FORMAREA ŞI DEZVOLTAREA COMPETENŢELOR ELEVILOR PRIN REZOLVAREA PROBLEMELOR DE LIMITĂ ŞI EXTREM LA FIZICĂ

Mihail POPA, conf. univ., dr.
Facultatea de Ştiinţe Reale, Economice şi ale Mediului
Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălţi

Abstract: The paper presents the most important basic ways of solving limit and extremum problems in physics, from the point of view of training and developing pupils' competences.
Keywords: Competence, method, matter, physics.
Rezumat: Prin prisma formării şi dezvoltării competenţelor elevilor, în lucrare sunt prezentate cele mai importante metode elementare de rezolvare a problemelor de limită şi extrem din fizică.
Cuvinte-cheie: Competenţe, metodă, problemă, fizica.

Problemele de limită şi extrem formează o categorie aparte în cadrul general al problemelor de fizică. Prin *probleme fizice de limită şi extrem* înţelegem problemele de determinare a valorilor maxime sau minime ale unei mărimi fizice în conformitate cu anumite condiţii iniţiale. Până nu demult aceste probleme erau dezvoltate mai ales de către matematicieni, deoarece problemele în cauză, denumite de maxim şi minim, reprezintă o excelentă posibilitate pentru aplicarea calculului diferenţial în practică. În ultimul timp, fizica tratează mai atent problemele de optimizare, inclusiv cele de extrem. La rezolvarea acestora intervine în mod expres, pe lângă aplicarea unor metode de calcul, efectuarea unor operaţii de dificultate sporită, cum ar fi:

- determinarea valorilor extreme ale unor mărimi fizice, care sunt funcţii de o altă mărime fizică sau geometrică;
- reprezentarea grafică a unei mărimi fizice ca funcţie de altă mărime fizică sau geometrică;
- generalizarea mai multor rezultate deţinute în problemele particulare într-o primă reunire a acestora într-o problemă generală;

[20] A. T. Sava, A. Petrovici - „Predarea-învăţarea între rutină şi creativitate” The proceedings of International Conference „Quality in Formal and non
Formal Education”, Iaşi, 2011

- discutarea fenomenelor ce au loc într-o problemă după valorile mărimilor fizice şi geometrice care intervin;

- folosirea în calcule a unor mărimi şi operaţii matematice mai dificile, accesibile în ultimii ani de liceu.

În decursul rezolvării problemelor de maxim şi minim apar una sau mai multe mărimi fizice ce depind de o altă mărime fizică sau geometrică din aceeaşi problemă, considerată ca variabilă independentă. Prin enunţ se cere să se determine extremele mărimilor funcţiei. Rezolvarea unor astfel de probleme pot fi înţelese în profunzime de elev dacă acesta ar poseda cunoştinţe de calcul diferenţial, calcul vectorial, inegalităţi matematice, iar profesorul ar face analogia cu modele matematice.

Există mai multe metode de rezolvare a problemelor de limită şi extrem. La rezolvarea unei probleme fizice concrete este necesar de a alege cea mai raţională metoda. Vom enumera şi vom descrie principalele metode de rezolvare a unor astfel de probleme prin:

1. *folosirea noţiunii de derivată a funcţiei;*
2. *ecuaţia parabolei, cu folosirea formulei vârfului parabolei;*
3. *discriminantul ecuaţiei pătratice;*
4. *utilizarea unor identităţi şi inegalităţi algebrice remarcabile;*
5. *folosirea inegalităţii Coşi;*
6. *utilizarea proprietăţilor funcţiilor trigonometrice;*
7. *metoda geometrică.*

I. Rezolvarea prin folosirea noţiunii de derivată a funcţiei

Fiind în posesia cunoştinţelor de calcul diferenţial, rezolvarea problemelor de extrem implică următoarele etape:

- stabilirea relaţiei dintre mărimea y al cărei extrem îl căutăm şi mărimea x de care ea depinde, $y = f(x)$;
- calcularea primei derivate a funcţiei în raport cu x, $y' = f'(x)$;
- anularea derivatei şi calcularea lui x_m care asigură extremul y_m;
- introducerea valorii x_m în f şi calcularea extremului $y_m(x_m)$;
- verificarea şi interpretarea fizică a rezultatului.

