

## APLICAREA METODEI DESCOPERIRII ÎN STUDIUL MATEMATICII ÎN LICEU

Ion ACHIRI, dr., conf. univ.

<https://orcid.org/0000-0002-8874-2329>

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”, Chișinău

Simona Maria BUCURENCIU, drd.

<https://orcid.org/0000-0002-5201-0652>

Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”, Chișinău

**Rezumat.** Articolul vizează problema aplicării metodei descoperirii în studiul matematicii la nivel liceal din perspectiva formării competențelor specifice matematicii. Este prezentat un exemplu de predare-învățare la clasă în cadrul studierii noțiunii de permutări în liceu, folosindu-se metoda descoperirii și impactul avut asupra elevilor. Se trage concluzia că metoda descoperirii contribuie eficient atât la formarea competențelor școlare, cât și la majorarea interesului liceenilor pentru studierea matematicii.

**Cuvinte cheie:** matematica, liceu, permutări, competențe, competențe specifice, metoda descoperirii, predare-învățare.

## APPLICATION OF THE DISCOVERY METHOD IN THE STUDY OF MATHEMATICS IN HIGH SCHOOL

**Abstract.** The article deals with the problem of applying the discovery method in the study of mathematics at the high school level from the perspective of the formation of specific mathematics competences. An example of classroom teaching-learning is presented in the framework of studying the notion of permutations in high school, using the discovery method and the impact it had on students. It is concluded that the discovery method effectively contributes both to the formation of school competences and to increasing the interest of high school students in studying mathematics.

**Key words:** mathematics, high school, permutations, competences, specific competences, discovery method, teaching-learning.

Metoda descoperirii reprezintă o metodă de predare a matematicii ce dezvoltă creativitatea și originalitatea elevilor. Partea ce mai dificilă în aplicarea metodei descoperirii o reprezintă alegerea problemei sau a problemelor ce vor fi prezentate elevilor. Problema trebuie să fie aleasă în funcție de abilitățile elevilor, precum și de nivelul acestora de dezvoltare cognitivă. Problema aleasă trebuie să poată fi rezolvată de majoritatea elevilor clasei, aceștia folosindu-se de noțiuni anterior studiate și cimentate în memoria lor, iar, rezolvând-o, elevii trebuie să descopere noțiuni noi, concepte noi, reguli noi, proprietăți noi etc. Desigur, aceste noțiuni și concepte sunt noi pentru elevi, dar reprezintă rezultate bine-cunoscute din domeniul matematicii.

Ca parte a pregătirii lecției, profesorul trebuie să anticipeze eventualele greșeli pe care elevii le pot face, eventualele capcane ale gândirii în care pot cădea, eventualele blocaje în rezolvarea problemei. Pentru aceasta profesorul trebuie să planifice cum va ajuta elevii prin indicii care să îi apropie pe ei de rezultat, indiciile fiind sub formă de

întrebări evocatoare, ajutătoare, care să sprijine rezolvarea, să deblocheze, să îndrepte spre răspuns.

Dacă profesorul doar supraveghează elevii în îndeplinirea sarcinii, aceștia depunând eforturi singuri, putem spune că descoperirea elevilor a fost *independentă*, iar dacă profesorul a ajutat în mod repetat elevii pentru susținerea realizării sarcinii, prin întrebări sau sugestii, atunci vom spune că descoperirea elevilor a fost *dependentă*.

Prin „descoperirea didactică”, elevii au posibilitatea de a își descoperi abilitățile matematice, memoria, percepția, limbajul, gândirea matematică [1].

Elevii sunt implicați activ în desfășurarea lecțiilor, atunci când este folosită metoda descoperirii în predare, își dezvoltă originalitatea, priceperile, creativitatea. Explorând, reconstruind, recreând, elevii descoperă nu doar cunoștințe noi pentru ei, dar și metodologia de a studia/dobândi aceste cunoștințe. Formulele, simbolurile, operațiile, conceptele, proprietățile nu mai sunt doar niște produse prezentate pe tablă de profesor. De data aceasta elevul învață din propria lui învățare, din propriile greșeli, din propriile experiențe [2].

