

**APLICAREA NUMERELOR COMPLEXE LA CALCULAREA CIRCUITULUI  
ELECTRIC SINUSOIDAL CU ELEMENTE RC**

**Eugen GHEORGHI , Boris KOROLEVSKI, Victoria MELINTE,  
Valeriu CEBAN, Pantelei UNTIL**

**Universitatea de Stat din Tiraspol cu sediul la Chi in u**

***Abstract:** Based on specific problems it is demonstrated the efficiency of complex numbers and vector diagrams in calculating nonhomogeneous circuits of electric sinusoidal current.*

Calcularea circuitelor electrice a curentului sinusoidal este o problem central în preg tirea profesorilor de fizic la cursurile de electromagnetism (ciclul licen iat) i electrotehnic (ciclul masterat). Integrarea European a sistemului universitar cere aplicarea diferitelor metode inova ionale i informa ionale la formarea competen elor prev zute de cadrul na ional.

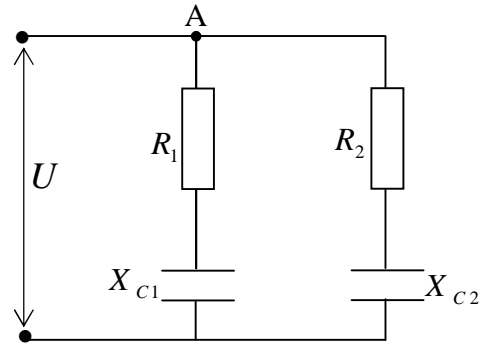
În lucrarea de fa se prezint rezultatele experimentului pedagogic realizat pe parcursul ultimilor ani în cadrul cursurilor de electromagnetism i electrotehnic . Rezultatele experimentului nostru confirm c utilizarea numerelor complexe la

calcularea circuitelor electrice a curentului sinusoidal contribuie la o însu ire mai eficient i la crearea unor situa ii de cercetare pentru rezolvarea problemelor. Se analizeaz unele exemple de calculare a diferitelor circuite ce con in elementele RC. Sunt date dou cazuri: 1) în ambele ramuri sunt acelea i rezisten e active i 2) în ambele ramuri sunt conectate diferite rezisten e active.

S analiz m câteva exemple.

**Exemplul 1.**

Curentului din figura nr. 1 i se aplic o tensiune efectiv de 40 V. Parametrii circuitului  $R_1 = 3\Omega$ ,  $X_{C_1} = 4\Omega$ ,  $R_2 = 3\Omega$ ,  $X_{C_2} = 4\Omega$ . De determinat impendanta circuitului, folosind legile curentului sta ionar i numerele complexe. Trage i concluzii. Construi i diagrama fazorial .



**Figura nr. 1**

Rezolvare:

Se d :

$$R_1 = 3\Omega$$

$$R_2 = 3\Omega$$

$$X_{C_2} = 4\Omega$$

$$U = 40V$$

$$\overline{Z} - ?$$

1. Calcul m impendanta  $X_{C_1} = 4\Omega$  fiec rei ramuri (fig. Nr. 1)

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (-X_{C_1})^2} = \sqrt{9 + 16} = 5\Omega \quad (1)$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (-X_{C_2})^2} = \sqrt{9 + 16} = 5\Omega \quad (2)$$

Deci avem c  $Z_1 = Z_2 = 5\Omega$ .

Folosind rela iile la gruparea în paralel pentru circuitele de curent continuu:

$$Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{5 \cdot 5}{5 + 5} = 2,5\Omega \quad (3)$$

2. Calcul m impendanta circuitului (fig. 1), folosind numerele complexe. În acest caz pentru fiecare ramur a circuitului ob inem:

$$\dot{Z}_1 = R_1 + jX_{C_1} = 3 - j4(\Omega) \quad (4)$$

$$\dot{Z}_2 = R_2 + jX_{C_2} = 3 - j4(\Omega) \quad (5)$$

Introducând rela iile (4) i (5) în (3), ob inem

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \frac{(3 - j4)(3 - j4)}{(3 + j4) + 3 + j4} = \frac{9 - j12 - j12 - 16}{6 - j8} = \frac{-(7 + j24)(6 + j8)}{(6 - j8)(6 + j8)} = \\ &= \frac{-42 - j56 - j144 - 192}{36 + 64} = \frac{150 - j200}{100} = 1,5 - j2 \\ Z &= \sqrt{(1,5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{2,25 + 4} = 2,5(\Omega) \end{aligned} \quad (6)$$

