CZU: 373.016:51 DOI: 10.36120/2587-3636.v30i4.20-36

CERCETAREA FUNCȚIILOR ȘI CONSTRUIREA GRAFICELOR LOR

Ilie LUPU, dr. hab., prof. universitar
https://orcid.org/0000-0003-1375-3071
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău

Rezumat. În articol este propus algoritmul cercetării funcțiilor elementare, utilizat la rezolvarea diverselor probleme, care vor contribui la însușirea mai eficientă a matematicii în gimnazii și licee.

Cuvinte cheie: funcții, cercetare, algoritm, maxim, minim, simetric, asimetric.

THE RESEARCH OF FUNCTIONS AND THE CONSTRUCTION OF THEIR GRAPHS

Abstract. In the article, the algorithm of the research of elementary functions is proposed, used to solve various problems, which will contribute to the more effective acquisition of mathematics in gymnasiums and high schools.

Keywords: functions, research, algorithm, maxim, minim, symmetric, asymmetric.

Știința de astăzi nu mai este doar o sumă de cunoștințe științifice existente. Ea se prezintă nu numai ca produs finit, ci, în primul rând, ca un produs de generare a cunoștințelor noi, este o creație intelectuală, strâns legată de cerințele practicii.

Din punct de vedere pedagogic, această viziune sugerează predarea matematicii ca proces și pretinde ca o „învățare prin descriere”, realizează prin „metode de învățare prin cercetare”, centrate pe procese de investigație, care pun în valoare capacitatea explicativă a elevilor în situația de „cercetător” la rezolvarea problemelor teoretice sau practice.

Inițierea timpurie, din școală a elevilor cu formele elementare ale cercetării au menirea să formeze o atitudine euristică, de căutare activă a adevărului, să cultive spiritul descoperirii și al invenției.

Cercetarea complexă și sistematică a funcțiilor reprezintă una din problemele de bază ale matematicii. În matematica elementară rezolvăm probleme legate cu cercetarea funcțiilor, conform următorului algoritm:

1) determinăm domeniul de definiție a funcției;
2) domeniul de valori ale funcției;
3) zerourile funcției; intervalele în care funcția este pozitivă sau negativă; punctul de intersecție a graficului cu axa Oy (dacă funcția este definită pentru $x=0$);
4) proprietățile de simetrie ale graficului funcției (paritatea sau imparitatea funcției);
5) intervalele de creștere și descreștere ale funcției;
6) punctele de maximum și de minimum ale funcției;
7) asimptotele graficului funcției.

Apoi trasăm graficul funcției, care intuitiv este un procedeu absolut necesar de cercetare a funcției, însă el ilustrează proprietățile funcției, dar nu le demonstrează.

Ex. 1. $y = \sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-6x+9}$.

Funcția dată este definită astfel încât pentru orice valoare reală a lui x, obține numai valori pozitive, astfel graficul ei va fi situat mai sus de axa *Ox* și intersectează axa *Oy* în punctul $x = 0, y = 6$.

Scriem funcția dată astfel:

$y = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2}$ sau $y = |x+2| + |x-1| + |x-3|$.

1) Dacă $x \leq -2$, atunci $x+2 \leq 0, x-1 < 0, x-3 < 0$. Prin urmare,

$$|x+2| = -(x+2) = -x-2,$$
$$|x-1| = -(x-1) = -x+1,$$
$$|x-3| = -(x-3) = -x+3,$$

de aceea $y = -x-2-x+1-x+3 = -3x+2$.

2) Dacă $-2 \leq x \leq 1$, atunci $x+2 \geq 0, x-1 \leq 0, x-3 < 0$, prin urmare

$$y = x+2-x+1-x+3 = -x+6.$$

3) Dacă $1 \leq x \leq 3$, atunci $x+2 > 0, x-1 \geq 0, x-3 \leq 0$, prin urmare

$$y = x+2+x-1-x+3 = x+4.$$

4) Dacă $x \geq 3$, atunci $x+2 > 0, x-1 > 0, x-3 \geq 0$, prin urmare

$$y = x+2+x-1+x-3 = 3x-2.$$

Deci, $y = \begin{cases} -3x+2, & pentru\ x \leq -2, \\ -x+6, & pentru\ -2 \leq x \leq 1, \\ x+4, & pentru\ 1 \leq x \leq 3, \\ 3x-2, & pentru\ x \geq 3. \end{cases}$

Acum ușor putem construi graficul funcției date (figura 1).

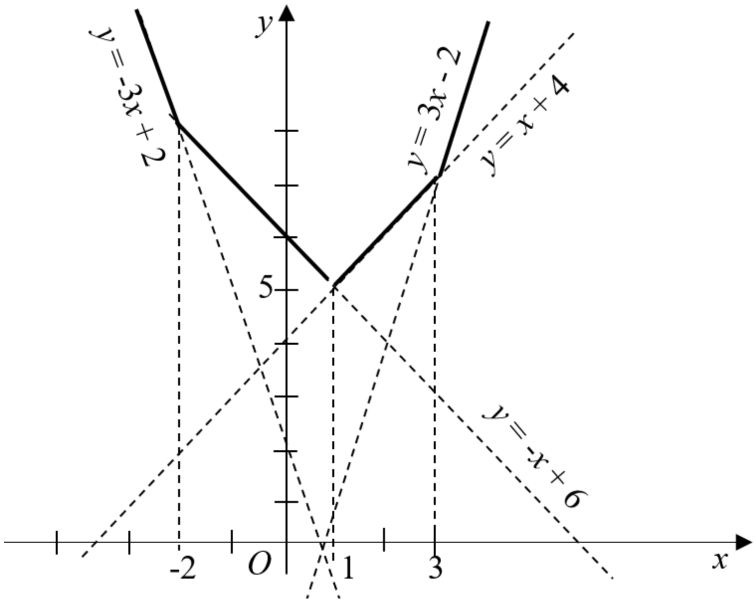

Figura 1. Graficul funcției din exemplul 1

Dreapta $x = 1$ este axă de simetrie a graficului funcția date. Dacă *x* variază de la $-\infty$ până la 1, funcția dată descrește de la $+\infty$ la 5, iar dacă *x* crește de la 1 până la ∞, funcția crește de la 5 la $+\infty$.

În punctul $x = 1$ funcția dată obține valoarea minimală egală cu 5:

$$y_{x=1^{minimum}} = 5.$$

Ex. 2. $y = \frac{1}{2}(|x + 1| + |x - 1|)$.

Funcția dată este definită astfel încât pentru orice valoare reală a lui *x*, este pară. Într-adevăr: $f(-x) = \frac{1}{2}(| - x + 1| + | - x - 1|) = \frac{1}{2}(|x - 1| + |x + 1|) = f(x)$. Deci $f(-x) = f(x)$.

Graficul ei este simetric în raport cu axa *Oy*, obține numai valori pozitive.
Inițial cercetăm funcția dată în domeniul $[0, \infty)$ și trasăm graficul ei.