După ce profesorul a ales noțiunea matematică, proprietatea, formula etc. ce trebuie studiată/descoperită, a determinat problema sau problemele cu ajutorul cărora va introduce noțiunea matematică, proprietatea, formula etc., a întrevăzut eventualele dificultăți pe care le-ar putea întâmpina elevii pe parcursul descoperirii noțiunii, proprietății, algoritmului, formulei etc., a formulat diverse întrebări/sarcini prin care să îi ajute pe elevi să le depășească, urmează punerea în practică a tuturor acestor proiectări.

Elevii, prin parcurgerea sarcinilor ce le au de efectuat, trebuie să observe ceea ce se repetă, trebuie să sesizeze regula și să ajungă la **generalizare**. Profesorul nu trebuie să ofere răspunsul, ci, prin întrebări bine concepute, sarcini bine selectate, trebuie să ghideze elevii către răspuns, să îi ajute să realizeze singuri sau cu cât mai puțin ajutor descoperirea noțiunii, a conceptului matematic, a proprietății, a algoritmului, a formulei etc. Cunoscând bine colectivul de elevi, cadrul didactic poate prevedea de câte probleme este nevoie a fi prezentate elevilor, câte sarcini trebuie să rezolve aceștia până când descoperă regula, formula, algoritmul etc. Este evident faptul că prin această metodă de predare, profesorul împreună cu elevii vor avea nevoie de mai mult timp decât în predarea tradițională pentru a atinge obiectivele unei lecții, de aceea se pune problema de cât timp se poate dispune pentru aplicarea eficientă a metodei descoperirii în procesul studierii matematicii [3].

Metoda descoperirii a apărut din nevoia de a se schimba accentul în procesul educațional de la profesor către elevi. Nu mai este de actualitate ca profesorul să fie cel care deține toate informațiile și singurul care le deține, acesta reprezentând sursa tuturor cunoștințelor. Folosind această metodă de predare-învățare, atenția se orientează către

elevi, aceștia devenind cei mai importanți, aceștia devenind sursa de informații, sursa propriei lor învățări, iar profesorul are rolul de ghid al învățării.

Prin aplicarea susținută a metodei descoperirii, se urmărește formarea competențelor specifice matematicii, mai exact ea contribuie la dezvoltarea capacităților/abilităților elevilor de a gândi critic, de a evalua informații oferite, inclusiv, de lumea înconjurătoare și de a acționa în urma propriilor reflexii, corelând informații și cunoștințe din diverse domenii.

Pentru formarea unei competențe este necesar ca elevul:

- să stăpânească un sistem de *cunoștințe fundamentale* în funcție de problema pe care va trebui să o rezolve;
- să posede deprinderi și capacități/abilități pe care să le utilizeze/să le aplice conștient și logic în situații simple/standard, realizând astfel *funcționalitatea cunoștințelor* obținute;
- să rezolve diferite situații-problemă, conștientizând cunoștințele funcționale;
- să rezolve probleme, inclusiv din viața cotidiană, manifestând comportamente conform achizițiilor finale, adică valorificând *competența* formată [8].

Profesorul de matematică va ține cont de faptul că, conform definiției, ***competența școlară reprezintă un sistem integrat de cunoștințe, abilități, atitudini și valori dobândite, formate și dezvoltate prin învățare, a căror mobilizare permite identificarea și rezolvarea diferitor probleme în diverse contexte și situații*** [8].

Menționăm, că există o diferență privind terminologia, referitoare la competențe, utilizată în România și Republica Moldova. În România finalitățile privind studierea disciplinei Matematica în școală sunt numite ***competențe generale***, iar în Republica Moldova - ***competențe specifice*** disciplinei Matematica.

Evidențiem competențele specifice ale disciplinei Matematica și competențele generale, specifice liceului, care eficient pot fi formate și dezvoltate prin aplicarea metodei descoperirii. **Competențele generale** corespunzătoare programelor școlare de matematică în vigoare în România, atât pentru ciclul inferior al liceului (clasele a IX-a și a X-a), precum și pentru cel superior (clasele a XI-a și a XII-a), care sunt cel mai des formate prin aplicarea metodei descoperirii sunt următoarele:

1. *Identificarea unor date și relații matematice și corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite*

4. *Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situații concrete și a algoritmilor de prelucrare a acestora*

6. *Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoștințelor din diferite domenii* [4, 5, 6, 7].