3. Verific m prin a treia metod de calcul a impendantei. Din fig. Nr. 1, calcul m intensit ile în fiecare ramur

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{z_1} = \frac{U}{z_2} = \frac{40}{5} = 8A \quad (7)$$

4. Din electrotehnic se cunoa te c

$$I = \sqrt{(I_{a_1} + I_{a_2})^2 + (I_{r_1} + I_{r_2})^2} \quad (8)$$

În acest caz

$$I_{a_1} = I_{a_2} \quad (9) \quad \text{și} \quad I_{r_1} = I_{r_2} \quad (10)$$

$$I_{a_1} = I_1 \cos \{\phi_1 \quad \cos \{\phi_1 = \frac{R_1}{z_1} = \frac{3}{5}$$

$$I_{a_1} = 8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{5} = 4,8A \quad (11)$$

$$I_{r_1} = I_1 \sin \{\phi_1 \quad \sin \{\phi_1 = \frac{x_{C1}}{z_1} = -\frac{4}{5}$$

$$I_{r_1} = 8 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{32}{5} = -6,4A \quad (12)$$

Introducând relațiile (11), (12) și înlocuind în relațiile (9) și (10) în (8), obținem:

$$I = \sqrt{(4,8 + 4,8)^2 + ((-6,4) + (-6,4))^2} = \sqrt{92,16 + 163,84} = \sqrt{256} = 16A$$

Avem 
$$z = \frac{U}{I} = \frac{40}{16} = 2,5\Omega \quad (13)$$

Observăm că și în acest caz avem același rezultat pentru impedanța din circuit (Fig.1).

5. Diagrama vectorială are următorul aspect: (Fig. 2)

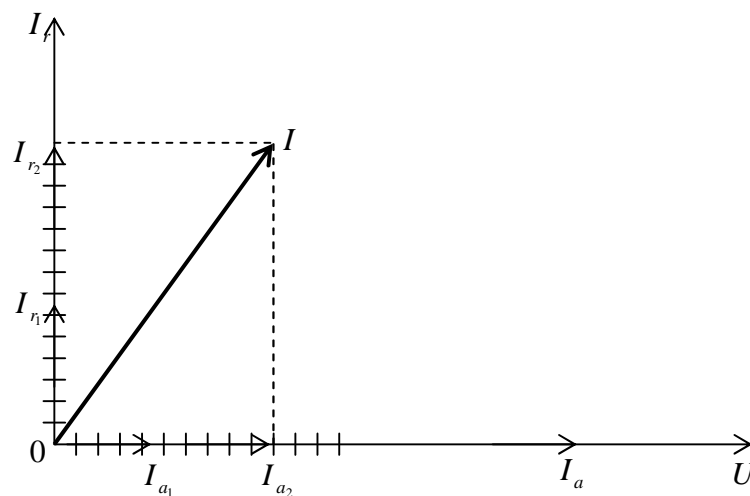


Figura nr. 2

**Exemplul 2.** În acest exemplu, impedanțele ramurilor sunt diferite. Altfel următorul exemplu: Circuitului din figura nr 3 i se aplică o tensiune electrică de 40 V. Parametrii circuitului:  $R_1 = 4\Omega$ ,  $X_{C1} = 3\Omega$ ,  $R_2 = 6\Omega$ ,  $X_{C2} = 8\Omega$ . De aflat impedanța circuitului, folosind legile curentului staționar la cuplarea în paralel, precum și calcularea impedanței aplicând metoda de calcul cu utilizarea numerelor complexe. De construit diagrama fazorială.

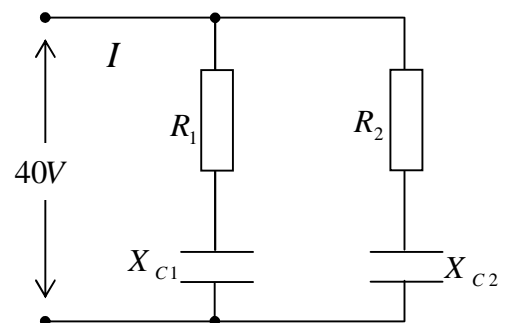


Figura nr. 3

Rezolvare:

