Acta et Commentationes, Sciences of Education, nr. 3(29), 2022 ISSN 1857-0623
p. 21-31 E-ISSN 2587-3636

CZU: 372.851:510.65+512.5 DOI: 10.36120/2587-3636.v29i3.21-31

UTILIZAREA LOGICII ȘI ALGEBREI LA REZOLVAREA PROBLEMELOR CU TEXT

Ilie LUPU, dr. hab., profesor universitar

https://orcid.org/0000-0003-1375-3071

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău

Rezumat. Acest articol tratează aspectele teoretice și metodologice de rezolvare a problemelor matematice cu text, utilizând logica și procedee algebrice. Sunt rezolvate probleme matematice cu un grad sporit de dificultate, referitoare la divizibilitatea numerelor și la unele procedee euristice de rezolvare a problemelor cu text.

Cuvinte cheie: problemă, logică matematică, algebră, divizibilitate, sistem de ecuații.

USING LOGIC AND ALGEBRA TO SOLVE PROBLEMS WITH TEXT

Summary. This article deals with the theoretical and methodological aspects of solving mathematical problems with text, using logic and algebraic procedures. Mathematical problems with an increased degree of difficulty are solved, related to the divisibility of numbers and some heuristic procedures for solving problems with text.

Keywords: problem, mathematical logic, algebra, divisibility, system of equations.

Principalul obiectiv care trebuie realizat în predarea matematicii în școală este acela să-l învățăm pe elev să gândească. A-l învăța pe elev să gândească înseamnă ca profesorul de matematică să fie nu numai un transmițător de informație ci el trebuie să determine la elevii săi capacitatea de a utiliza informația transmisă. Acest scop este realizat dacă elevul „știe” să rezolve probleme.

După cum menționează Lomonosov M.V., matematica „pune în ordine mintea”. Probabil, mintea în ordine, mai precis ordinea în minte. Este necesar să spunem, că matematica școlară contemporană, desigur, are toate posibilitățile de a pune mintea în ordine, însă nu le utilizează: a calcula, a memoriza, a învăța papagalicește îi învață, iar a gândi, a cugeta - nu, sau aproape nu.

De aceea în acest articol voi încerca să ajut elevii din licee cu profil real și studenții facultății de matematică anume să gândească.

În procesul de rezolvare a problemelor prin compunerea ecuațiilor dificultatea principală constă în trecerea condițiilor problemei dintr-un limbaj obișnuit în limbajul matematic al simbolurilor și ecuațiilor.

Cea mai importantă etapă a acestui proces o constituie alegerea necunoscutelor. Nu se recomandă de a nota prin necunoscute ceea ce se cere în problemă. Cerințele de bază ale necunoscutelor constă în aceea că, prin intermediul lor putem ușor formula relațiile din condiția problemei.

Exemplu 1. Dacă numărul de 2 cifre îl împărțim la suma cifrelor lui, atunci obținem câtul 8, iar restul 1. Dacă numărul, scris cu aceleași cifre, însă în ordine inversă, îl împărțim la diferența dintre cifrele zecilor și unităților a numărului inițial, atunci obținem câtul 4, iar restul 2. Să calculăm acest număr.

Fie *a* numărul dat. Din prima condiție rezultă, că *a* are forma 8*k*+1, iar din a doua rezultă, că numărul invers are forma 4*k*+2, adică număr par, însă nu este divizibil cu 4. De aceea prima cifră a numărului *a* este pară, iar *a* este unul din numerele 25, 41, 49, 65, 81. Să verificăm aceste numere. Numerele inverse sunt 52, 14, 94, 56, 18. Însă 52 și 56 nu verifică condiția a doua, ele sunt divizibile cu 4, iar pentru celelalte numere verificăm prima condiție: $41 = 8 * 5 + 1$, $49 = 3 * 13 + 10$, $81 = 9 * 9$.

Astfel, condiția problemei este verificată de numărul 41.

Putem rezolva problema prin metoda algebrică. Fie x și y sunt respectiv prima și a doua cifră a numărului a, atunci condițiile problemei le scriem astfel:

$$\begin{cases} 10x + y = 8(x + y) + 1 \\ 10y + x = 4(x - y) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7y = 1 \\ -3y + 14y = 2 \end{cases},$$ de unde $x = 4$, iar $y = 1$.

Răspuns: 41.

Exemplu 2. Împărțind un număr arbitrar de 2 cifre la suma cifrelor lui, obținem câtul 7 și restul 6. Să calculăm acest număr.

Fie x și y respectiv prima și a doua cifră a numărului căutat. Atunci are loc egalitatea $10x + y = 7(x + y) + 6$ sau $3x = 6y + 6$, $x = 2(y + 1)$, și deoarece x și y sunt numere naturale de o singură cifră, atunci ulterior vom cerceta numerele 41, 62 și 83.