Acest algoritm asigură rezolvarea fără dificultăţi a problemelor de limită şi extrem. Din condiţiile fizice ale problemei este uşor de precizat natura extremului. Dacă diferenţiala schimbă semnul funcţiei din „+” în „–”, atunci extremul funcţiei $y_m(x_m)$ reprezintă un maximum, iar dacă diferenţiala schimbă semnul funcţiei în mod invers, atunci extremul funcţiei $y_m(x_m)$ reprezintă un minimum. Când apar dubii, se calculează şi derivata a doua $y'' = f''(x)$. Dacă $y''(x_m)$ este pozitivă, atunci y are un minim pentru x_m, în caz contrar având un maxim. Vom da un exemplu de problemă rezolvată:

Problema 1. *Doi purtători de sarcină electrică pozitivă de aceeaşi valoare* q*, puncti-formi, sunt aşezaţi în vârfurile* B şi C *ale unui triunghi isoscel ABC* ($\hat{B} = \hat{C}$)*. Se cere să se determine valoarea unghiului A pentru care intensitatea câmpului electrostatic creat de* *cei doi purtători de sarcină în vârful A are valoarea maximă. Latura BC a triunghiului are mărimea d***.**

Rezolvare. Notăm $\hat{B}=\hat{C}=\alpha$, iar $\hat{A}=\beta$ (Fig. 1). Intensitatea câmpului electric creat de cele două sarcini în vârful A al triunghiului este:

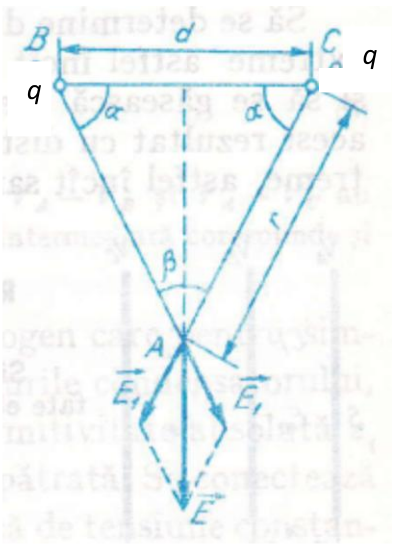

Fig. 1. Principiul superpoziţiei

$$E = 2E_1 \cos\frac{\beta}{2}, \tag{1}$$

unde

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}, \quad \text{iar} \quad r = \frac{d}{2\sin\frac{\beta}{2}}. \tag{2}$$

Înlocuind relaţiile (2) în (1), obţinem:

$$E = \frac{2q}{\pi\varepsilon d^2}\sin^2\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}. \tag{3}$$

Este necesar de a găsi extremele funcţiei $E=f(\beta)$ descrisă de relaţia (3). Pentru aceasta luăm diferenţiala de ordinul I:

$$\frac{dE}{d\beta} = \frac{q}{\pi\varepsilon d^2}\sin\frac{\beta}{2}\left(2\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}\right). \tag{4}$$

Soluţiile ecuaţiei (3) se obţin dacă egalăm diferenţiala (4) cu zero:

$$\frac{dE}{d\beta} = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \sin\frac{\beta}{2} = 0 \\ tg^2\frac{\beta}{2} = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \sin\frac{\beta}{2} = 0 \\ tg\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 \cong 109^0 20^{/} \\ \beta_3 \cong 250^0 40^{/} \end{matrix}\right\}. \tag{5}$$

Este uşor de observat că numai soluţia $\beta_2 \cong 109^0 20^{/}$ este acceptabilă, deoarece $\beta_1 = 0$ conduce la $E=0$, fapt care semnifică că punctul A se găseşte la infinit pe perpendiculara ce cade la mijlocul lui BC, iar $\beta_3 \cong 250^0 40^{/}$ este inacceptabilă din punct de vedere geometric. Pentru soluţia $\beta_1 = 0$ se obţine de fapt valoarea minimă a lui E.