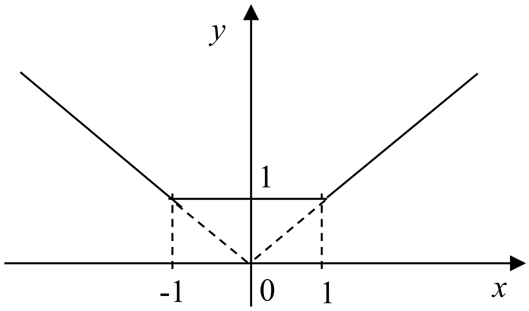

Figura 2. Graficul funcției din exemplul 2

Fie $0 \leq x \leq 1$, atunci $y = \frac{1}{2}(x + 1 - x + 1) = 1$, iar pentru $x \geq 1$, $y = \frac{1}{2}(x + 1 + x - 1) = \frac{1}{2}\, 2x = x$ (figura 2). Apoi trasăm graficul simetric graficului obținut în raport cu axa *Oy*. Astfel funcția dată obține valuri mai mari sau egale cu 1. Deci valoarea minimală a funcției este egală cu 1 pentru $-1 \leq x \leq 1$.

În domeniul $(-\infty, -1)$ funcția descrește de la +∞ la 1, iar în domeniul $(1, \infty)$ - crește de la 1 la +∞.

Ex. 3. $y = 2x^2 + x - 1$.

Funcția este definită pentru orice valori reale ale lui *x*. Numerele -1 și $\frac{1}{2}$ sunt rădăcini ale funcției, deci graficul (parabola) intersectează axa absciselor în puncte -1 și $\frac{1}{2}$.

Dacă $x = 0$, atunci $y = -1$, prin urmare, graficul intersectează axa ordonatelor în punctul $(0; -1)$. Ramurile parabolei sunt orientate în sus, deoarece $a = 2 > 0$.
Coordonatele vârfului parabolei:

$$x_0 = -\frac{1}{2\cdot 2} = -\frac{1}{4}, y_0 = \frac{4\cdot 2(-1) - 1^2}{4\cdot 2} = -\frac{9}{8}.$$

Axa de simetrie este dreapta $x = -\frac{1}{4}$.

Pentru a construi mai exact graficul acestei funcții considerăm încă un punct: dacă $x = 1$, atunci $y = 2$.

Dacă argumentul variază de la $-\infty$ până la $-\frac{1}{4}$ funcția descrește de la $+\infty$ până la $-\frac{9}{8}$, iar când argumentul variază de la $-\frac{1}{4}$ până la $+\infty$ funcția crește de la $-\frac{9}{8}$ până la $+\infty$. Funcția obține valoarea minimală pentru $x = -\frac{1}{4}$, $y_{minimum} = -\frac{9}{8}$ (figura 3).

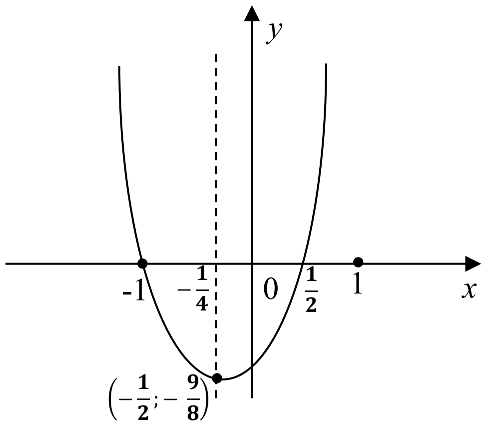

Figura 3. Graficul funcției din exemplul 3

Ex. 4. $y = x^2 - 2|x| + 1$.

Funcția este definită pe R, pară, deoarece $(-x)^2 - 2|x| + 1 = x^2 - 2|x| + 1 = y$, graficul ei este simetric în raport cu axa ordonatelor.

Rădăcinile funcției sunt numerele -1 și 1, adică punctele de pe axa absciselor -1 și 1 aparțin graficului. Deoarece pentru $x = 0$ $y = 1$, atunci graficul intersectează axa ordonatelor în punctul $(0; 1)$. Pentru $x = -\frac{-2}{2} = 1$ funcția obține valoarea minimum $y = 0$. Deoarece funcția este pară ea obține minimum și pentru $x = -1, y = 0$.

Pentru orice valoare x funcția obține valori mai mari sau egale cu zero, deoarece $y = (|x| - 2)^2$ (figura 4).

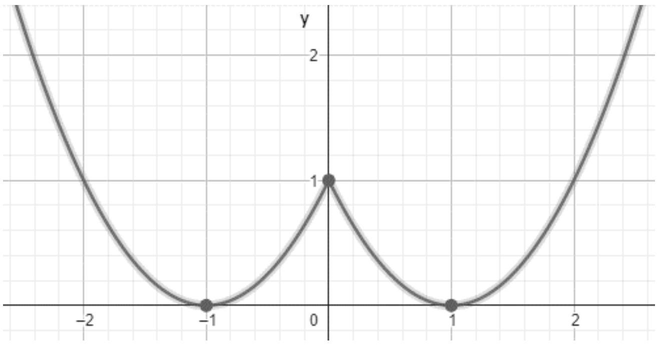

Figura 4. Graficul funcției din exemplul 4

Ex. 5. $y = \frac{x^4 - 1}{|x^2 - 1|}$.

Deoarece $x^2 \neq 1$, atunci domeniul de definiție reprezintă trei intervale: $(-\infty, -1)$ $(-1,1), (1; +\infty)$.

Funcția este pară, prin urmare graficul ei este simetric în raport cu axa ordonatelor.

Dacă $x^2 - 1 > 0$, adică $x < -1$ sau $x > 1$, atunci $y = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} = x^2 + 1$. Deci $y = x^2 + 1$.

Dacă $x^2 - 1 < 0$, adică $-1 < x < 1$, atunci $y = -(x^2 + 1)$. Astfel, în intervalele $(-\infty, -1)$ și $(1,+\infty)$ graficul reprezintă o parțiune a parabolei $y = x^2 + 1$, iar în intervalul $(-1,1)$ o porțiune a parabolei $y = -(x^2 + 1)$. În ambele cazuri punctele cu abscisele -1 și 1 se exclud (figura 5).

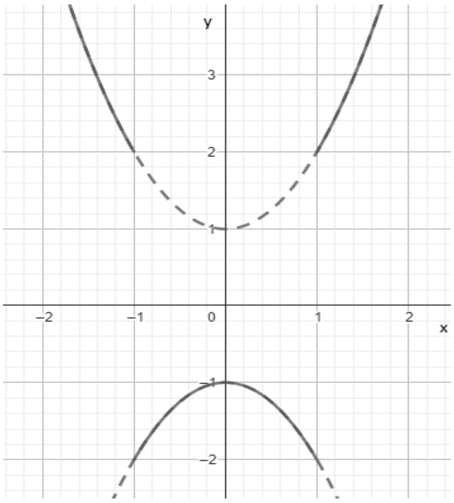

Figura 5. Graficul funcției din exemplul 5

Ex. 6. $y = (1 + |x|)(2 - |x|)$.