Concomitent, numărul 41 nu verifică condiția problemei, deși pentru $x = 4$, $y = 1$ egalitatea $10x + y = 7(x + y) + 6$ este adevărată. Problema constă în aceea, că această egalitate reprezintă trecerea incompletă în limbajul algebric a afirmației: „Numărul cu cifrele x și y la împărțirea cu $x + y$ obținem câtul 7 și restul 6” la această egalitate trebuie de menționat, că $6 < x + y$ – aceasta-i definiția împărțirii cu rest.

Pentru numerele 62 și 83 aceasta inegalitate este justă, astfel problema dată are două soluții 62 și 83.

Exemplu 3. Împărțind un număr natural de 2 cifre la suma cifrelor lui, obținem câtul 7 și restul 6. Apoi împărțind acest număr la produsul cifrelor lui obținem câtul 3 iar restul 11. Să calculăm acest număr de 2 cifre.

Condițiile problemei date le trecem în limbajul algebric. Dacă x și y sunt prima și a doua cifră a numărului căutat, atunci acesta are forma $10x + y$ și au loc egalitățile: $10x + y = 7(x + y) + 6$, $10x + y = 3xy + 11$.

Din prima egalitate obținem $3x = 6y + 6$ sau $x = 2y + 2$. În rezultatul substituției respective, egalitatea a doua ia forma: $20y + 20 + y = 6y^2 + 6y + 11 \Leftrightarrow 6y^2 - 15y - -9 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 5y - 3 = 0$, care are o soluție naturală $y = 3$. Deci $x = 8$. Acest număr căutat este 83.

Exemplu 4. Împărțind un număr arbitrar de două cifre la suma cifrelor lui obținem câtul 7 iar restul 6. Apoi împărțind acest număr de două cifre la produsul cifrelor lui obținem câtul 3 iar restul 11. Să calculăm acest număr de 2 cifre.

Notăm numărul căutat cu litera a. Din prima condiție putem spune, că $a+1$ este divizibil și la 7 și la 3, adică se împarte la 21, astfel $a+1=21k$, $a=21k-1$. Prin urmare a este unul din numerele 20, 41, 62 și 83, iar din condiția a doua rezultă, că produsul cifrelor numărului a este mai mare decât 11, atunci „decad" soluțiile 20 și 41.

Verificăm două numere: 62 și 83; $62=7*8+6$, $83=11*7+6=24*3+11$, adică condiția problemei este verificată numai de numărul 83.

Trecem condiția problemei dată în limbajul algebric. Dacă x și y sunt prima și a doua cifră a numărului căutat, atunci el are forma $10x+y$, și au loc egalitățile $10x+y=7(x+y)+6$, $10x+y=3xy+11$. Din prima egalitate, obținem $3x=6y+6$, $x=2y+2$. Înlocuind $x=2y+2$ în egalitatea a doua, obținem: $20y+20+y=6y^2+6y+11 \Leftrightarrow 6y^2-15y-9=0 \Leftrightarrow 2y^2-5y-3=0$, de unde unică valoare naturală y= 3. Atunci, x= 8, astfel numărul căutat este 83.

Exemplu 5. Împărțind numărul de 2 cifre la produsul cifrelor lui, obținem câtul 3 iar restul 11. Să calculăm acest număr.

Dacă x și y sunt prima și a doua cifră a numărului căutat, atunci el are forma $10x+y$ și are loc egalitatea $10x+y=3xy+11$ sau $10x-11=(3x-1)y$, astfel $10x-11$ se împarte la $3x-1$. Însă atunci la $3x-1$ se împarte și diferența $(10x-11)-3(3x-1)=x-8$.

Este evident, cu toate acestea, că $x-8$ este un număr întreg de la - 8 până la 1 (mai precis de la -7 până la 1, deoarece conform condiției, cifrele numărului căutat nu sunt egale cu 0, astfel în cazul când $3x-1$ este de 2 cifre, adică pentru $x \geq 4$, $x-8$ nu poate fi divizibil la $3x-1$ cu excepția cazului, când $x-8=0$, adică $x=8$.

Rămâne astfel de examinat pentru x posibilitățile: 1, 2, 3 și 8 și verificarea simplă (-7 nu-i divizibil la 2; -6 nu-i divizibil la 5; -4 nu-i divizibil la 8; 0 este divizibil la 11) indică, că condiția problemei este verificată de numărul 83.