Pentru a determina natura extremului dat de β_2, luăm diferenţiala de ordinul II::

$$\frac{d^2E}{d\beta^2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon d^2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\left(2 - 9\sin^2\frac{\beta}{2}\right). \tag{6}$$

Ţinând cont că $\sin\frac{\beta_2}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ şi $\cos\frac{\beta_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, rezultă că pentru $\beta = \beta_2$,

$$\frac{d^2E}{d\beta^2} = -\frac{2q}{\sqrt{3}\pi\varepsilon d^2} < 0. \tag{7}$$

Deci pentru $\beta = \beta_2$, graficul funcţiei $E=f(\beta)$ prezintă un maxim a cărui valoare rezultă înlocuind $\beta = \beta_2$ în relaţia (3):

$$E_{max} = \frac{4\sqrt{3}q}{9\pi\varepsilon d^2}. \qquad (8)$$

II. Rezolvarea prin ecuaţia parabolei, cu folosirea formulei Vîrfului parabolei

O altă metodă de rezolvare a unor probleme de limită şi extrem se reduce la alcătuirea unei ecuaţii de tipul *y = f(x)*, ce exprimă dependenţa două mărimi fizice variabile din problemă şi cercetarea ulterioară a funcţiei obţinute la maxim şi minim.

Vom începe prin determinarea extremelor funcţiilor polinominale de gradul II de forma

$$y(x) = ax^2 + bx + c, \qquad (9)$$

unde $a \neq 0$ şi $a,b,c \in R$ (mulţimea numerelor reale). Graficul acestei funcţii este o parabolă. Ne punem problema de a determina coordonatele vârfului parabolei. Elevii care au studiat funcţia pătratică pot să facă următoarea transformare:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}. \qquad (10)$$

Al doilea termen al relaţiei (10) nu conţine *x*, de aceea pentru $x + \frac{b}{2a} = 0$, adică pentru $x = -\frac{b}{2a}$, obţinem extremul funcţiei:

$$y_{max}(y_{min}) = \frac{4ac - b^2}{4a^2}. \qquad (11)$$

Maximul funcţiei $y(x)$ are loc pentru $a < 0$, iar minimul – pentru $a > 0$. Dacă $a < 0$ ramurile parabolei sunt îndreptate în jos, iar dacă $a > 0$ ramurile parabolei sunt îndreptate în sus. Vom analiza un exemplu:

Problema 2. *Doi rezistori cu rezistenţele R_1 şi R_2 sunt conectaţi în serie la o sursă de curent continuu cu tensiunea $U = 12V$. Rezistenţa unuia din rezistori $R_1 = 4\,\Omega$. Pentru ce valoare a rezistorului R_2, puterea degajată în acesta va fi maximă? Determinaţi această putere maximă.*

Rezolvare: Puterea degajată pe rezistorul R_2 poate fi dedusă din relaţia:

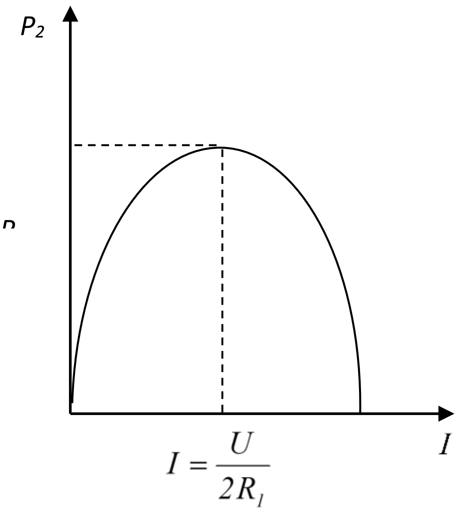

Fig. 2. Dependenţa puterii degajate pe R_2 în funcţie de intensitatea curentului din circuit [3]

$$P = P_1 + P_2 \Rightarrow UI = I^2R_1 + P_2 \Rightarrow R_1I^2 - UI + P_2 = 0, \qquad (12)$$

unde UI reprezintă puterea degajată de sursă. Din relaţia (12) obţinem soluţiile:

$$I_{1,2} = \frac{U \pm \sqrt{U - 4R_1P_2}}{2R_1}. \qquad (13)$$

Rezultă că $D = U^2 - 4R_1P_2 \geq 0 \Rightarrow P_2 \leq \dfrac{U^2}{4R_1}$, adică $P_{2max} = \dfrac{U^2}{4R_1}$. Graficul dependenţei $P_2(I)$ reprezintă o parabolă (Fig. 2.), iar vârful acestei parabole P_{2max} corespunde curentului

$$I = \frac{U}{2R_1}. \qquad (14)$$

Ținând cont de relaţia (14), obţinem

$$P_2 = \frac{U^2}{2R_1} = \frac{U^2R_2}{(R_1 + R_2)^2} \Rightarrow 2R_1R_2 = R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2 \Rightarrow R_2 = R_1 = 4\Omega, \qquad (15)$$

iar

$$P_{2max} = \frac{U^2}{4R_1} = 9W. \qquad (16)$$

III. Rezolvare prin discriminantul ecuaţiei pătratice

Pentru determinarea extremelor funcţiilor de gradul II, de forma

$$y(x) = ax^2 + bx + c, \qquad (17)$$

egalăm această funcţie cu zero şi găsim discriminantul

$$D = b^2 - 4ac \geq 0, \qquad (18)$$

de unde găsim valoarea maximă sau minimă a uneia din variabile. Dacă, de exemplu, vrem să găsim variabila a_{max}, din relaţia (18) rezultă $a \leq \dfrac{b^2}{4c}$, de unde rezultă că $a_{\max} = \dfrac{b^2}{4c}$.

Dacă vrem să găsim b_{min}, din (18), obţinem $b^2 \geq 4ac \Rightarrow b \geq \sqrt{4ac} \Rightarrow b_{\min} = \sqrt{4ac}$. Vom da un exemplu de problemă:

Problema 3. *Din acelaşi punct şi în acelaşi sens, pe o traiectorie rectilinie, pleacă două mobile. Primul mobil se deplasează cu viteză constantă* $v_1 = 2m/s$, *iar cel de-al doilea pleacă cu viteza iniţială* $v_{02} = 6m/s$ *şi cu o anumită întârziere faţă de primul mobil, deplasându-se uniform încetinit cu acceleraţia* $a = 0{,}5\,m/s^2$. *Să se determine valoarea maximă a timpului de întârziere la plecarea celui de-al doilea mobil faţă de primul, pentru care mai este posibilă întâlnirea.*

Rezolvare: Notăm cu t – timpul măsurat din momentul plecării celui de-al doilea mobil până la întâlnirea cu primul, iar cu t_1 – timpul de întârziere a celui de-al doilea mobil faţă de primul. Deplasările celor două mobile sunt:

$$s_1 = v_1(t_1 + t), \tag{19}$$

$$s_2 = v_{02}t - \frac{at^2}{2}. \tag{20}$$

Din egalitatea drumurilor $s_1 = s_2$ rezultă:

$$v_1(t_1 + t) = v_{02}t - \frac{at^2}{2} \Rightarrow at^2 - 2(v_{02} - v_1)t + 2v_1t_1 = 0. \tag{21}$$

Rezultă că întâlnirea celor două mobile este posibilă, dacă discriminantul ecuaţiei pătratice (21) cu variabila *t* îndeplineşte condiţia:

$$D = 4(v_{02} - v_1)^2 - 8av_1t_1 \geq 0, \tag{22}$$

de unde rezultă expresia timpului de întârziere:

$$t_1 \leq \frac{(v_{02} - v_1)^2}{2av_1}. \tag{23}$$

Din relaţia (23) rezultă că

$$t_{1max} = \frac{(v_{02} - v_1)^2}{2av_1} = 8s. \tag{24}$$

***Consecinţe*:**

1. Dacă $t_1 < t_{1max}$ mobilele se vor întâlni de două ori, ecuaţia (2.3) având două soluţii distincte şi pozitive. Acest lucru este într-adevăr realizabil. Prima din cele două întâlniri va avea loc prin ajungerea şi depăşirea primului automobil de către cel de al doilea, iar a doua, prin ajungerea şi depăşirea celui de al doilea mobil de către primul.

2. În cazul în care $t_1 > t_{1max}$ întâlnirea nu este posibilă, deoarece cel de-al doilea mobil nu mai poate ajunge din urmă primul mobil.