Se d :

$$R_1 = 4\Omega \quad \left| \quad \begin{array}{l} 1. \text{Calcul m impendanta } X_{C_1} = 3\Omega \quad \text{fieci ramuri (fig. Nr. 3)} \\ Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (-X_{C_1})^2} = 5\Omega \end{array} \right. \quad (14)$$

$$R_2 = 6\Omega \quad \left| \quad \begin{array}{l} Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (-X_{C_2})^2} = 10\Omega \end{array} \right. \quad (15)$$

$$X_{C_2} = 8\Omega \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Deci avem } Z_1 \neq Z_2. \\ \text{Folosind rela ia:} \end{array} \right.$$

$$U = 40V$$

$$\underline{Z} = ?$$

$$Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{5 \cdot 10}{5 + 10} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3} = 3,33(\Omega) \quad (16)$$

2. Calcul m impendanta circuitului, folosind numerele complexe. În acest caz, avem:

$$\dot{Z}_1 = R_1 - jX_{C_1} = 4 - j3(\Omega) \quad (17)$$

$$\dot{Z}_2 = R_2 - jX_{C_2} = 6 - j8(\Omega) \quad (18)$$

Introducând rela iile (17) i (18) în (16), ob inem:

$$\dot{Z} = \frac{(4 - j3)(6 - j8)}{4 - j3 + 6 - j8} = \frac{24 - j32 - j18 - 24}{10 - j11} = \frac{j50(10 + j11)}{(10 - j11)(10 + j11)} = 2,49 - j2,26(\Omega)$$

$$Z = \sqrt{(2,488)^2 + (-2,26)^2} = \sqrt{6,19 + 5,107} = \sqrt{11,297} = 3,36(\Omega) \quad (4)$$

3. Calcul m impendanta circuitului prin a treia metod . Din fig. 3, avem:

$$I_1 = \frac{U}{z_1} = \frac{40}{5} = 8A \quad (18)$$

$$I_2 = \frac{U}{z_2} = \frac{40}{10} = 4A \quad (19)$$

4. Din electrotehnic se cunoa te:

$$I = \sqrt{(I_{a_1} + I_{a_2})^2 + (I_{r_1} + I_{r_2})^2}, \quad (20)$$

$$\text{de unde} \quad I_{a_1} = I_1 \cos \{ \}_1 \quad \cos \{ \}_1 = \frac{R_1}{z_1} = \frac{4}{5}$$

$$I_{a_1} = 8 \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{5} = 6,4A \quad (21)$$

$$I_{r_1} = I_1 \sin \{ \}_1 \quad \sin \{ \}_1 = \frac{x_{C_1}}{z_1} = -\frac{3}{5} = -0,6.$$

$$I_{r_1} = -8 \cdot 0,6 = -4,8A \quad (22)$$

$$I_{a_2} = I_2 \cos \phi_2 \quad \cos \phi_2 = \frac{R_2}{z_2} = \frac{6}{10}$$

$$I_{a_2} = 4 \cdot \frac{6}{10} = 2,4A \quad (23)$$

$$I_{r_2} = I_2 \sin \phi_2 \quad \sin \phi_2 = -\frac{x_{C_2}}{z_2} = -\frac{8}{10}$$

$$I_{r_2} = 4 \cdot \left(-\frac{8}{10}\right) = -3,2A \quad (24)$$

Introducând relațiile (21), (22), (23) și (24) în (20),  
obținem:

$$I = \sqrt{(6,4 + 2,4)^2 + ((-4,8) + (-3,2))^2} = \\ = \sqrt{77,44 + 64} = 11,9A$$

Avem

$$z = \frac{U}{I} = \frac{40}{11,9} = 3,36\Omega.$$

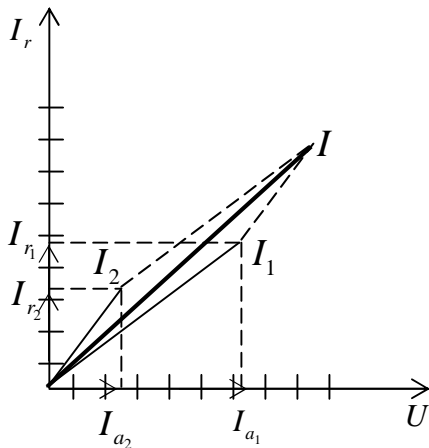


Figura nr. 4

și în acest caz am obținut același rezultat. Diagrama vectorială are următorul aspect:  
(Fig. nr. 4).