**Competențele specifice** disciplinei Matematică, corespunzătoare curriculumului școlar în vigoare în Republica Moldova pentru liceu, și care sunt cel mai des formate prin aplicarea metodei descoperirii sunt următoarele:

**a) profilul real:**

2. *Utilizarea conceptelor matematice, a metodelor, algoritmilor, proprietăților, teoremelor studiate în contexte variate de aplicare, recurgând la concepte și metode matematice în abordarea unor situații cotidiene și/sau pentru rezolvarea unor probleme din diverse domenii.*
4. *Analiza rezolvării unei probleme, a unei situații-problemă în contextul corectitudinii, al simplității, al clarității și al semnificației rezultatelor, dezvoltând spiritul obiectivității și al imparțialității.*
5. *Extrapolarea achizițiilor matematice dobândite pentru a identifica și a explica procese, fenomene din diverse domenii, utilizând concepte și metode matematice în abordarea diverselor situații.*
7. *Justificarea unui demers/rezultat matematic, recurgând la argumentări, dovedind tenacitate și perseverență.*

**b) profilul umanist, arte și sport:**

2. *Exprimarea în limbaj matematic a unui demers, a unei situații sau soluții, formulând clar și concis enunțul.*
4. *Investigarea seturilor de date, folosind instrumente, inclusiv digitale, și modele matematice, pentru a studia/explica relații și procese, manifestând perseverență și spirit analitic.*
6. *Extrapolarea achizițiilor matematice pentru a identifica și a explica procese, fenomene din diverse domenii, utilizând concepte și metode matematice în abordarea diverselor situații.*
7. *Justificarea unui demers/rezultat matematic, recurgând la argumentări, susținând propriile idei și opinii [8].*

După cum se poate observa, tratarea competenței școlare este ușor diferită în Republica Moldova de cea din România, însă ambele urmăresc aceeași idee principală, aceea de a pregăti elevul pe parcursul liceului cu cunoștințe de bază din diverse domenii pentru a se putea adapta vieții, a putea evolua, a avea o atitudine constructivă, a putea evalua și rezolva probleme din viața reală.

În aplicarea metodei descoperirii se pornește, de regulă, de la o problemă din viața reală. Analizând problema, extrăgând informații din enunț, realizând legături între sarcina actuală și alte noțiuni anterior dobândite, elevii își dezvoltă abilitățile de identificare a unor date și relații matematice și corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite, în contexte variate, formând *Competența generală 1*, respectiv *Competențele specifice 2 și 7* (profilul real și profilul umanist, arte, sport).

Analizând și interpretând caracteristicile matematice ale unei situații, punând enunțul în termeni matematici, elevii își dezvoltă abilități de investigare și rezolvare a unei probleme și de a sintetiza un răspuns clar și corect, formând *Competența generală 4*, respectiv *Competențele specifice 4 și 7* (profilul real).

Pe parcursul derulării orei, elevii împreună cu profesorul, pornind de la problema luată din viața reală descoperă noțiuni matematice, notații și simboluri noi, concepte matematice generale pe care să le poată folosi în rezolvarea următoarelor probleme dar și în diverse alte situații din viața reală, formând *Competența generală 6*, respectiv *Competențele specifice 5 și 7* (profilul real) și *Competențele specifice 6 și 7* (profilul umanist, arte, sport).

Pentru exemplificare prezentăm aplicarea metodei descoperirii în cadrul studierii **permutărilor** în liceu. După parcurgerea pașilor inițiali, verificarea prezenței, asigurarea condițiilor necesare desfășurării orei, asigurarea climatului de învățare, lecția va începe cu prezentarea următoarei secțiuni dintr-un articol de ziar:



The image shows a screenshot of a news article from the Daily Record website. The article is titled "Couple name all 11 children with names using the same four letters - and number 12 is on the way". The text describes how a couple, Gwenny Blanckaert and Marino Vaneeno, have named their 11 children using only the letters A, E, L, and X. They are also expecting a 12th child, a boy, in April 2022.