Este posibil de a proceda astfel, de exemplu: numărul y nu poate fi par - în caz contrar în partea stângă a egalității va fi un număr par, în timp ce în partea dreaptă va fi un număr impar. Dacă y este un număr impar, atunci $10x+y$ și $3xy+11$ sunt impare și de aceea $3xy$ - par, adică x par. Observăm, că $x \neq 0$, astfel numărul căutat nu-l putem împărți la produsul cifrelor lui, și verificăm, care din ecuațiile $20+y=6y+11$, $40+y=12y+11$, $60+y=18y+11$, $80+y=24y+11$ are ca soluție un număr natural: $5y=9$, $11y=29$, $17y=49$, $23y=69$, observăm, că soluția problemei este numărul 83.

Comentarii: Deoarece în acest caz rezolvăm ecuația nu „în numere întregi", dar „în cifre", atunci e posibil de a alege toate valorile posibile a unei necunoscute și de verificat, va fi oare „cifră” valoarea celeilalte. În timp ce pentru „gimnastica minții” - anume pentru aceasta se învață matematică în școală, întotdeauna este rentabil de a găsi calea cea mai simplă, de a simplifica alegerea.

Exemplu 6. Feciorul este mai tânăr decât tata lui de 7 ori, iar peste un an feciorul va deveni mai mic decât tatăl lui de 6 ori. Peste câți ani feciorul va deveni mai mic decât tatăl lui de 4 ori?

Dacă vârsta fiului este *k*, atunci vârsta tatei este egal cu 7*k*, iar peste un an ei vor avea respectiv $k+1$ și $7k+1$ ani. Conform condiției problemei, $7k+1=6(k+1)$, de unde $k=5$, $7k=35$.

Dacă fiul va fi mai mic decât tatăl lui de 4 ori peste *n* ani, atunci $35+n= = 4(5+n)$, de unde *n*=5.

Exemplu 7. Resturile de la împărțirea numărului natural *n* la 6 și 7 sunt respectiv egale cu 2 și 3. Să calculăm restul de la împărțirea numărului *n* la 42.

Din egalitatea $n=13p+2=7q+5$ sau $7q=13p-3$, rezultă, că $13p-3$ se împarte la 7, adică $6p-3=3(2p-1)$ se împarte la 7, deci $2p-1$ se împarte la 7. Valorile respective ale lui *p* le vom căuta cu ajutorul tabelului:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2*p*-2	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	20
Restul de la împărțire la 7	1	3	5	0	2	4	6	1	3	5	0

Observăm, că resturile începând cu $n=8$, încep să se repete peste 7 pași, astfel $2p-1$ se împarte la 7 pentru $p=4+7q$, iar atunci $n=13(4+7q)+2 = 91p + 54$, $n^2=91k+542$ $(k \in Z)$, și deoarece $54^2=(50+4)^2=2500+400+16= = 2916 = 91*32+4$, atunci restul căutat este 64.

Comentarii: Ar fi fost mai simplu de utilizat datele numerice ale problemei și anume din condiția $k-2$ se împarte la 13, $k+2$ se împarte la 7, iar deoarece $(3;7)=1$, atunci $k^2- 4$ se împarte la 91, astfel restul căutat este egal cu 4.

Exemplu 8. Numărul apartamentelor cu 2 camere într-o casă este de 4 ori mai mare decât numărul apartamentelor cu o cameră, iar numărul apartamentelor cu trei camere este multiplul numărului apartamentelor cu o cameră. Dacă numărul apartamentelor cu trei camere îl vom majora de 5 ori, atunci el devine cu 22 mai mare, decât apartamentele cu 2 camere, Câte apartamente are casa în total, dacă se știe că numărul lor nu este mai mic decât 100?

Fie *a, b, c* numărul respectiv al apartamentelor cu una, două și trei camere. Atunci, din condiție, $b = 4a$, *c* se împarte la *a* și $5c=b+22$, $a+b+c \geq 100$.

Prin urmare $5c=4a+22$ se împarte la *a*, adică 22 se împarte la *a*, deci *a* este egal cu 1, 2, 11 sau 22. Însă $4a+2=5c-20$ se împarte la 5 și această condiție este verificată numai de $a = 2$ și $a = 22$. Pentru $a = 2$ obținem $b = 8$, $5c = 30$, de unde $a + b + c < 100$, iar pentru $a = 22$, $b = 88$, $c = 22$ și numărul total de apartamente este 132.

Exemplu 9. Din punctul C în punctul D a plecat trenul marfar. După 5 ore și 5 minute în întâmpinarea lui, din punctul D, a plecat trenul de pasageri, cu care s-a întâlnit în punctul A. Apoi trenul de pasageri a sosit în punctul C după 4 ore și 6 minute, iar cel marfar în punctul D, după 12 ore și 55 de minute. Cât timp fiecare tren s-a aflat în mișcare?