Să analizăm cazul când în ambele ramuri sunt conectate toate rezistoarele RLC. Altfel următorul exemplu:

Circuitului din figura 5 se aplică o tensiune de 40V. Parametrii circuitului:  $R_1 = 3\Omega$ ,  $X_{L_1} = 9\Omega$ ,  $X_{C_1} = 5\Omega$ ,  $R_2 = 3\Omega$ ,  $X_{L_2} = 9\Omega$  și  $X_{C_2} = 5\Omega$ . De determinat impedanța a circuitului prin toate metodele susnumite. De construit diagrama vectorială.

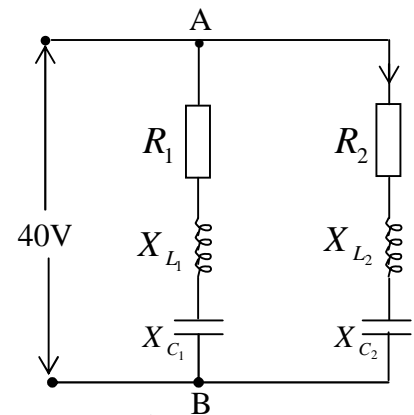


Figura nr. 5

Rezolvare:

$R_1 = 3\Omega = R_2$  | 1. Calculăm impedanța a fiecărei ramuri și a circuitului întreg

$$X_{L_1} = X_{L_2} = 9\Omega \quad Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (X_{L_1} - X_{C_1})^2} = \sqrt{9 + 16} = 5\Omega \quad (1)$$

$$X_{C_1} = X_{C_2} = 5\Omega \quad Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (X_{L_2} - X_{C_2})^2} = \sqrt{9 + 16} = 5\Omega \quad (2)$$

$$\underline{Z = ?; D.V. - ?} \quad Z_1 = Z_2 = 5\Omega \quad (3)$$

Folosind relațiile la gruparea în paralel, avem:

$$Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{5 \cdot 5}{5 + 5} = 2,5\Omega \quad (4)$$

2. Calculăm impedanța circuitului (fig. 5), folosind numerele complexe. Pentru aceasta avem:

$$\dot{Z}_1 = R_1 + j(X_{L_1} - X_{C_1}) = 3 + j4(\Omega) \quad (5)$$

$$\dot{Z}_2 = R_2 + j(X_{L_2} - X_{C_2}) = 3 + j4(\Omega) \quad (6)$$

Întroducând relațiile (5) și (6) în (4), obținem

$$\dot{Z} = \frac{(3 + j4)(3 + j4)}{3 + j4 + 3 + j4} = \frac{9 + j12 + j12 - 16}{6 + j8} = -\frac{(7 - j24)(6 - j8)}{(6 + j8)(6 - j8)} = \quad (7)$$

$$= -\frac{42 - j56 - j144 - 192}{36 + 64} = \frac{150 + j200}{100} = 1,5 + j2$$

$$Z = \sqrt{(1,5)^2 + 2^2} = \sqrt{2,25 + 4} = 2,5(\Omega) \quad (8)$$

3. Verificăm prin a treia metodă de calcul a impedanței. Din relația 3, adică  $Z_1 = Z_2 = 5\Omega$ , obținem

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{z_1} = \frac{U}{z_2} = \frac{40}{5} = 8A \quad (9)$$

4. La gruparea în paralel a RLC, din electrotehnică este cunoscută relația:

$$I = \sqrt{(I_{a_1} + I_{a_2})^2 + (I_{r_1} + I_{r_2})^2}, \quad (10)$$

de unde

$$I_{a_1} = I_1 \cos \phi_1 \quad \cos \phi_1 = \frac{R_1}{z_1} = \frac{3}{5}$$

$$I_{a_1} = 8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{5} = 4,8A$$

De asemenea și  $I_{a_2} = 4,8A$ , adică

$$I_{a_1} = I_{a_2} = 4,8A \quad (11)$$

$$I_{r_1} = I_{r_2} = I_1 \sin \phi_1 = I_2 \sin \phi_2 \quad \sin \phi_1 = \sin \phi_2 = \frac{X_{L_2} - X_{C_2}}{z_2} = \frac{X_{L_1} - X_{C_1}}{z_2} = \frac{4}{5}$$

$$I_{r_1} = I_{r_2} = 8 \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{5} = 6,4A \quad (12)$$

Introducând relațiile (11) și (12) în (10), obținem:

$$I = \sqrt{(4,8 + 4,8)^2 + (6,4 + 6,4)^2} = \sqrt{(9,6)^2 + (12,8)^2} = \sqrt{92,16 + 163,84} = \sqrt{256} = 16A$$

5. Se cunoaște impedanța circuitului

$$z = \frac{U}{I} = \frac{40}{16} = 2,5\Omega \quad (13)$$

Observăm că în toate cele trei cazuri obținem același rezultat. Deci, în acest caz, pentru a afla felul de circuite se poate folosi calcularea impedanței și legile circuitului continuu.