**Figura 1. Secvență din articolul de ziar**

Articolul a apărut în ziarul *Daily Record* (<https://dailyrecord.co.uk>) la data de 27.10.2021. Ziarul nu este o publicație matematică, nici nu intenționează, dar problema pe care o pune are rezolvare matematică:

*Un cuplu belgian are unsprezece copii, fiecare copil are numele format din aceleași patru litere, A, X, E, L, care apar o singură dată în fiecare nume, în ordine diferită. La momentul scrierii articolului, cuplul aștepta un al doisprezecelea copil, pe care doreau*

să îl numească folosind aceleași patru litere, cu o singură apariție a fiecărei litere în nume. Problema cuplului era găsirea numelui celui de-al doisprezecelea copil (figura 1).

Pornind de la această problemă, profesorul formulează următoarele sarcini de lucru:

1. Care ar putea fi numele următorului copil? Dați câteva exemple, dacă literele se pot folosi o singură dată în fiecare nume.
2. Câte posibilități sunt în total, dacă pentru fiecare nume se pot folosi doar literele A, X, E și L o singură dată? Puteți găsi mai multe metode de a ajunge la răspuns?
3. Dacă părinții ar fi dorit să folosească doar 2 litere, A și L, câte posibilități de a își numi copiii ar fi avut, dacă literele se pot folosi o singură dată în fiecare nume? Puteți găsi mai multe metode de a ajunge la răspuns?
4. Dacă părinții ar fi dorit să folosească doar 3 litere, A, E, L, câte posibilități de a își numi copiii ar fi avut, dacă literele se pot folosi o singură dată în fiecare nume? Puteți găsi mai multe metode de a ajunge la răspuns?
5. Dacă părinții ar fi dorit să folosească 5 litere, A, E, L, X și M, câte posibilități de a își numi copiii ar fi avut, dacă literele se pot folosi o singură dată în fiecare nume? Puteți găsi mai multe metode de a ajunge la răspuns?
6. Puteți obține o generalizare? Dacă părinții ar fi dorit să folosească  $n$  litere, câte posibilități de a își numi copiii ar fi avut, dacă literele se pot folosi o singură dată în fiecare nume?

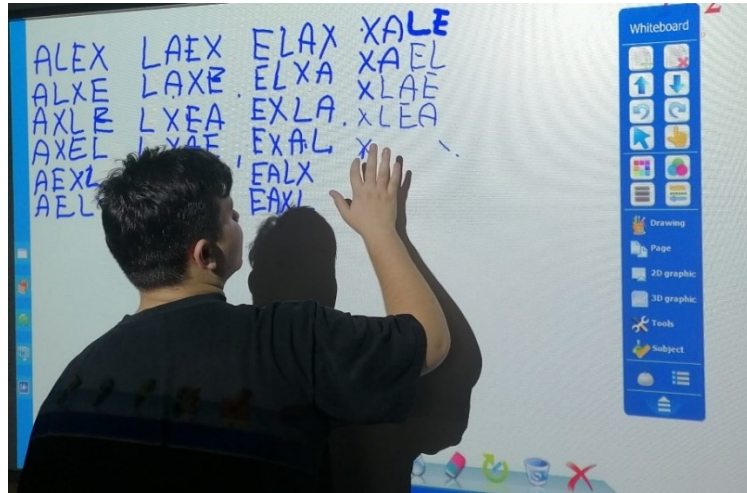
Lecția s-a desfășurat în România, la o clasă a X-a, cu un efectiv de 26 de elevi (în Republica Moldova combinatorica se studiază în clasa a XII-a). Elevii au fost inițial amuzați de titlul articolului de ziar și chiar au întrebat dacă sigur are legătură cu *Matematica*, sau poate se referă la o altă disciplină, cum ar fi *Limba engleză*.

Apoi ei au primit sarcinile de lucru. Prima sarcină „1. Care ar putea fi numele următorului copil? Dați câteva exemple, dacă literele se pot folosi o singură dată în fiecare nume.” Le-a pus la încercare creativitatea și capacitățile de pronunție. Scopul acestei sarcini a fost de a atrage pe toți elevii asupra problemei. Chiar și cei care nu prea sunt atașați de matematică au putut inventa un „nume”. Prin folosirea acestei sarcini, profesorul a reușit captarea atenției tuturor elevilor.

