilizării problemelor de tip cascadă ați menționa? (Întrebare cu răspuns deschis)?*

Au fost evidențiate următoarele rezultate:

1.

a)	b)	c)	d)
67 prof./63,21%	30 prof./28,30%	9 prof./8,49%	0 prof./0,00%

2.

a)	b)	c)	d)
25 prof./23,58%	72 prof./67,92%	7 prof./6,60%	2 prof./1,89%

3.

a)	b)	c)	d)
6 prof./5,66%	21 prof./19,81%	64 prof./60,38%	15 prof./14,15%

4.

a)	b)	c)	d)	e)	f)	i)
13pr./4,51%	36pr./12,50%	55pr./19,10%	34pr./11,81%	79pr./27,43%	54pr./18,75%	17pr./5,90%

5.

a)	b)	c)	d)
71 prof./66,98%	27 prof./25,47%	7prof./6,60%	1 prof./0,94%

6. Cadrele didactice au evidențiat ca prioritare următoarele *avantaje ale utilizării problemelor de tip cascadă*:

- *Dezvoltă competența de rezolvare a problemelor de diverse tipuri;*

- *Dezvoltă logica elevilor;*
- *Permite atingerea mai multor obiective prin rezolvarea unui singur item;*
- *Problemele de tip cascadă sunt eficiente la realizarea conexiunilor intra- și interdisciplinare;*
- *Majorează motivația de a studia matematica, dezvoltă memoria și atenția;*
- *Sarcinile incluse în problema de tip cascadă pot avea corelări cu diverse teme matematice, ceea ce majorează șansele elevilor de a conștientiza esența materiei matematice studiate;*
- *Astfel de probleme contribuie la formarea competențelor specifice la matematică și a celor transdisciplinare;*
- *Contribuie la formarea competențelor de aplicare a cunoștințelor achiziționate;*
- *Evaluarea cunoștințelor elevilor este mai reală;*
- *Elevii își formează deprinderi de a lucra corect la fiecare etapă de rezolvare a problemei;*
- *Prin rezolvarea problemelor de tip cascadă elevii își formează deprinderi eficiente de muncă intelectuală, care se vor reflecta pozitiv și în studiul altor discipline de învățământ;*
- *Problema de tip cascadă integrează cunoștințe, deprinderi și capacități dobândite și formate în cadrul studierii mai multor teme /module din matematică. Aceste probleme contribuie eficient la formarea competențelor specifice și ale celor transdisciplinare, preconizate în curriculumul școlar la matematică;*
- *Oferă posibilitatea de a generaliza și sistematiza un volum mare de informații;*
- *Permite evaluarea unui volum mare de informații asimilat de elevi în cadrul studierii matematicii.*

7. Cel mai semnificativ dezavantaj privind utilizarea problemelor de tip cascadă, evidențiat de profesorii de matematică (41 prof./38,7%), constă în faptul că *Greșeala admisă la una din etapele precedente ale cascadei conduce la obținerea rezultatelor incorecte la toate etapele următoare, chiar dacă metoda de rezolvare aplicată de elev este corectă.*

Pentru a elimina impactul a astfel de greșeli în rezolvarea problemei de tip cascadă pot fi indicate **rezultatele intermediare așteptate** la cascadele respective. E bine să învățăm din experiența colegilor din Germania (Vezi problema de tip cascadă propusă la examenul din Germania).

Un alt dezavantaj, evidențiat de mai mulți profesori, constă în faptul că *crearea problemelor de tip cascadă necesită mai mult timp.*

Un dezavantaj mai specific e lipsa literaturii de specialitate referitoare la crearea și aplicarea problemelor de tip cascadă în procesul educațional.

Menționăm că profesorul de matematică deja poate găsi probleme de tip cascadă și în sursele din Internet [5, 6].

15 profesori/14,2% au declarat că **nu există dezavantaje** privind utilizarea problemelor de tip cascadă în predarea-învățarea-evaluarea matematicii și că acestea ar trebui să fie aplicate sistematic în procesul educațional la matematică în gimnaziu și liceu.

În concluzie, constatăm că în aspect didactic problemele de tip cascadă pot fi aplicate la orice etapă a procesului de predare-învățare-evaluare la matematică. Utilizarea acestora contribuie la majorarea interesului și motivației elevilor pentru studierea matematicii. Formarea competențelor specifice matematicii școlare e posibilă și prin rezolvarea problemelor de tip cascadă.

O activitate creativă atât pentru profesori, cât și pentru elevi este compunerea problemelor de tip cascadă.

Astfel, problemele de tip cascadă merită o atenție deosebită, inclusiv, din perspectiva formării competențelor elevilor din gimnaziu și liceu și o dezvoltare didactică eficientă.

Problemele de tip cascadă pot fi aplicate și la studierea altor discipline școlare, inclusiv la studierea fizicii, chimiei, biologiei, geografiei, istoriei etc.

Bibliografie

1. ACHIRI, I.; LAȘCU, A. *Ghid de implementare a curriculumului disciplinar. Matematică, Clasele V-IX*. În: MECC. *Curriculumul național. Matematică. Clasele V-IX. Curriculum disciplinar. Ghid de implementare*. Chișinău: Lyceum, 2020. p.76-180. ISBN 978-9975-3438-7-9.
2. ACHIRI, I.; LAȘCU, A. *Ghid de implementare a curriculumului disciplinar. Matematică, Clasele X-XII*. În: MECC. *Curriculumul național. Matematică. Clasele X-XII. Curriculum disciplinar. Ghid de implementare*. Chișinău: Lyceum, 2020. p.76-180. ISBN 978-9975-3438-6-2.
3. SHKOLNYI, O.V. *Osnovy teorii ta metodyky otsiniuvannia navchalnykh dosiahnen z matematyky uchniv starshoi shkoly v Ukraini* [Basis of the theory and methodology of educational achievements assessing of senior school students]. Monograph. Kyiv: NDPU Publishing, 2015. [în ucraineană].
4. SHVETS, V.O.; BEVZ, V.G.; SHKOLNYI, O.V.; MATYASH, O.I. Ukraine: School Mathematics Education in the last thirty years. In: A. Karp (Ed.), *Eastern European Mathematics Education in the Decades of Change*. Springer, 2020.
5. [https://www.didactic.ro/materiale didactice/probleme-de-tip-cascada](https://www.didactic.ro/materiale%20didactice/probleme-de-tip-cascada).
6. [https://ru.scribd.com/document/325217413/Probleme -de-Tip-Cascadă](https://ru.scribd.com/document/325217413/Probleme-de-Tip-Cascada).

Articolul este elaborat în cadrul proiectului științific Reconfigurarea procesului de învățare din învățământul general în contextul provocărilor societale; 20.80009.0807.45 A, IȘE.