Funcția dată este definită pe *R*, pară

$$f(-x) = (1 + |-x|)(2 - |-x|) = (1 + |x|)(2 - |x|) = f(x),$$

deci graficul ei va fi simetric în raport cu axa *Oy*.

Inițial cercetăm și construim graficul acestei funcții în domeniul $x \geq 0$, unde funcția ia forma $y = (1 + x)(2 - x)$.Rădăcinile acestei funcției sunt numerele -1 și 2. Coordonatele vârfului parabolei sunt:

$$x_0 = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}, y_0 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

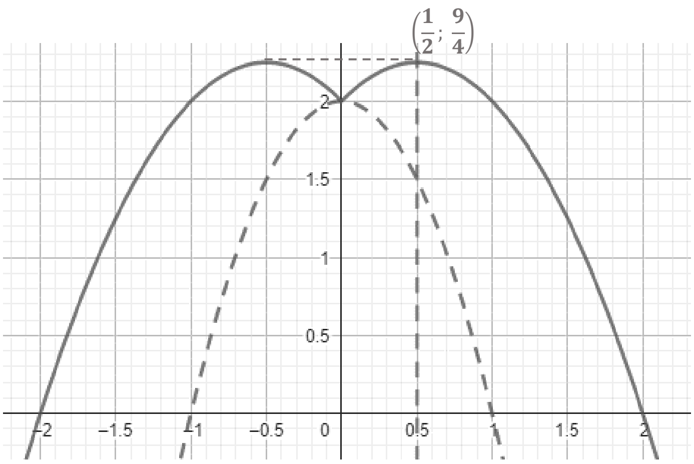

Figura 6. Graficul funcției din exemplul 6

Ținând cont de faptul că funcția dată este pară, trasăm graficul simetric cu axa Oy, a graficului obținut.

Cea mai mare valoare a funcției date este $\frac{9}{4}$, pentru $x = \frac{1}{2}$ și pentru $x = -\frac{1}{2}$. Deci $y_{maximum} = \frac{9}{4}$ (figura 6).

Ex. 7. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Scriem funcția dată astfel

$$y = (x-1)(x^2 - 2x - 2) = (x-1) \cdot \left[x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\right] \cdot \left[x - \left(1 - \sqrt{3}\right)\right].$$

Prin urmare, rădăcinile funcției sunt numerele $1 - \sqrt{3}, 1$ și $1 + \sqrt{3}$.

În intervalele $\left(-\infty, 1 - \sqrt{3}\right)$ și $\left(1, 1 + \sqrt{3}\right)$ obține valori negative, iar în intervalele $\left(1 - \sqrt{3}, 1\right)$ și $\left(1 + \sqrt{3}, +\infty\right)$ valori pozitive.

Pentru a construi mai exact graficul funcției date determinăm punctele de maximum și minimum.

Fie $A(x_0, y_0)$ care aparține graficului funcției date, deci $y_0 = {x_0}^3 - x_0^2 + 2$.

Prin punctul (x_0, y_0) ducem o dreaptă, paralelă axei *Ox*. Această dreaptă poate intersecta graficul încă în două puncte, poate avea cu graficul încă un punct comun (cazul tangentă) sau în genere nu va avea încă puncte comune cu acesta.

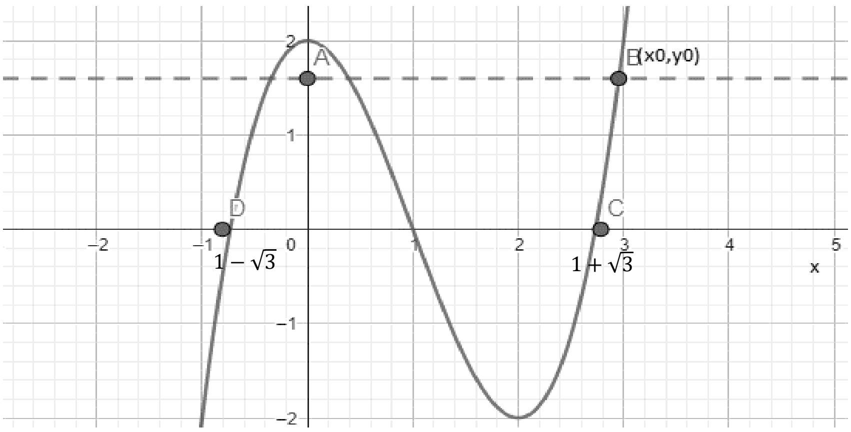

Figura 7. Graficul funcției din exemplul 7

Vom determina acele valori ale lui *x* prin care această dreaptă va intersecta graficul, din ecuația:

$x^3 - 3x^2 + 2 = y_0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = {x_0}^3 - x_0^2 + 2 \ \Leftrightarrow x^3 - x_0^3 - (x^2 - x_0^2) = 0.$

Deoarece determinăm punctele, abscisele cărora sunt diferite de x_0, atunci $x - x_0 \neq 0$ și de aceea ultima ecuație o simplificăm prin $x - x_0$:

$$x^2 + x_0 x + x_0^2 - 3x - 3x_0 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (3 - x_0)x + x_0^2 - 3x_0 = 0,$$

de unde $x_{1,2} = \frac{3 - x_0 \pm \sqrt{-3x_0^2 + 6x_0 + 9}}{2}$.

În punctele de extremă e necesar ca $x_1 = x_2$, și de aceea $-3x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0$, de unde $x_0' = 3, x_0'' = -1$. Deci $x_1 = \frac{3 - x_0'}{2} = \frac{3-3}{2} = 0, x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. Dacă $x = 0$, atunci

$y = 2$, dacă $x = 2$, atunci $y = -2$. Astfel, funcția are maxim egal cu -2, pentru $x = 0$, iar minim egal cu -2, pentru $x = 2$.

Dacă x variază de la -∞ la 0 și de la 2 la +∞ funcția crește, iar când x variază de la 0 până la 2 funcția descrește (figura 7).

Ex. 8. $y = -x^4 + 4x^2$.

Funcția este definită pe toată axa numerică, pară, prin urmare graficul este simetric în raport cu axa ordonatelor.

Scriem funcția cercetată sub forma $y = x^2(4 - x^2) = x^2(2 - x)(2 + x)$. Deci numerele $-2{,}0{,}2$ sunt rădăcinile funcției (0 fiind rădăcină dublă).De aceea punctele -2,0,2 a axei absciselor aparțin graficului.

Fie $-x^4 + 4x^2 = a$ (a număr constant). Ulterior vom determina așa valori ale lui a, încât soluțiile ecuației $x^4 - 4x^2 + a = 0$ să fie multiple. Avem $x = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{4 - a}}.$

Evident că soluțiile vor fi multiple în două cazuri: când $a = 4$ sau când $2 = \sqrt{4 - a},$ adică când $a = 0$.