IV. Rezolvarea prin utilizarea unor identităţi şi inegalităţi algebrice remarcabile

În multe tipuri de probleme de extrem din fizică pot fi folosite identităţi şi inegalităţi algebrice şi aritmetice remarcabile, substituind cu succes calculul diferenţial complicat şi uneori inaccesibil elevilor din învățământul preuniversitar. În cele ce urmează ne vom referi la câteva inegalităţi şi identităţi cu utilizare mai frecventă în soluţionarea problemelor de extrem din fizică şi vom aminti pe cele mai puţin frecvente, dar folositoare în anumite cazuri.

Inegalităţile mediilor, $m_{ar} < m_g < m_a$, în care m_{ar} este media armonică a numerelor reale strict pozitive a_i, $i = 1...n$, m_g - media geometrică a aceloraşi numere, iar m_a - media aritmetică a acestora:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}} \le \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (25)$$

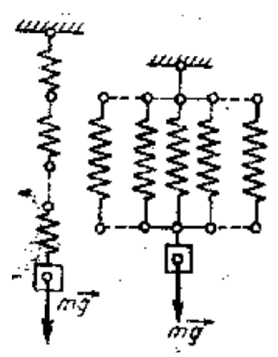

Fig. 3. Gruparea în serie şi paralel a resorturilor ([2],pag.65)

Inegalităţile devin egalităţi dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz are forma:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right), \text{ unde } a_i, b_i \in R. \qquad (26)$$

Inegalitatea devine egalitate pentru $a_i = kb_i$, unde $k \in R$. Dacă în loc de a_i şi b_i din relaţia (1.7) folosim numerele pozitive $\sqrt{a_i}$ şi $\frac{1}{\sqrt{a_i}}$, rezultă un caz particular al inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwartz cu o arie largă de utilizare în problemele de extrem din fizică:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \ge n^2. \qquad (27)$$

Inegalitatea (1.6) devine egalitate numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Inegalitatea lui Lagrange are forma

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\ 2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2, \text{ unde } a_i, b_i \in R. \qquad (28)$$

Atât inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz, cât şi inegalitatea lui Lagrange pot fi folosite cu succes în problemele de extrem din fizică (şi nu numai) în locul metodei cunoscute sub denumirea de *multiplicatorii lui Lagrange,* care face apel la cunoaşterea derivatelor parţiale a unei funcţii reale de *n* variabile reale .

În aceeaşi categorie a inegalităţilor remarcabile sunt de amintit inegalităţile lui Minkovscki, inegalitatea lui Holder, inegalităţile lui Bernoulli, inegalitatea lui Cebîşev, inegalitatea lui Jensen, precum şi alte inegalităţi ce se pot găsi în unele manuale şi tratate de matematică elementară. Vom da un exemplu de problema rezolvata:

Problema 4. *Se dau n resorturi mecanice care se montează o dată în serie, şi altă dată în paralel. Cunoscând că într-un caz şi în celălalt corpul care se ataşează sistemelor* *oscilante formate este acelaşi, să se determine relaţia dintre constantele elastice ale resorturilor respective, astfel încât raportul dintre perioada de oscilaţie a sistemului serie şi perioada de oscilaţie a sistemului paralel de resorturi să fie minim. Care este valoarea acestui raport minim?*

Rezolvare: Notăm cu m masa corpului ce se ataşează celor două sisteme oscilante şi cu k_i, unde $i \in [1,n]$, constantele elastice diferite ale resorturilor montate în serie şi, respectiv, în paralel. În cazul sistemului oscilant serie (Fig. 3.a), perioada de oscilaţie:

$$T_s = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_s}} = 2\pi\sqrt{m\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{k_i}}\,, \tag{29}$$

iar în cazul sistemului oscilant paralel, perioada de oscilaţie este:

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_p}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\sum_{i=1}^{N}k_i}}\,. \tag{30}$$

Facem raportul perioadelor şi obţinem:

$$\frac{T_s}{T_p} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}\right)}\,. \tag{31}$$

Vom folosi cazul particular al inegalităţii *Cauchy-Buniakovski-Schwartz*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \geq n^2\,. \tag{32}$$