Sarcina „2. Câte posibilități sunt în total, dacă pentru fiecare nume se pot folosi doar literele A, X, E și L o singură dată? Puteți găsi mai multe metode de a ajunge la răspuns?” are scopul să facă legătura cu matematica, în general. Elevii trebuie să găsească toate posibilitățile de formare a numelor. Enunțul îi invită la creativitate, prin cerința de a găsi mai multe metode de a ajunge la un răspuns. Pentru rezolvare, elevii au avut diverse strategii. Cel mai des răspuns primit a fost faptul că există  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$  nume. Profesorul le-a indicat să recitească enunțul. Un elev a explicat faptul că dacă se folosește o literă o dată, aceasta nu se mai poate folosi a doua oară, ceea ce înseamnă că nu mai

sunt tot patru posibilități, ci doar trei. Analog pentru literele următoare. Astfel au ajuns la concluzia că există  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  posibilități.

Un alt elev a formulat ideea de a scrie toate numele, metodă folosită de majoritatea elevilor (figura 2).

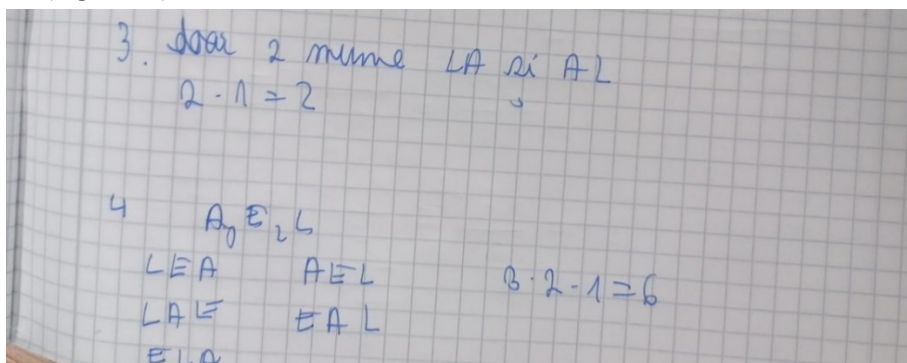


**Figura 2. Imagine din timpul desfășurării lecției**

După enumerarea tuturor posibilităților, clasa a putut observa faptul că metoda primului elev și cea a elevului al doilea duc la același număr de posibilități, și anume 24.

Pentru rezolvarea sarcinii „3. Dacă părinții ar fi dorit să folosească doar 2 litere, A și L, câte posibilități de a își numi copiii ar fi avut, dacă literele se pot folosi o singură dată în fiecare nume? Puteți găsi mai multe metode de a ajunge la răspuns?” nu a fost nicio ezitare. Elevii au realizat imediat faptul că există doar două posibilități de formare a numelui.

Nici sarcina „4. Dacă părinții ar fi dorit să folosească doar 3 litere, A, E, L, câte posibilități de a își numi copiii ar fi avut, dacă literele se pot folosi o singură dată în fiecare nume? Puteți găsi mai multe metode de a ajunge la răspuns?” nu le-a creat dificultăți în rezolvare. Cei mai mulți au început să enumere posibilitățile și le-au găsit cu ușurință în număr de 6. Un al treilea elevul a precizat că se poate folosi aceeași metodă ca la sarcina 2, și anume calculul  $3 \cdot 2 \cdot 1$ . Această rezolvare a fost făcută de majoritatea elevilor clasei (figura 3).



**Figura 3. Rezolvarea sarcinilor 3 și 4 de către elevul al treilea**

În rezolvarea sarcinii „5. Dacă părinții ar fi dorit să folosească 5 litere, A, E, L, X și M, câte posibilități de a își numi copiii ar fi avut, dacă literele se pot folosi o singură dată în fiecare nume? Puteți găsi mai multe metode de a ajunge la răspuns?” câțiva elevi au încercat aceeași strategie, aceea de enumera toate posibilitățile, dar au renunțat destul de rapid, realizând faptul că sunt prea multe.

Al patrulea elev a observat că se poate folosi aceeași regulă, chiar și pentru numere mai mari. Această observație a fost făcută de doar câțiva elevi ai clasei (figura 4).