Diagrama vectorială este redată în fig. nr.6.

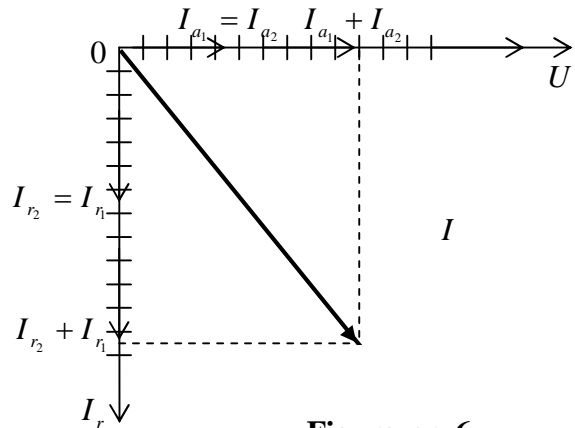


Figura nr. 6

Vom calcula impedanța circuitului întreg, când impedanțele în fiecare ramură sunt diferite, adică  $Z_1 \neq Z_2$ . Circuitului din fig. 7 i se aplică o tensiune de 40V. Parametrii circuitului:  $R_1 = 3\Omega$ ,  $X_{L_1} = 9\Omega$ ,  $X_{C_1} = 5\Omega$ ,  $R_2 = 6\Omega$ ,  $X_{L_2} = 12\Omega$  și  $X_{C_2} = 4\Omega$ . De determinat impedanța circuitului prin toate metodele susnumite. De construit diagrama vectorială.

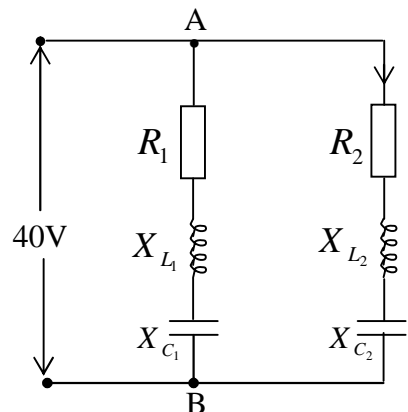


Figura nr. 7

Rezolvare:

Se dă:

$$\begin{array}{l} U = 40V \\ R_1 = 3\Omega \\ X_{L_1} = 9\Omega \\ X_{C_1} = 5\Omega \\ R_2 = 6\Omega \\ X_{L_2} = 12\Omega \\ X_{C_2} = 4\Omega \\ \hline Z = ?; D.V. = ? \end{array}$$

1. Calculăm impedanța pentru fiecare ramură de circuit:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (X_{L_1} - X_{C_1})^2} = \sqrt{9 + 16} = 5\Omega \quad (1)$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (X_{L_2} - X_{C_2})^2} = \sqrt{6^2 + (12 - 4)^2} = 10\Omega \quad (2)$$

Folosind relațiile, avem:

$$Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{5 \cdot 10}{5 + 10} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3} = 3,3\Omega \quad (3)$$

2. Calculăm impedanța circuitului (fig. 7), folosind a doua metodă – metoda numerelor complexe. Avem:

$$\dot{Z}_1 = R_1 + j(X_{L_1} - X_{C_1}) = 3 + j4(\Omega) \quad (4)$$

$$\dot{Z}_2 = R_2 + j(X_{L_2} - X_{C_2}) = 6 + j8(\Omega) \quad (5)$$

Introducând relațiile (4) și (5) în (3), obținem:

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \frac{(3+j4)(6+j8)}{3+j4+6+j8} = \frac{18+j24-24}{9+j12} = -\frac{6-j48}{9+j12} = -\frac{(6-j48)(9-j12)}{(9+j12)(9-j12)} = \\ &= -\frac{54-j72-j432-576}{81+144} = \frac{522+j504}{225} = 2,3+j2,3\Omega \\ Z &= \sqrt{(2,3)^2 + (2,3)^2} = 2,3\sqrt{2} = 2,3 \cdot 1,41 \approx 3,3(\Omega) \end{aligned} \quad (6)$$