Astfel, valorile extremale ale funcției sunt numerele 0 și 4. Aceste valori extremale ale funcției corespund valorilor argumentelor 0 și $\pm\sqrt{2}$. Deoarece în vecinătatea punctului 0 (în dreapta și în stânga) funcția obține valori pozitive, atunci 0 este minim local al funcției, și deoarece în vecinătatea punctelor $\pm\sqrt{2}$ (din dreapta și stânga) funcția obține valori mai mici decât 4, atunci numărul 4 reprezintă cea mai mare valoare a funcției (figura 8).

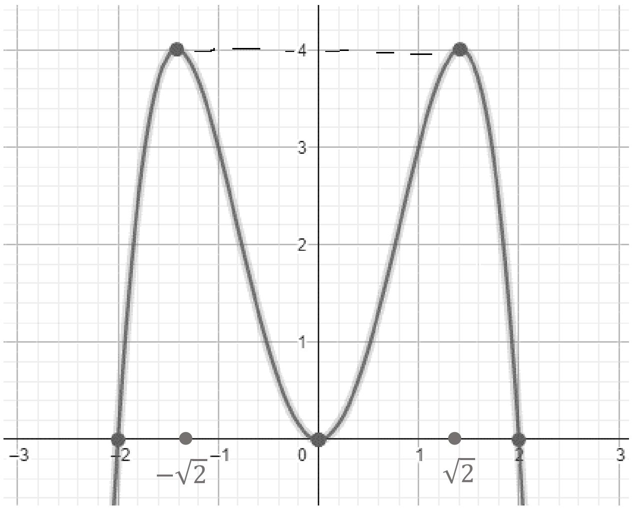

Figura 8. Graficul funcției din exemplul 8

Ex. 9. $y = \frac{1-2x}{x-2}$.

Deoarece $x \neq 2$, atunci funcția este definită pe două intervale: $(-\infty, 2)$ și (2,+∞) și, prin urmare, graficul ei constă din două ramuri:

Avem $y = \frac{1-2x}{x-2} = \frac{1-2x+3-3}{x-2} = \frac{-2(x-2)-3}{x-2} = \frac{3}{2-x} - 2.$

Graficul funcției are 2 asimptote: orizontală $y = -2$ și verticală $x = 2$. Graficul intersectează axa absciselor în punctul $(\frac{1}{2}; 0)$, iar axa ordonatelor în punctul $(0; -\frac{1}{2})$. Astfel construim ramura stângă a graficului deoarece dacă $x \to 2$ (rămânând mai mic ca 2), atunci $y \to +\infty$, iar dacă $x \to -\infty$,atunci $y \to -2$ (rămânând mai mare decât -2).

Ramura dreaptă a graficului o construim simetric în raport cu punctul de intersecție a asimptotelor $x = 2$ și $y = -2$ (figura 9).

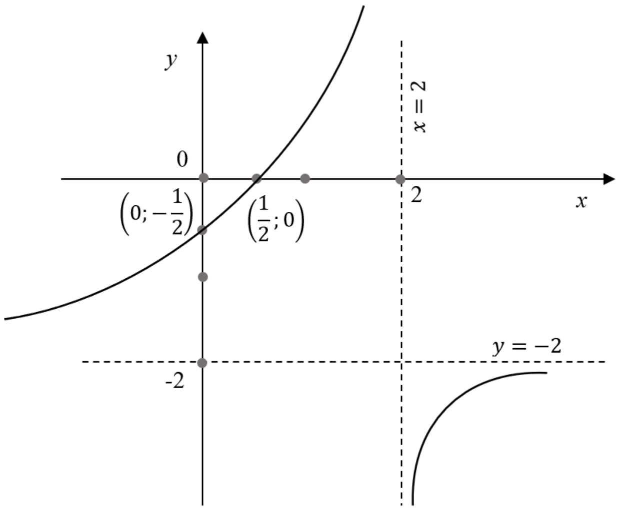

Figura 9. Graficul funcției din exemplul 9

Ex. 10. $y = \frac{1}{\left|\frac{x-1}{x}\right|}$.

Funcția dată este definită pe toată axa numerică, cu excepția $x = 0 \; și \; x = 1$.

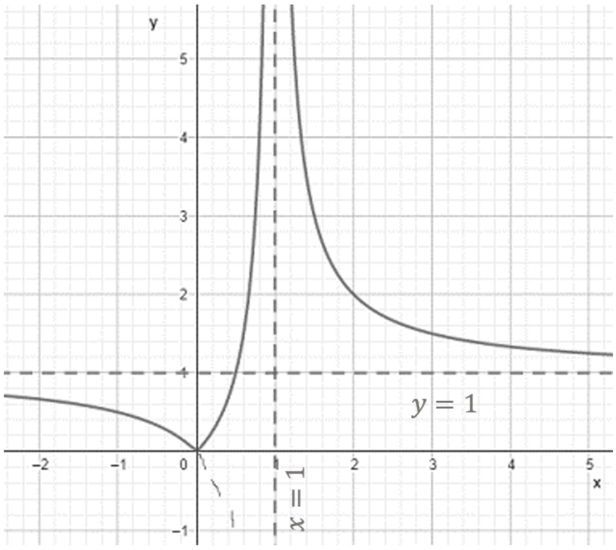

Figura 10. Graficul funcției din exemplul 10

Scriem funcția dată astfel $y = \left|\frac{x}{x-1}\right| = \left|1 + \frac{1}{x-1}\right|$. Inițial construim graficul funcției $y = \frac{1}{x}$, apoi îl deplăsăm cu ± 1 la dreapta pe axa absciselor, ulterior în sus cu ± 1. Pentru a obține graficul funcției cercetate considerăm aceea parte a graficului, ordonatele căreia sunt pozitive, iar aceea porțiune, ordonatele căreia sunt negative, o reflectăm simetric în raport cu axa absciselor (figura 10).

Când $x \to 1$ din dreapta și stânga $y \to +\infty$, atunci dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală bilaterală. Când $x \to \pm\infty$ funcția $y \to 1$, deci dreapta $y = 1$ este asimptotă bilaterală orizontală.

Ex. 11. $y = \frac{x^2}{x-2}$.

Domeniul de definiție a acestei funcției constă din două intervale: $(-\infty, 2)$ și $(2, +\infty)$.

Dacă $x \to 2$ din dreapta, atunci $x - 2 \to 0$ și $x - 2 > 0$, iar $x^2 \to 4$, de aceea y$\to +\infty$.

Dacă $x \to$2 din stânga, atunci $x - 2 \to 0$ și $x - 2 < 0$, iar $x^2 \to 4$, de aceea y$\to -\infty$.

Astfel dreapta $x = 2$ este asimptotă bilaterală verticală a graficului.

Deoarece $y = 2 + x + \frac{4}{x-2}$, atunci y – x – 2 →0 și de aceea dreapta $y = x + 2$ este asimptotă oblică a graficului funcției.

Să calculăm valorile extremale ale funcției.

Fie $y = \frac{x^2}{x-2} = a$ (a - constant).