Inegalitatea (32) devine egalitate numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n$. Vom aplica această inegalitate pentru cazul nostru şi obţinem:

$$\frac{T_s}{T_p} \geq n\,. \tag{33}$$

Este evident că ***raportul dintre perioada de oscilaţie a sistemului serie şi perioada de oscilaţie a sistemului paralel de resorturi este minim***

$$\left(\frac{T_s}{T_p}\right)_{min} = n\,, \tag{34}$$

dacă resorturile au aceeaşi constantă elastică $k_1 = k_2 = ... = k_n = k$, adică resorturile sunt identice

V. Rezolvare prin folosirea inegalităţii Coşi

Elevii claselor de liceu trebuie să cunoască regula matematică: *valoarea medie aritmetică a două numere pozitive* a *şi b nu este mai mică decât valoarea medie geometrică ale acestora, adică*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,. \qquad (35)$$

În afară de aceasta, este cunoscut că egalitatea $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ se respectă numai pentru $a = b$, iar inegalitatea $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ se respectă pentru $a \neq b$.

De aici rezultă ***teorema despre produsul constant***: *suma a două numere pozitive variabile, al căror produs este constant, are valoare minimă atunci când cele două numere sunt egale*.

Din relaţia (35) rezultă că

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2. \qquad (36)$$

Semnul „=” se respectă pentru $a = b$, iar semnul „<” – pentru $a \neq b$. Rezultă ***teorema despre suma constantă***: *produsul a două numere pozitive variabile, a căror sumă este constantă, are valoare maximă atunci când cele două numere sunt egale*.

Din teorema despre produsul constant rezultă că *suma a două numere reciproc inverse a şi* $\frac{1}{a}$ *nu este mai mică decât doi:*

$$a + \frac{1}{a} \geq 2. \qquad (37)$$

Într-adevăr, produsul $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ este constant. Însă dacă $a = \frac{1}{a}$, atunci $a = 1$, iar suma $a + \frac{1}{a} = 2$. Pentru $a \neq \frac{1}{a}$, în baza teoremei despre produsul constant, rezultă $a + \frac{1}{a} > 2$. De aceea, dacă avem funcţia $y = \frac{1}{x}$, atunci $(y + x)_{\min} = 2$. Vom da un exemplu de problemă rezolvată:

Problema 5. *Se consideră circuitul din figura 2.3 în care $R_1 = 4\Omega$, $R_3 = 9\Omega$, $E = 80V$, $r = 0$, iar rezistenţele $R_2 = R_4 = x$ sunt necunoscute. Pentru ce valoare a lui x curentul care trece prin rezistenţa R_3 are valoarea maximă şi care este mărimea acestei valori?*

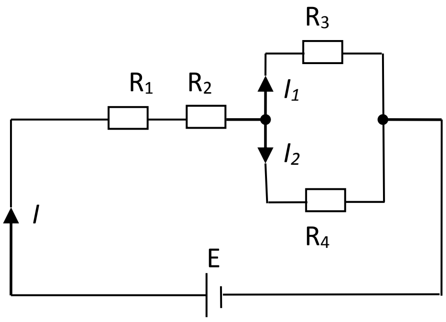

Fig. 4. Circuit mixt [4]

Rezolvare: Curentul *I* debitat de sursa de energie este

$$I = \frac{E}{R}. \qquad (38)$$

Dar

$$R = R_1 + R_2 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = 4 + x + \frac{9x}{9+x} = \frac{36 + 4x + 9x + x^2 + 9x}{9+x},$$

de unde

$$R = \frac{x^2 + 22x + 36}{x+9} \Rightarrow I = \frac{80(x+9)}{x^2 + 22x + 36}. \qquad (39)$$

Pe de altă parte, curentul *I* se ramifică în două:

$$I = I_1 + I_2. \qquad (40)$$

În ramurile paralele căderile de tensiune sunt egale:

$$I_1 R_3 = I_2 R_4 \Rightarrow I_2 = \frac{I_1 R_3}{R_4} \Rightarrow I = I_1(1 + \frac{R_3}{R_4}) \Rightarrow I_1 = \frac{I R_4}{R_3 + R_4}, \qquad (41)$$