Condițiile problemei sunt expuse în figura 1, unde litera B indică starea trenului marfar în momentul plecării trenului de pasageri din punctul D.

Ambele trenuri se află concomitent în punctul A. Figura ne sugerează și alegerea necunoscutelor.

Drumul de la B până la A trenul marfar, cât și trenul de pasageri de la D până la A l-au parcurs în același timp. Notăm acest interval de timp prin *x*.

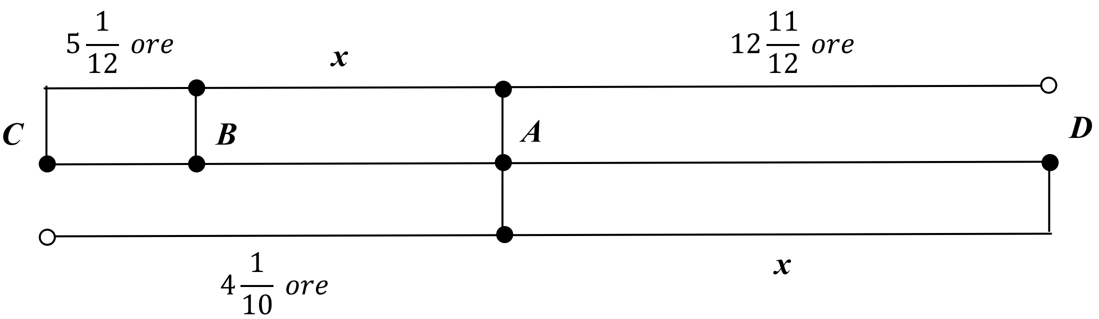

Figura 1. Modelarea grafică a condițiilor problemei 9

Fie v_1 viteza trenului marfar, iar v_2 viteza trenului de pasageri. Fiecare din porțiunile de drum: de la punctul C până la A, și de la punctul D până la A ne permite să alcătuim ecuațiile: $12\frac{11}{12}v_1 = xv_2, (5\frac{1}{12} + x)v_1 = 4\frac{1}{10}v_2$. Putem alcătui și ecuația pentru tot drumul: $\left(5\frac{1}{12} + x + 12\frac{11}{12}\right)v_1 = \left(x + 4\frac{1}{10}\right)v_2$, care reprezintă consecința (mai bine spus, suma) primelor 2 ecuații. Însă această ecuație este mai simplă decât a doua, de aceea vom rezolva sistemul:

$$\begin{cases} 12\dfrac{11}{12}v_1 = xv_2\,, \\ (18 + x)v_1 = (x + 4{,}1)v_2. \end{cases}$$

Împărțind prima ecuație la a doua, obținem:

$$\frac{12\frac{11}{12}}{18 + \mathrm{x}} = \frac{x}{x + 4{,}1}$$

de unde $x = 5$ ore 10 minute (soluția a doua este negativă și nu are sens fizic). Astfel trenul marfar parcurge tot drumul în 23 de ore și 10 minute, iar cel de pasageri - în 9 ore și 16 minute.

Exemplu 10. Trei înotători trebuiau să înoate din A în B și invers. Inițial ia startul primul, peste 5 secunde al doilea, încă peste 5 secunde al treilea. Printr-un punct arbitrar, situat între A și B toți înotătorii au trecut concomitent. Al treilea înotător, înotând până în B și făcând retur, îl întâlnește pe al doilea la 9 m de B, iar primul la 15 m de B. Să calculăm viteza înotătorului al treilea, dacă distanța AB este egală cu 55 m.

Condițiile problemei sunt relatate în figura 2.

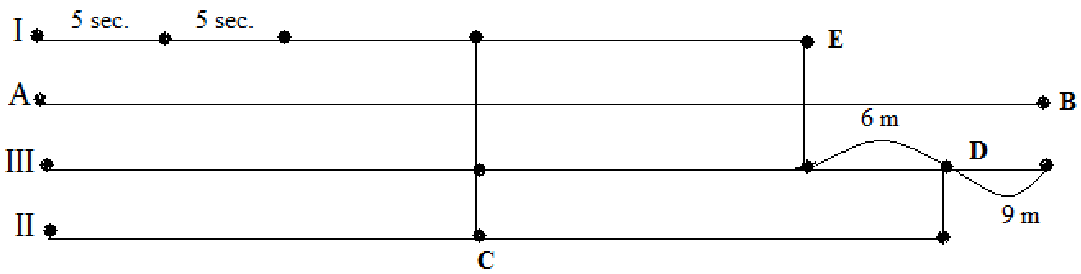

Figura 2. Modelarea grafică a condițiilor problemei 10

Cu ajutorul figurii 2 putem alcătui 4 ecuații: întâlnirea în punctul C sugerează 2 ecuații și două următoarele întâlniri - câte una. În calitate de necunoscute este convenabil de ales vitezele înotătorilor și distanța AC.