Pentru aceasta calculăm așa valoare a lui a, pentru ca ecuația (1) $\frac{x^2}{x-2} = a$ să aibă soluții multiple. Ecuația (1) o scriem astfel: $x^2 - ax + 2a = 0$. (2)

Soluțiile ecuației (2) vor fi multiple dacă discriminantul $a^2 - 8x = 0$, de unde $a_1 = 0, a_2 = 8$. Înlocuind valorile lui a în ecuația (2), găsim $x_1 = 0, x_2 = 4$. Astfel, pentru $x = 0$ funcția data are maxim local egal cu zero, iar pentru $x = 4$ – minim local, egal cu 8.

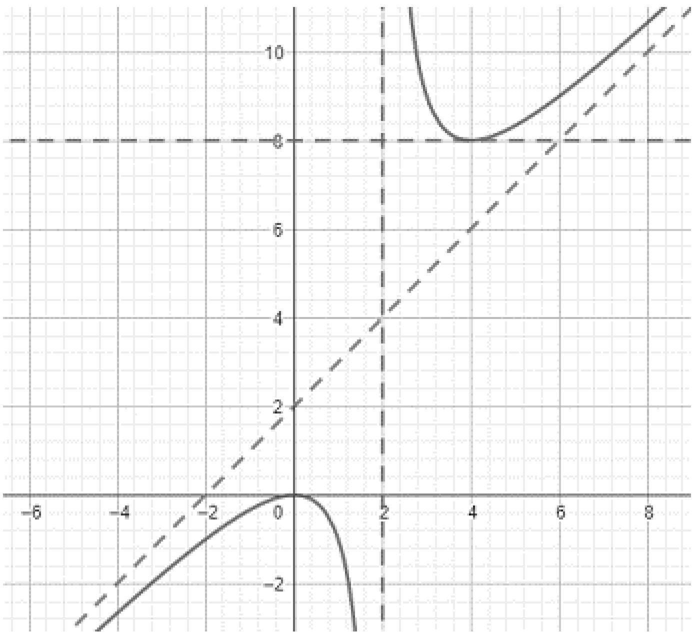

Figura 11. Graficul funcției din exemplul 11

Ex.12 $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

Determinăm domeniul de definiție a funcției date din condiția:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x \geq 1 \end{array}\right. \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Astfel, domeniul de definiție reprezintă intervalele $-\infty < x < -1$ și $1 \leq x < \infty$. Dreapta $x = -1$ este asimptotă verticală a graficului funcției.

Scriem funcția dată sub forma $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{1 - \frac{2}{x+1}}$. În intervalul $1 \leq x < \infty$ expresia $\frac{2}{x+1}$ descrește de la 1 până la 0 și, prin urmare, *y* crește de la 0 la 1. Astfel, dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală.

În intervalul -∞ $< x < -1$ expresia $\frac{2}{x+1}$ descrește de la 0 la -∞, prin urmare *y* crește de la 1 la +∞.

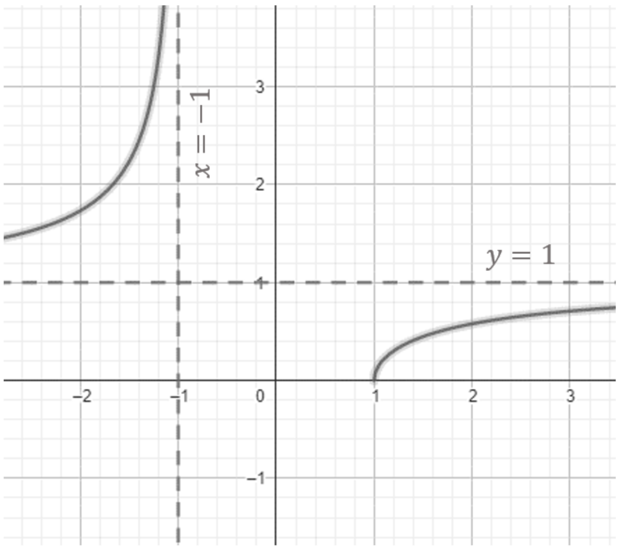

Figura 12. Graficul funcției din exemplul 12

Ex. 13. $y = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}).$

Deoarece expresiile de sub radicali obțin valori pozitive pentru orice valori ale argumentului *x*, rezultă că funcția dată este definită pe toată axa numerică. Dacă $x = 0$, atunci $y = 1$, prin urmare graficul trece prin punctul (0; 1).

Funcția data este pară, deoarece:

$$f(-x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(-x)^2 - x + 1} + \sqrt{(-x)^2 + x + 1}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) = f(x),$$

graficul ei va fi simetric în raport cu axa *Oy*. De aceea este suficient să trasăm partea dreaptă a graficului (pentru $x \geq 0$), iar partea stânga simetricul părții drepte în raport cu axa *Oy*.

Dacă $x \neq 0$ $(x > 0)$, atunci:

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}\right) = \frac{x}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right).$$

Este evident, că dacă $x \to +\infty$, atunci $\frac{y}{x} \to 1$, adică primul coeficient al ecuației asimptotei $y = ax + b$ este egal cu 1.

Pentru a-l determina *b* considerăm diferența:

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}}{2} - x = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) + \left(\sqrt{x^2-x+1} - 2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} - \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} - \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}\right) \to 0 \text{ pentru } x \to +\infty.$$

Prin urmare, $b = 0$. Deci, ecuația asimptotei ramurii din dreapta este $y = x$ și, deaceea, ecuația asimptotei ramurii din stânga este $y = -x$. Deci dreapta $y = x$ este asimptota oblică a părții din dreapta a graficului (asimptota părții stângi a graficului este $y = -x$). Funcția dată obține valoarea minimă $y_{min} = 1$ pentru $x = 0$ (figura 13).

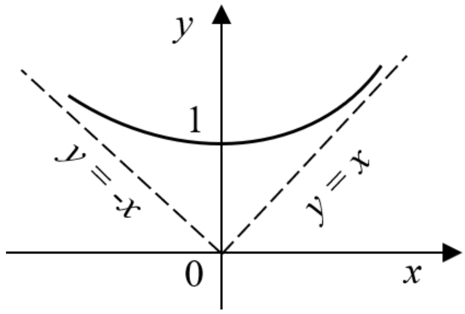

Figura 13. Graficul funcției din exemplul 13

Ex. 14. $y = 2^x + (\frac{1}{2})^x$.

Funcția dată este definită pe *R*, pară, întradevăr $f(-x) = 2^{-x} + (\frac{1}{2})^{-x} = (\frac{1}{2})^x + 2^x = f(x)$, de aceea graficul ei este simetric în raport cu axa *Oy*.

Se știe că $a + \frac{1}{a} \geq 2$, dacă $a > 0$. Deoarece $2^x > 0$ și $(\frac{1}{2})^x > 0$ pentru orice *x*, atunci $2^x + (\frac{1}{2})^x \geq 2$. Astfel funcția dată obține valoarea minimă, egală cu 2. Când *x* variază de la -∞ până la 0, funcția descrește de la +∞ la 2, iar când *x* variază de la 0 până la +∞, funcția crește de la 2 până la +∞.

Procedăm în felul următor: trasăm graficele funcțiilor $y = 2^x$și $y = (\frac{1}{2})^x$ (prin linii punctate) iar apoi adunăm ordonatele punctelor acestor grafice pentru aceeași valori ale argumentului *x* (figura 14).