4.  $\boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}}$   
 $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

5.  $\boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}} \boxed{\phantom{0}}$   
 $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

**Figura 4. Rezolvarea sarcinilor 4 și 5 de către elevul al patrulea**

Sarcina „6. Puteți obține o generalizare? Dacă părinții ar fi dorit să folosească  $n$  litere, câte posibilități de a își numi copiii ar fi avut, dacă literele se pot folosi o singură dată în fiecare nume?” a fost rezolvată doar de doi elevi.

După rezolvarea sarcinilor formulate, profesorul a anunțat faptul că ceea ce au descoperit ei sunt definite matematic ca fiind „*permutări*”, prezentând elevilor definiția și simbolurile respective.

**În concluzie** evidențiem, că lecția desfășurată folosind metoda descoperii a fost inedită pentru elevi. Faptul că a început cu un articol din ziar le-a captat atenția și i-a atras asupra rezolvării problemei. Sarcinile au fost create având nivelurile de dificultate conform nivelului de dezvoltare cognitivă a elevilor. Pe parcursul lecției elevii au fost mai implicați și mai concentrați în rezolvarea sarcinilor, acest lucru observându-se din comportamentul lor. Au avut loc discuții, argumentări, contradicții, dar discuțiile au fost constructive și au dus la rezolvarea sarcinilor.

Deși doar doi elevi au putut descoperi independent răspunsul la a șasea sarcină, cu ajutorul profesorului cei mai mulți dintre ei au putut face *generalizarea*.

Pe durata acestei lecții, elevii au descoperit noțiunea de *permutări* și regula de calcul a permutărilor, dar timpul nu a fost suficient pentru aplicarea acesteia în alte situații. La următoarea lecție, utilizând cunoștințele dobândite elevii vor aplica conștient permutările la rezolvarea diverselor probleme de combinatorică. Evidențiem că *metoda descoperii* este consumatoare de timp, acesta fiind unul dintre principalele dezavantaje ale aplicării acesteia. Însă, utilizarea metodei descoperii în cadrul studierii matematicii în liceu, contribuie eficient nu doar la formarea competențelor matematice ale elevilor, dar și la majorarea interesului acestora pentru matematică.

Articolul este elaborat în cadrul proiectului științific *Reconfigurarea procesului de învățare din învățământul general în contextul provocărilor societale*; 20.80009.0807.45 A, IȘE.



## Bibliografie

1. CUCOȘ, C. *Pedagogie generală*. Iași: Polirom, 1996. 230 p. ISBN: 973-9248-03-9.
2. MIHĂILĂ, M. M.; PETROVSCHI, N. Învățarea prin descoperire. In: *Materialele Conferinței Republicane a Cadrelor Didactice Didactica științelor exacte*. Vol. 2, 1-2 martie 2019, Chișinău. Chișinău, Republica Moldova: Universitatea de Stat din Tiraspol, 2019, pp. 43-46. ISBN 978-9975-76-268-7.
3. HENDERSON, K. B. Anent the discovery method. În: *The Mathematics Teacher, National Council of Teachers of Mathematics Publishing*. S.U.A., 1957, Vol. 50, no. 4, pp. 287-291.
4. Ministerul Educației, Cercetării și Inovării, România. *Programa școlară Matematică, clasa a X-a*, aprobată prin ordin de ministru nr. 4598 din 31.08.2004.
5. Ministerul Educației, Cercetării și Inovării, România. *Programa școlară Matematică, clasa a XI-a*, programa 1, aprobată prin ordin de ministru nr. 3252 din 13.02.2006.
6. Ministerul Educației, Cercetării și Inovării, România. *Programa școlară Matematică, clasa a XII-a*, programa 1, aprobată prin ordin de ministru nr. 5959 din 22.12.2006.
7. Ministerul Educației, Cercetării și Inovării, România. *Programa școlară matematică, clasa a XI-a și clasa a XII-a*, programa 2, aprobată prin ordin de ministru nr. 3252 din 13.02.2006.
8. Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova. *Curriculum național. Matematică. Clasele X-XII. Curriculum disciplinar. Ghid de implementare*. Ch., 2020. [mecc.gov.md/sites/default/files/matematica\\_liceu\\_ro.pdf](http://mecc.gov.md/sites/default/files/matematica_liceu_ro.pdf)