Fie v_1, v_2 și v_3 vitezele înotătorilor, iar x distanța AC (fig. 2). Egalăm intervalele de timp consumat de înotători la distanța AC:

$$\frac{x}{v_3} + 10 = \frac{x}{v_2} + 5 = \frac{x}{v_1} \tag{1}$$

Din condiția întâlnirii în punctul D a înotătorilor al treilea și al doilea obținem:

$$\frac{61}{v_3} + 5 = \frac{46}{v_2} \tag{2}$$

iar în punctul E, al treilea și primul:

$$\frac{70}{v_3} + 10 = \frac{40}{v_1} \tag{3}$$

Deoarece în ecuația (2) se conțin v_2 și v_3, iar în ecuația (3) v_1 și v_3, atunci ecuațiile le scriem sub forma:

$$\begin{cases} \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3} = \frac{5}{x} \\ \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_3} = \frac{10}{x} \end{cases} \tag{4}$$

Efectuăm unele transformări în ecuațiile (2) și (3):

$$46\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3}\right) = \frac{18}{v_3} + 5, \text{ și } 4\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_3}\right) = \frac{3}{v_3} + 1,$$

și utilizând substituția (4), obținem sistemul:

$$\begin{cases} 46 \cdot \frac{5}{x} = \frac{18}{v_3} + 5 \\ 4 \cdot \frac{10}{x} = \frac{3}{v_3} + 1, \end{cases}$$

din care îl excludem pe v_3. Determinăm $x = 10$. Prin urmare, $v_3 = 1$.

Răspuns: 1m/sec.

Exemplul 11. Distanța dintre punctele A și B este egală cu *s* km. Din punctul A în punctul B a zburat un elicopter, iar peste *t* ore în aceeași direcție a zburat un avion. Avionul a ajuns elicopterul la *d* km de A, a zburat până în B și imediat s-a întors înapoi. La *d* km de B, avionul a întâlnit elicopterul și a revenit în A mai târziu, decât elicopterul în B. Cu cât mai repede elicopterul sosește în B, decât avionul s-a întors în A?

Întrebarea din problemă nu are legătură directă cu rezolvarea ei. De aceea mărimea, despre care se cere în problemă, nu trebuie aleasă în calitate de necunoscută. Mai reușit ar fi de găsit relația dintre distanță și intervalele de timp cu ajutorul vitezelor avionului și elicopterului.

Pentru a rezolva problema avem nevoie de două ecuații, pe care le obținem, egalând intervalele de timp până la prima și a doua întâlnire. Faptul, că avionul s-a întors în A, iar elicopterul a sosit în B, îl vom utiliza după ce determinăm vitezele lor. Aceasta ne va permite să calculăm intervalele necesare de timp pentru a răspunde la întrebarea problemei
.

Notăm viteza avionului prin *x* iar viteza elicopterului prin *y*. Până la prima întâlnire elicopterul a zburat $\frac{d}{y}$ ore, iar avionul - $\frac{d}{x}$ ore. Deoarece avionul a zburat cu *t* ore mai târziu, atunci $\frac{d}{y}=\frac{d}{x}+t$. Ecuația a doua o obținem din condițiile întâlnirii a doua. Elicopterul în acest moment se găsea la *d* km de B și a zburat $\frac{s-d}{y}$ ore. Avionul a parcurs distanța $s+d$, zburând $\frac{s+d}{x}$ ore. Prin urmare $\frac{s-d}{y}=\frac{s+d}{x}+t$.

Inițial calculăm mărimea care ne interesează, presupunând, că *x* și *y* sunt cunoscute.

Elicopterul a sosit în B peste $\frac{s}{y}$ ore după decolare. Avionul a revenit în A peste $t+\frac{2s}{x}-\frac{s}{y}$ ore, după ce elicopterul a zburat din A.

Pe noi ne interesează mărimea: $t+\frac{2s}{x}-\frac{s}{y}$, cu atâtea ore avionul s-a întors în A mai târziu decât elicopterul a sosit în B.

Astfel, din ecuațiile obținute trebuie să determinăm $\frac{1}{x}$ și $\frac{1}{y}$. Înmulțim prima ecuație cu $d-s$, iar a doua cu *d* și adunându-le obținem: $\frac{(s+d)d}{x}+\frac{d(d-s)}{x}+t(d-s)+td=0$, adică $\frac{2d^2}{x}=t(s-2d)$, de unde $\frac{1}{x}=\frac{t(s-2d)}{2d^2}$. Din prima ecuație determinăm $\frac{1}{y}$:

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{t}{d}=\frac{ts}{2d^2}.$$

Prin urmare, $t+\frac{2s}{x}-\frac{s}{y}=t+\frac{2st(s-2d)}{2d^2}-\frac{ts^2}{2d^2}=t+\frac{st(s-4d)}{2d^2}$. Problema are soluții, dacă toate componentele care se conțin sunt pozitive. Pentru ca mărimea $\frac{1}{x}$ să aibă sens, este necesar ca $s>2d$.