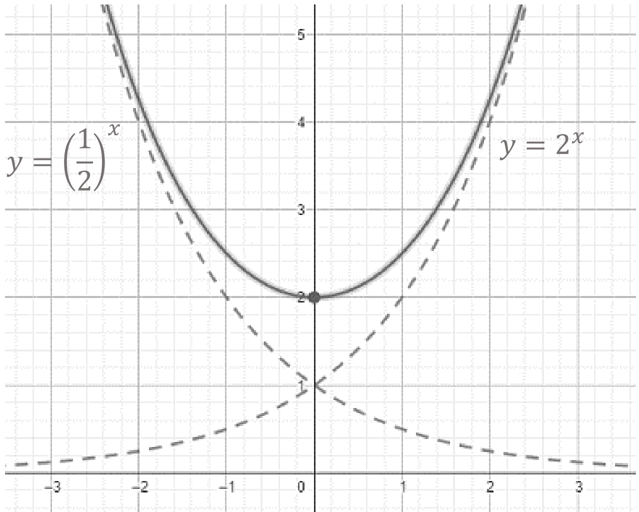

Figura 14. Graficul funcției din exemplul 14

Ex. 15. $y = \frac{2^{2x}-4}{|2^x-2|}$.

Domeniul de definiție a acestei funcții îl determinăm din relația $2^x - 2 \neq 0$, de unde x$\neq$ 1. Deci funcția este definită pe două intervale -∞ $<$ $x < 1$ și 1$<$ $x < +\infty$.

Dacă $2^x - 2 > 0$, adică $x > 1$, atunci funcția ia forma $y = 2^x + 2$.

Dacă $2^x - 2 < 0$, adică $x < 1$, atunci funcția ia forma $y = -2^x - 2$.

Ramura $y = 2^x + 2$ (pentru $x > 1$) reprezintă o porțiune a graficului $y = 2^x + 2$ (pe toată axa numerică), având asimptotă dreaptă $y = 2$.

Ramura $y = -2^x - 2$ (pentru $x < 1$) reprezintă o porțiune a graficului $y = -2^x - 2$ (pe toată axa numerică), având asimptotă dreaptă $y = -2$. Această ultimă dreaptă – asimptotă (unică) a graficului funcției cercetate (figura 15).

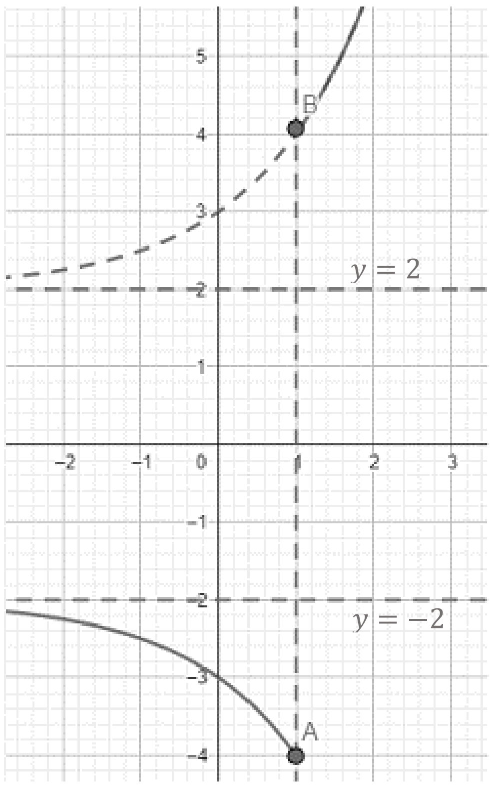

Figura 15. Graficul funcției din exemplul 15

Ex. 16. $y = log_2|log_2(x + 1)|$.

Funcția este definită, dacă $x + 1 > 0$ și $x \neq 0$, adică domeniul de definiție a funcției cercetate reprezintă două intervale: $(-1,0)$ și $(0, +\infty)$ și de aceea graficul funcției constă din două ramuri.

Funcția $y = 0$, dacă $|log_2(x+1)| = 1$, adică dacă $log_2(x+1) = 1$ sau $log_2(x+1) = -1$. Aceste două egalități au loc pentru $x = 1$ sau $x = -\frac{1}{2}$. Astfel, graficul funcției intersectează axa absciselor în punctele - $\frac{1}{2}$ și 1.

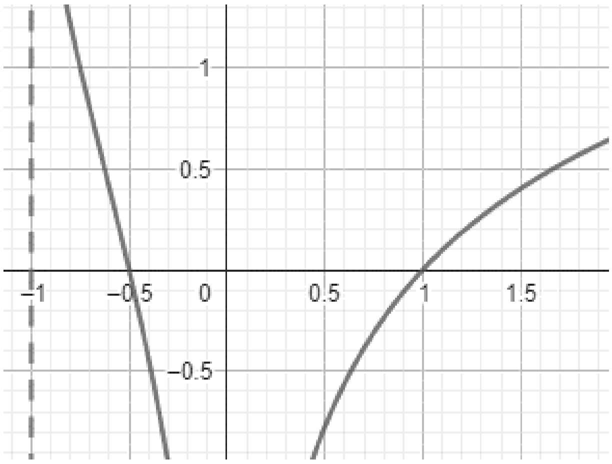

Figura 16. Graficul funcției din exemplul 16

Dacă x →-1 din dreapta, atunci $|log_2(x+1)| \to +\infty$ și, de aceea și funcția $y \to +\infty$.

Dacă x →0 atât din stânga cât și din dreapta, atunci $|log_2(x+1)| \to 0$, și de aceea și funcția cercetată y→ $-\infty$.

Din cele expuse mai sus rezultă că dreapta $x = -1$ și axa ordonatelor sunt asimptotele graficului funcției, iar axa ordonatelor – bilaterală.

În sfârșit, observăm, că în intervalul $(0, +\infty)$ funcția crește de la -∞ până la +∞ (figura 16).

Ex. 17. $y = sinx + cosx$.

Funcția este definită pe întreaga axă numerică:

$$y = sinx + cosx = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}cosx\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Deoarece $|sin\,(x + \frac{\pi}{4})| \leq 1$, atunci $\sqrt{2}$ este maximul funcției, iar $-\sqrt{2}$ minimul funcției. Funcția are perioada $T = 2\,\pi$. Zerourile funcției sunt situate în punctele $x = \pi k - \frac{\pi}{4}$. Graficul funcției se obține prin extensiunea sinusoidei $y = sinx$ de $\sqrt{2}$ ori dea lungul axei ordonatelor și deplasarea în stânga cu $\frac{\pi}{4}$.

În intervalele $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2n\,\pi, \frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$ funcția crește, iar în intervalele:

$(\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi)$ funcția descrește. Funcția are maximum $(\sqrt{2})$ pentru:

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, iar minimum (-$\sqrt{2}$) pentru $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ (figura 17).