Substituim relaţia (2.34) în (2.36) şi obţinem:

$$I_1 = \frac{80\,\cancel{(x+9)}}{x^2 + 22x + 36} \cdot \frac{x}{\cancel{x+9}} = \frac{80x}{x^2 + 22x + 36}. \qquad (42)$$

sau

$$I_1 = \frac{80x}{x + \frac{36}{x} + 22}. \qquad (43)$$

Condiţia $I_1 \to \max$ se îndeplineşte dacă $x + \frac{36}{x} \to \min$. Conform *teoremei despre produsul constant* suma a două numere pozitive variabile, al căror produs este constant, are valoare minimă atunci când cele două numere sunt egale. Rezultă că

$$x = \frac{36}{x} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow R_2 = R_4 = 6\Omega. \qquad (44)$$

Conform calculelor obţinem

$$I_{1\max} = 2{,}35A.$$

VI. Rezolvare prin utilizarea proprietăţilor funcţiilor trigonometrice

În acest caz se utilizează formulele de reducere a unor funcţii trigonometrice mai complicate la o formă mai simplă.

Problema 6. *Un corp de masă m este deplasat uniform pe un plan orizontal cu ajutorul unei forţe F, ce formează cu orizontală un unghi α. Coeficientul de frecare dintre corp şi planul orizontal este μ. Să se determine valoarea unghiului α pentru care valoarea forţei F este minimă, precum şi valoarea acestei forţe.*

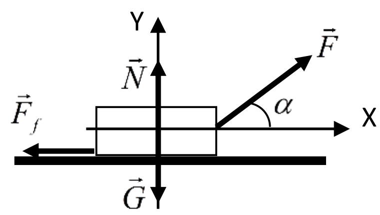

Fig. 5. Diagrama forţelor [5]

Rezolvare: Construim diagrama schematică a tuturor forţelor care acţionează asupra corpului (Fig. 5.) şi scriem legea a II-a a lui Newton în formă vectorială:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0. \qquad (45)$$

Proiectăm legea a II-a a lui Newton pe axe:

$$OX : F\cos\alpha - F_f = 0 \Rightarrow F\cos\alpha = F_f = \mu N\,; \qquad (46)$$

$$OY : N + F\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F\sin\alpha\,. \qquad (47)$$

Substituim relaţia (46) în (47) şi obţinem:

$$F\cos\alpha = \mu(mg - F\sin\alpha) \Rightarrow F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = \mu mg \Rightarrow$$

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\,. \qquad (48)$$

Forţa F este *minimă* dacă numitorul $\cos\alpha + \mu\sin\alpha$ are valoare maximă. Vom introduce un oarecare unghi β, pentru care $\mu = tg\beta$. Facem următoarea transformare trigonometrică:

$$\cos\alpha + \mu\sin\alpha = \cos\alpha + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\sin\alpha = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\beta}\,. \qquad (49)$$

Rezultă că valoarea maximă a numitorului $\cos\alpha + \mu\sin\alpha$ se obţine pentru

$$\cos(\alpha-\beta) = 1 \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \mu = tg\alpha\,. \qquad (50)$$

Substituim relaţia (2.29) în (2.27) şi obţinem:

$$F_{min} = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \frac{mgtg\alpha}{\cos\alpha + tg\alpha\sin\alpha} = \frac{mg\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha} = \frac{mg\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos\alpha}}\,.$$

sau

$$F_{min} = mg\sin\alpha\,. \qquad (51)$$

VII. Rezolvare prin metoda geometrică

Rezolvarea problemelor de extrem prin această metodă implică construirea unei diagrame schematice, trasarea tuturor forţelor care acţionează asupra unui punct material sau asupra unui sistem de puncte materiale, compunerea forţelor sau reducerea sistemului de forţe la o forţă rezultantă etc.