Conform condiției elicopterul va sosi în B, mai devreme decât avionul care s-a întors în A. Deoarece $t + \frac{st(s-4d)}{2d^2} > 0$, adică $s^2 - 4sd + 2d^2 > 0$. Am obținut o inecuație pătrată în raport cu $\frac{s}{d}$: $\left(\frac{s}{d}\right)^2 - 4 \cdot \frac{s}{d} + 2 > 0$, de unde $\frac{s}{d} < 2 - \sqrt{2}$ sau $\frac{s}{d} > 2 + \sqrt{2}$. Prima soluție nu este admisibilă, deoarece $s < 2d - d\sqrt{2}$, care contrazice condiției că $s > 2d$.

Răspuns: $s > (2 + \sqrt{2})d$; $t + \frac{\mathrm{st(s-4d)}}{2d^2}$.

Exemplu 12. Doi cicliști și un pieton sau pornit concomitent din punctul A în punctul B. Peste o oră după plecare bicicleta primului ciclist s-a defectat și el continuă calea pe jos, mișcându-se de 4,5 ori mai încet decât cu bicicleta. Pe dânsul îl depășesc: ciclistul al doilea după $\frac{5}{8}$ ore după defect, iar pietonul după 10,8 ore după defect. În momentul defectului ciclistul al doilea a parcurs distanța, de 2 ori mai mare, decât aceea, care a parcurs pietonul la moment, cu $\frac{5}{36}$ ore mai târziu, decât în momentul defectului. Peste câte ore după începutul mișcării s-a defectat bicicleta?

Desenul, referitor la această problemă (figura 3) ne sugerează ideea, că e convinabil de a introduce patru necunoscute: vitezele cicliștilor v_1 și v_2, viteza pietonului u și vremea t a deteriorării.

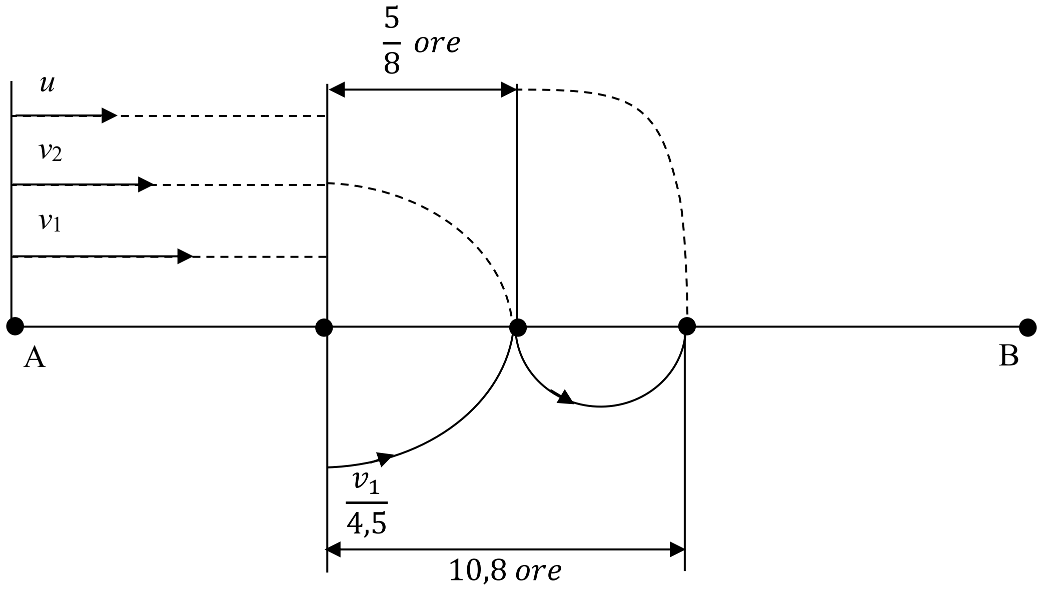

Figura 3. Modelarea grafică a condițiilor problemei 12

Este evident, că $v_1 > v_2 > u$; $\frac{v_1}{4,5} < u$; $t > 1$. Evidențiem din textul problemei condițiile, pe care le vom utiliza în formă de ecuații.