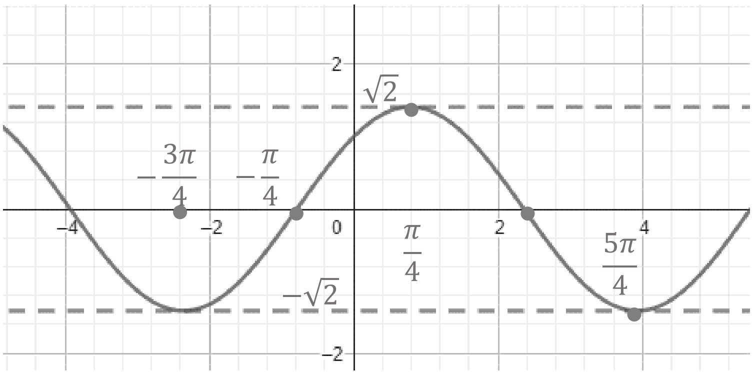

Figura 17. Graficul funcției din exemplul 17

Ex. 18. $y = \frac{1+cosx}{3-sinx}$.

Funcția dată este periodică cu perioada 2π de aceea este suficient de a o examina pe segmental [-π,π]. Inițial cercetăm funcția pe intervalul $(-\pi, \pi)$. Deoarece:

$sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{y}{2}} \cdot \cos x == \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, atunci $y = \frac{2}{3-2tg\frac{x}{2}+3tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(tg\frac{x}{2}-\frac{1}{3})^2+\frac{8}{9}}$.

De aici rezultă, că numitorul obține minimum dacă $tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, adică $\frac{x}{2} = arctg\,\frac{1}{3}$, și prin urmare, funcția data obține maximum egal cu $\frac{3}{4}$ pentru $x = 2\ arctg\ \frac{1}{3}$.

Pentru $x \pm \pi$ funcția $y = 0$. Astfel, cu creșterea lui *x* la - π până la $2arctg\,\frac{1}{3}$ funcția crește de la 0 până la $\frac{3}{4}$, iar prin variația lui *x* este la $2arctg\,\frac{1}{3}$ până la π funcția descrește de la $\frac{3}{4}$ până la 0 (figura 18).

Să considerăm câteva puncte ale graficului pe segmentul $[-\pi; \pi]$: dacă $x = 0, \frac{\pi}{2}$ și $-\frac{\pi}{2}$, atunci valorele lui *y* vor fi respectiv egale cu $\frac{2}{3}$,$\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{4}$.

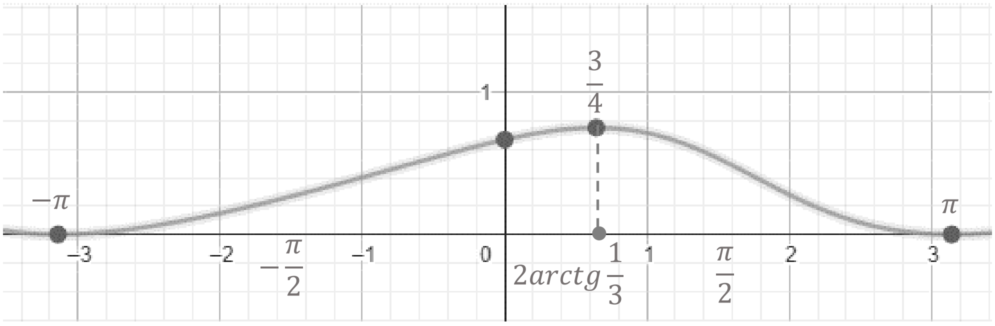

Figura 18. Graficul funcției din exemplul 18

Ex. 19. $y = arctg\ x + arctg\ \frac{1}{x}$.

Funcția cercetată există pentru toate valorile lui *x*, cu excepția $x = 0$, adică funcția este definită în două intervale: (-∞;0) și (0;+∞).

Deoarece $arctg(-x) + arctg\left(\frac{1}{-x}\right) = -(arctgx + arc\ tg\ \frac{1}{x}) = -y,$ atunci funcția este impară.

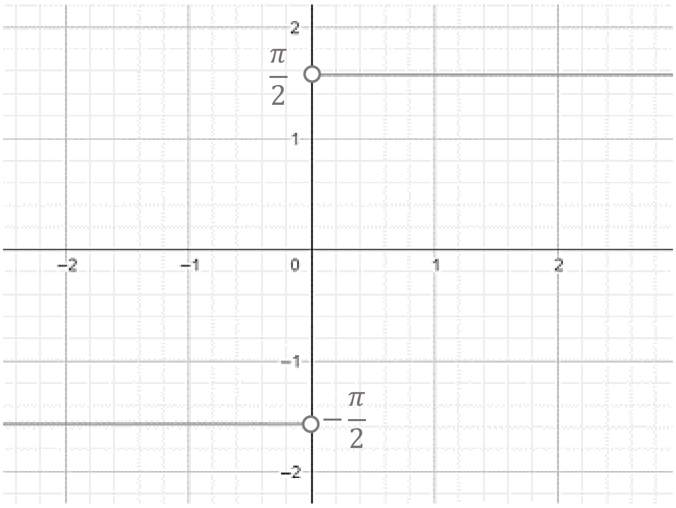

Figura 19. Graficul funcției din exemplul 19

Cercetăm funcția în intervalul (0,+ ∞), adică pentru $x > 0$. În acest caz $arctg\frac{1}{x} = arctg\ x$. Astfel, pentru $x > 0$, avem: $y = arctgx + arctg\frac{1}{x} = arctgx + arcctg\ x = \frac{\pi}{2}$.

Deci graficul funcției pentru $x > 0$ este o porțiune a dreptei $y = \frac{\pi}{2}$, situată la dreapta axei ordonatelor, în timp ce punctul $(0, \frac{\pi}{2})$ nu aparține graficului.

Fiind funcție impară partea a două a graficului reprezintă o porțiune a dreptei $y = -\frac{\pi}{2}$, situată la stânga de axa ordonatelor, în timp ce punctul $(0,- \frac{\pi}{2})$ nu aparține graficului (figura 19).

Ex. 20. $y = arccos\ \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Pentru ca funcția să aibă sens, este necesar ca $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leq 1$, relație justă pentru toate valorile lui x, prin urmare funcția cercetată este definită pentru toate numerele reale.

Funcția dată este pară, de aceea o vom cerceta inițial numai pentru $x \geq 0$.

Din egalitatea dată rezultă: $cosy = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Pentru a fi mai comod calculăm valorile $tg\frac{y}{2}:\ tg\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-cosy}{1+cosy}} = \sqrt{x^2} = x$ (1).

Deoarece $0 \leq y < \pi$, $0 \leq \frac{y}{2} < \frac{\pi}{2}$, atunci $tg\frac{y}{2} \geq 0$. De aceea în egalitatea (1) pe lângă radical considerăm simbolul plus.

Din (1) obținem $\frac{y}{2} = arctg\ x$ sau $y = 2\ arctgx$. Astfel graficul funcției date (figura 20) pe jumătatea intervalului $0 \leq x < +\infty$ îl obținem din graficul $y = arctgx$ dublând ordonatele ultimului.