***Vom face rezolvarea problemei precedente prin metoda geometrică*:**

Construim diagrama schematică a tuturor forţelor care acţionează asupra corpului (Fig. 6 *a*) şi compunem $\vec{F}_f$ şi $\vec{N}$, obţinând forţa de reacţiune $\vec{Q}$, cu care suprafaţa acţionează asupra corpului. Scriem legea a II-a a lui Newton în formă vectorială:

$$\vec{F} + \vec{G} + \vec{Q} = 0\,. \qquad (52)$$

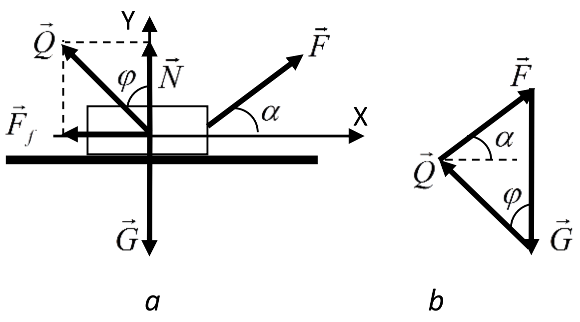

Fig. 6. Compunerea geometrică a forţelor [8]

Din Fig. 6.*a* rezultă:

$$tg\varphi = \frac{F_f}{N} = \frac{\mu N}{N} = \mu\,. \qquad (53)$$

Egalitatea vectorială (52) formează un triunghi (Fig. 6.*b*). Forţa $\vec{F} \to min$ dacă $\vec{F} \perp \vec{Q} \Rightarrow \alpha = \varphi$ (ca unghiuri dintre laturile reciproc perpendiculare) $\Rightarrow tg\alpha = \mu$. Rezultă că

$$F_{min} = mg \sin\alpha .$$

În final, trebuie să menţionăm că în lucrare au fost prezentate cele mai importante metode elementare de rezolvare a problemelor de limită şi extrem din fizică. Subiectul însă nu este epuizat nici pe departe. Există încă multe alte metode particulare, prin care matematica elementară poate aduce notabile servicii fizicii şi tehnicii privind rezolvarea problemelor de extrem. Celor interesaţi care doresc să-şi aprofundeze cunoştinţele din domeniu le-ar fi utile următoarele sfaturi:

1. După obţinerea modelului matematic al funcţiei, ce descrie un fenomen sau proces fizic, se încearcă aplicarea uneia dintre metodele elementare de determinare a extremelor funcţiei şi numai în cazul în care aceste metode nu pot ajuta la rezolvarea problemei se apelează la calculul diferenţial.

2. Aplicarea uneia sau alteia dintre metodele elementare prezentate, pentru rezolvarea acestui gen de probleme, trebuie să se facă pe criteriul simplificării metodei.

BIBLIOGRAFIE:

1. Sfichi, R., *Probleme de limită şi extrem în fizică*, Bucureşti, Editura did. şi pedagogică, 1979.
2. *Всесоюзные олимпиады по физике*, под ред. С.М.Козела, В.П.Слободянина, Москва, Вербум, 2005, 534с.
3. Gali, M., Hristev, A., *Probleme date la Olimpiadele de fizică*, Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1978.
4. Hristev, A., *Olimpiadele Internaţionale,* cap. *Fizica*, Bucureşti, Editura Scorpion, 1995.
5. Палей, А.М., *О решении задач по физике на максимум и минимум*, Физика в школе, 1970, Nr. 6, c. 84-85.
6. Баранчик, И.Е., *Решение экстремальных задач по физике*, Физика в школе, 1981, Nr. 1, c. 74-75.
7. Sfichi, R., Rusu, C., *Cu privire la unele metode elementare de rezolvare a problemelor de extrem la fizică*, Revista de fizică EVRICA, 2002, Nr. 1 (137), p. 19-22.
8. Anton, F., *Metodica rezolvării problemelor de fizică*, Revista de fizică EVRICA, 2008, Nr. 4(167), p. 4-9.
9. Кембровский, Г., *Экстремумы в задачах по физике*, Квант, 1993, Nr. ¾, c. 59-62.
10. Боровинский, Л.А., *Задачи на максимум и минимум*, Квант, 1973, Nr. 5, c. 43-46.
11. Ставчанский, Л.С., *Решение экстремальных физических задач методами элементарной математики*, Физика в школе, 1989, Nr. 4, c. 78-80.