Condițiile problemei	***Ecuațiile***
Ciclistul al doilea depășește primul după $\frac{5}{8}$ ore după deteriorare	$v_2\left(t+\frac{5}{8}\right)=v_1 t+\frac{v_1}{4{,}5}\cdot\frac{5}{8}$
Pietonul îl depășește pe primul ciclist după 10,8 ore după deteriorare	$u\,(t+10{,}8)=v_1 t+\frac{v_1}{4{,}5}\cdot 10{,}8$
În momentul deteriorării ciclistul al doilea a parcurs distanța, de 2 ori mai mare decât cea parcursă de pieton la moment, cu $\frac{5}{36}$ ore mai târziu decât momentul deteriorării.	$v_2 t= 2u\left(t+\frac{5}{36}\right).$

Astfel, am obținut trei ecuații, care conțin 4 necunoscute v_1, v_2, u și t. Însă este imposibil de a calcula toate necunoscutele de o singură cifră din acest sistem. Însă fiecare din ecuațiile obținute reprezintă o ecuație liniară omogenă în raport cu variabilele v_1, v_2, și u. De aceea, împărțind fiecare din ele la u, ușor observăm, că numărul necunoscutelor se micșorează până la trei: t și două relații $\frac{v_1}{u}$ și $\frac{v_2}{u}$:

$$\begin{cases}\frac{v_2}{u}\left(t+\frac{5}{8}\right)=\frac{v_1}{u}t+\frac{v_1}{u}\cdot\frac{1}{4{,}5}\cdot\frac{5}{8}\\ t+10{,}8=\frac{v_1}{u}t+\frac{v_1}{u}\cdot\frac{1}{4{,}5}\cdot 10{,}8\\ \frac{v_2}{u}\cdot t=2\left(t+\frac{5}{36}\right).\end{cases}$$

Înlocuind valoarea raportului $\frac{v_1}{u}$ din ecuația a doua în prima, obținem:

$$\frac{v_2}{u}=\frac{t+10{,}8}{t+2{,}4}\cdot\frac{t+5/36}{t+5/8}.$$

Utilizând ecuația a treia, obținem:

$$\frac{t+10{,}8}{t+2{,}4}\cdot\frac{t}{t+\frac{5}{8}}=2 \text{ sau } t^2-4{,}75t+3=0, \text{ de unde } t_1=\frac{3}{4},\ t_2=4.$$

Deoarece se știe deteriorarea bicicletei a avut loc peste o oră și ceva de la începutul mișcării, atunci soluția problemei este 4 ore.

Exemplu13. Un automobil pleacă din punctul A și merge cu o viteză constantă v km/oră până în punctul B, care se află la distanța de 24,5 km de la punctul A. În punctul B automobilul își reduce viteza în fiecare oră cu 54 km/oră și se deplasează așa până la staționarea completă. Apoi automobilul imediat întoarce înapoi și revine în A cu viteza constantă v km/oră. Care trebuie să fie viteză v, ca automobilul într-un timp minim să parcurgă calea de la A până la staționarea completă și înapoi în punctul A cu procedeul indicat mai sus?

Considerăm timpul în care automobilul parcurge distanța de la A până a staționat și invers. Vom demonstra, că acest interval de timp este determinat de parametrul necunoscut v.

1. Distanța 24,5 km automobilul o parcurge în t_1 ore: $t_1=\frac{24{,}5}{V}$.

2. Apoi se deplasează până a staționa complet cu viteza – 54 km în t_2 ore: $t_2 = \frac{v}{54}$, parcurgând astfel distanța *s,* care se determină cu formula mișcării accelerate uniforme: $s = vt_2 - \frac{54t_2^2}{2}$, $s = \frac{v^2}{54} - \frac{v^2}{2*54} = \frac{v^2}{108}$.
3. Timpul t_3 , întrebuințat în calea inversă, este $t_3 = \frac{24{,}5+\frac{v^2}{108}}{v} = \frac{24{,}5}{v} + \frac{v}{108}$.
4. Astfel vremea totală de mișcare a automobilului:

$$T= t_1 + t_2 + t_3 = \frac{24{,}5}{v} + \frac{v}{54} + \left(\frac{24{,}5}{v} + \frac{v}{108}\right) = \frac{49}{v} + \frac{v}{36}.$$

Deci $T(v) = \frac{v}{36} + \frac{49}{v}$ este o funcție de un singur parametru *v.* Acum să calculăm, pentru care valori ale lui *v*, această funcție obține valoarea minimă. Pentru aceasta calculăm derivata $T'(v)$: $T'(v) = \frac{1}{36} - \frac{49}{v^2}$. Condiția necesară de extrem a funcției derivabile este $T'(v) = 0$, deci $T'(v) = \frac{1}{36} - \frac{49}{v2} = 0$, $(v > 0)$ de aici $v = 42$.