5. Verificăm prin a treia metodă de calcul a impedanței. Din fig. nr. 7 avem c

$$I_1 = \frac{U}{z_1} = \frac{40}{5} = 8A \quad (7)$$

$$I_2 = \frac{U}{z_2} = \frac{40}{8} = 5A \quad (8)$$

4. În electrotehnică este cunoscută relația:

$$I = \sqrt{(I_{a_1} + I_{a_2})^2 + (I_{r_1} + I_{r_2})^2}, \quad (9)$$

de unde

$$I_{a_1} = I_1 \cos \{\_1 \quad \cos \{\_1 = \frac{R_1}{z_1} = \frac{3}{5}$$

$$I_{a_1} = 8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{5} = 4,8A \quad (10)$$

$$I_{r_1} = I_1 \sin \{\_1 \quad \sin \{\_1 = \frac{x_{L_1} - X_{C_1}}{z_1} = \frac{4}{5}.$$

$$I_{r_1} = 8 \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{5} = 6,4A \quad (11)$$

$$I_{a_2} = I_2 \cos \{\_2 \quad \cos \{\_2 = \frac{R_2}{z_2} = \frac{6}{10}$$

$$I_{a_2} = 5 \cdot \frac{6}{10} = 3A \quad (12)$$

$$I_{r_2} = I_2 \sin \{\_2 \quad \sin \{\_2 = \frac{X_{L_2} - X_{C_2}}{z_2} = \frac{12-4}{10} = \frac{8}{10}.$$

$$I_{r_2} = 5 \cdot \frac{8}{10} = 4A \quad (13)$$



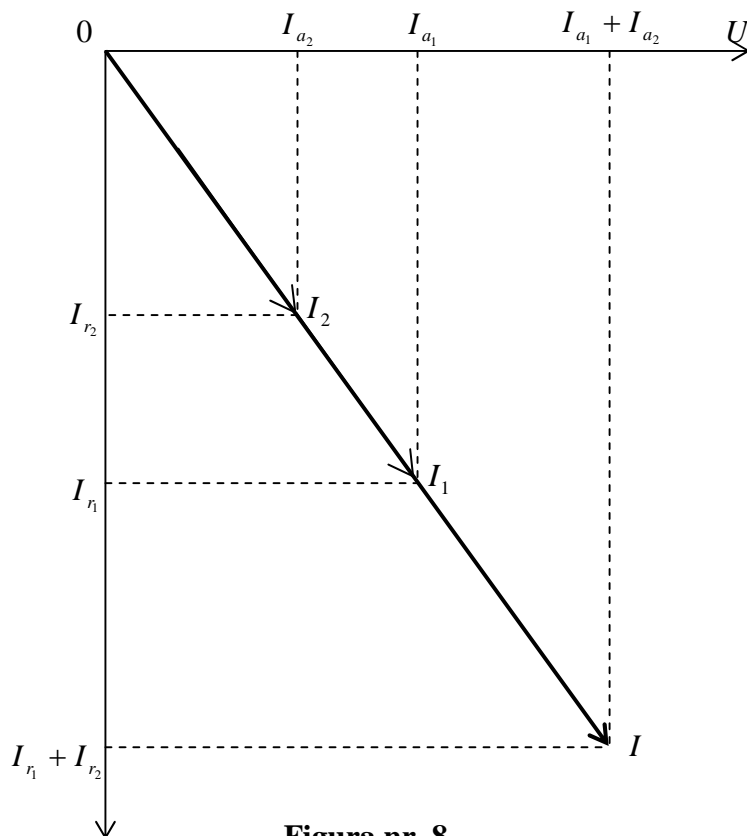
Introducând relațiile (10), (11), (12) și (13) în (9), obținem:

$$I = \sqrt{(4,8 + 3)^2 + (6,4 + 4)^2} = \sqrt{60,84 + 108,16} = \sqrt{169} = 13A$$

Impedanța a circuitului total

$$z = \frac{U}{I} = \frac{40}{13} = 3,1\Omega \quad (14)$$

Observăm că impedanța a circuitului este aceeași în toate cazurile, adică folosind toate metodele de calcul ale ei. Diagrama vectorială este redată în fig. nr. 8.



**Figura nr. 8**

#### **BIBLIOGRAFIE:**

1. Revista de Fizică și Matematică aplicat pentru învățământul preuniversitar. Anul VIII, nr. 2 (15), 2011.
2. P. Until, O. Zlotea, E. Afanas. *Aplicarea diagramelor vectoriale și a numerelor complexe la calcularea circuitelor curentului electric alternativ*. Chișinău, 2012.