Partea stângă a graficului este simetrică cu cea dreaptă în raport cu axa ordonatelor.

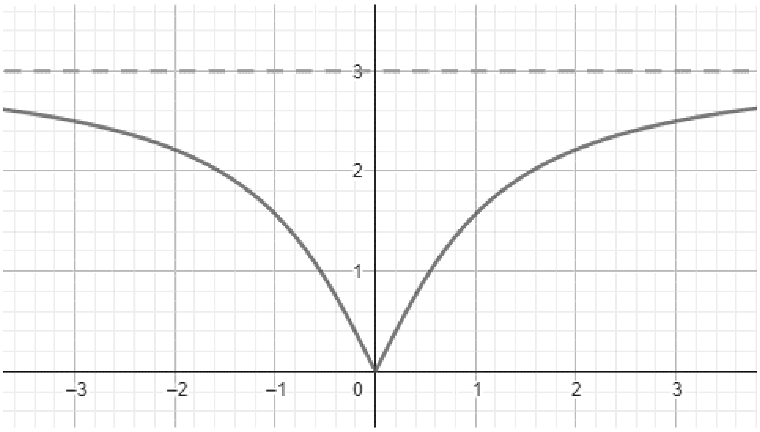

Figura 20. Graficul funcției din exemplul 20

Ex. 21. $y = arctgx + arctg\frac{1-x}{1+x}$.

Domeniul de definiție îl determinăm din inegalitatea x+1≠0. Deci funcția dată este definită pe două intervale: $(-\infty; -1)$ și $(-1; +\infty)$.

Calculăm tangența de la ambii membri ai ecuației date și obținem:

$$tgy = tg\left(arctg\,x + arctg\,\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{tg(arctgx) + \left(arctg\frac{1-x}{1+x}\right)}{1 - tg(arctgx)\cdot tg\left(arctg\frac{1-x}{1+x}\right)} =$$

$$= \frac{x+\frac{1-x}{1+x}}{1-x\cdot\frac{1-x}{1+x}} = \frac{x+x^2+1-x}{1+x-x+x^2} = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1.$$

De aici rezultă, că $y = \frac{\pi}{4} + \pi k$ (1). Deoarece conform definiției $-\frac{\pi}{2} < arctgm < \frac{\pi}{2}$, atunci $-\frac{\pi}{2} < arctgx < \frac{\pi}{2}$ și $-\frac{\pi}{2} < arctg\frac{1-x}{1+x} < \frac{\pi}{2}$. Adunând membru cu membru aceste două inegalități, obținem $-\pi < arctg\,x + arctg\frac{1-x}{1+x} < \pi$, adică $-\pi < y < \pi$. De aici conchidem, că în (1) k poate obține valori 0 sau -1. Prin urmare, $y = \frac{\pi}{4}$ sau $y = -\frac{3\pi}{4}$. Rămâne să determinăm, pentru care valori ale argumentului *x* funcția *y* este egală cu $\frac{\pi}{4}$, iar pentru care ea obține $-\frac{3\pi}{4}$.

1) Dacă $x < -1$, atunci $\frac{1-x}{1+x} < 0$ și, de aceea, $-\frac{\pi}{2} < arctgx < 0$ și

$$-\frac{\pi}{2} < arctg\,\frac{1-x}{1+x} < 0.$$

Adunând termen cu termen aceste inegalități, obținem $-\pi < y < 0$. Acum este clar, că pentru $x < -1$ funcția $y = -\frac{3\pi}{4}$, iar graficul ei reprezintă o porțiune a dreptei $y = -\frac{3\pi}{4}$, situată mai la stânga de dreapta $x = -1$, în timp ce punctul $(-1, -\frac{3\pi}{4})$ nu aparține graficului.

2) Dacă $-1 < x < 0$, atunci $arctgx < 0$, iar $arctg\,\frac{1-x}{1+x} > 0$ și, prin urmare, suma lor (*y*) este cuprinsă între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$ și, de aceea în intervalul (-1,0) funcția $y = \frac{\pi}{4}$.

3) Dacă $0 \leq x \leq 1$, atunci $arctgx \geq 0$ și $arctg\frac{1-x}{1+x} > 0$ și, prin urmare, suma lor (y) este pozitivă și, de aceea pe, intervalul (-1;0) funcția $y = \frac{\pi}{4}$.

4) Dacă $1 < x < +\infty$, atunci $arctgx > 0$, iar $arctg\frac{1-x}{1+x} < 0$, prin urmare, suma lor (y) este cuprinsă între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$ și, de aceea, în intervalul (1,+∞) funcția $y = \frac{\pi}{4}$.

Deci, dacă $-1 < x < +\infty$, atunci $y = \frac{\pi}{4}$, iar graficul ei este o porțiune a dreptei $y = \frac{\pi}{4}$, situată la dreapta de $x = -1$ (figura 21).

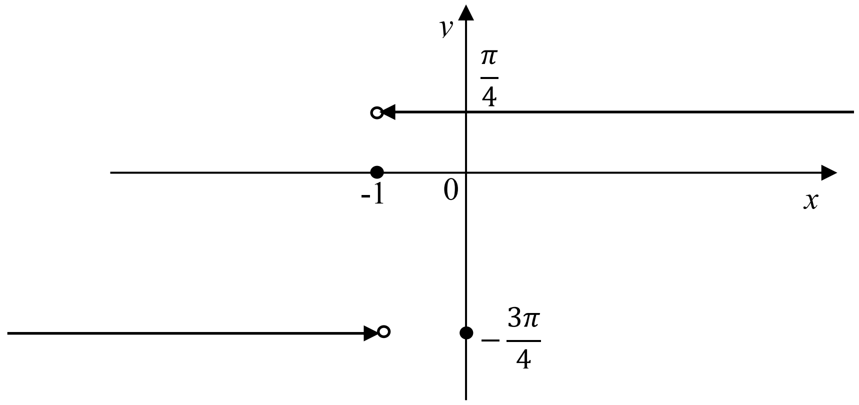

Figura 21. Graficul funcției din exemplul 21

Metodologia învățării prin cercetare îl va ajuta pe elev să înțeleagă știința ca un proces activ de elaborare de noi cunoștințe.

Izomorfismul metodelor pedagogice și al celor științifice va contribui la apropierea comportamentului intelectual al timpurilor de modelul celui implicat în actul autentic al cunoașterii științifice.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. CERGHIT, I. *Metode de învățământ*. Iași: Polirom, 2006. 320 p. ISBN 973-46-0175-X.
2. ПОТАПОВ, М.К.; АЛЕКСАНДРОВ, В.В.; ПАСИЧЕНКО. П.И. *Алгебра и анализ элементарных функций*. Москва: Наука, 1981. 560 p.
3. СИВАШИНСКИЙ, И. Х. *Элементарные функции и графики*. Москва: Наука, 1965. 243 p.
4. ЗАЙЦЕВ, В.В.; РЫЖКОВ, В. В.; СКАНАВИ, М.И. *Элементарная Математика*. Москва: Наука, 1974. 592 p.