Funcția T(v) obține minimum pentru valoarea $v = 42$, deoarece $T'(v) > 0$ pentru $v > 42$, $T'(v) < 0$ pentru $v < 42$.

Astfel, automobilul deplasându-se cu viteza de 42 km/oră, folosește timp minim.

Să rezolvăm această problemă fără a utiliza derivata funcției.

Observăm, că funcția T(v) are forma funcției $y(x) = bx + \frac{a}{x}$. Dacă *a* și *b* au aceleași semne, atunci funcția are puncte de extremă, pe care ușor le determinăm. Cea mai mare și cea mai mică valoare a acestei funcții le calculăm cu ajutorul inegalității $\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$. $(A \geq 0, B \geq 0)$ (1)

În formula (1) egalitatea are loc atunci și numai atunci, când $A = B$.

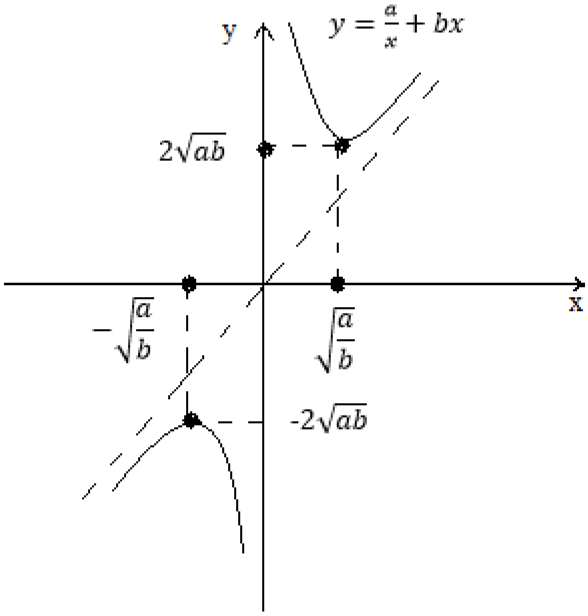

Figura 4. Modelarea grafică a condițiilor problemei 13

Utilizăm această inegalitate în cercetarea funcției $y = bx + \frac{a}{x}$ $(a > 0, b > 0)$ și obținem: $y = \frac{a}{x} + bx \geq 2\sqrt{\frac{a}{x} \cdot bx} = 2\sqrt{ab}$, dacă $x > 0$.

Astfel funcția $y(x)$ pentru $x > 0$, este mai mare sau egal cu $2\sqrt{ab}$. Egalitatea are loc în cazul când: $\frac{a}{x} = bx$, adică $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Prin urmare, minimul local al funcției cercetate este egal cu $2\sqrt{ab}$ și se obține pentru $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

În mod analog, pentru $x < 0$ funcția $y(x)$ are maximul local. Într-adevăr, pentru $x < 0$, $y \leq -2\sqrt{ab}$, maximum se obține pentru $x = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ și este egal cu $-2\sqrt{ab}$.

În cazul când $a = b = 1$ avem inegalitatea bine cunoscută $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$. Utilizând proprietatea acestei funcții pentru T(*v)*, obținem inegalitatea:

$$T(v) = \frac{v}{36} + \frac{49}{v} \geq 2\sqrt{\frac{v}{36} \cdot \frac{49}{v}} = 2\frac{1}{3}.$$

Astfel timpul minim de mișcare a automobilului este egală cu $2\frac{1}{3}$ ore, iar viteza o determinăm din egalitatea $\frac{v}{36} = \frac{49}{v}$, de unde *v* = 42 km/oră.

Concluzii

Scopul principal al aplicării metodologiei logicii și algebrei la rezolvarea problemelor cu text este de a încuraja activitatea mentală a elevilor și de a dezvolta invenția și creativitatea. Articolul de față constituie un ghid metodologic de rezolvare a problemelor de matematică, vine să înlesnească muncă profesorului, elevului, studentului, materia fiind expusă la un nivel științific accesibil acestora.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de ANCD

Bibliografie

1. LUPU, I. *Metodologia rezolvării problemelor de matematică cu un grad sporit de dificultate*. Chișinău: Editura Prut internațional, 2011.
2. RUS, I. *Metodica predării matematicii*. Arad, România: Editura Servo-sat, 1966.
3. ВАХОВСКИЙ, Е.Б.; РЫБКИН, А.А. *Задачи по элементарной математике повышенной трудности*. Москва: Издательство Наука, 1969.
4. ДОРОФЕЕВ, Т.В.; СЕДОВА, Е.А.; ШЕСТАКОВ, С.А. *Математика, Супер-репетитор*. Москва, 2008.
5. ЛУРЪЕ, М. В.; АЛЕКСАНДРОВ, Б. И. *Задачи на составление уравнений*. Москва: Наука,1980.