Acta et Commentationes, Sciences of Education, nr. 2(32), 2023 ISSN 1857-0623
p. 58-70 E-ISSN 2587-3636

CZU: 004.42:517.9 DOI: 10.36120/2587-3636.v32i2.58-70

IMPLEMENTAREA APLICAȚIILOR SPECIALIZATE ÎN SOLUȚIONAREA PROBLEMEI APROXIMĂRII NUMERICE

Natalia JOSU, dr., conf. univ.
https://orcid.org/0000-0002-3687-5437
Universitatea Pedagogică de Stat ”Ion Creangă” din Chișinău
Catedra Informatică și Tehnologii Informaționale

Rezumat. În acest articol sunt examinate diverse tehnici și procedee privind soluționarea problemei aproximării numerice cu implementarea comenzilor softului Maple și a programului de calcul tabelar MS Excel.

Cuvinte- cheie: aproximare numerică, Maple, MS Excel, noduri de interpolare, regresie liniară, regresie pătratică, metoda celor mai mici pătrate.

IMPLEMENTATION OF SPECIALISED APPLICATIONS FOR SOLVING THE NUMERICAL APPROXIMATION PROBLEM

Abstract. In the following article, various techniques and procedures are examined with regard to solving the problem of numerical approximation with the implementation of Maple software commands and MS Excel spreadsheet program.

Key-words: numerical approximation, Maple, MS Excel, interpolation nodes, linear regression, quadratic regression, least squares method.

Formularea problemei. Noțiuni preliminarii

În procesul de modelare a diferitor fenomene (experimente) apar deseori situații în care nu este cunoscută expresia analitică a funcției, ci doar valorile acestei funcții $f(x_i)$ în anumite puncte x_i. Pentru a putea opera cu aceste date experimentale (a determina valoarea funcției în puncte diferite de cele cunoscute, a calcula derivata funcției, integrala funcției) este necesar de a găsi o funcție de aproximare, care ar aproxima datele inițiale, definite sub formă tabelară ca perechi $(x_i, f(x_i))$. Prin aproximarea unei funcții $f(x)$ se înțelege substituirea acesteia cu o funcție mai *avantajoasă* $f_a(x)$ atunci când:

- $f(x)$ are o formă analitică complicată;
- $f(x)$ este definită grafic sau tabelar ca rezultat al unor experimente şi este necesar de găsit forma analitică a acesteia [4].

Se consideră $[a, b] \in R$, intervalul în care sunt cunoscute valorile funcției exacte $f_e(x_i)$ (intervalul de aproximare) și $x_i \in [a, b]$, $i = 0,1, \dots, n$, $n \in N$, puncte în care este definită funcția cu care se operează. Aceste puncte (numite și *noduri de interpolare*, *puncte de sprijin*) formează o rețea de noduri. Valorile cunoscute ale funcției exacte $f_e(x)$, care trebuie aproximată, se vor nota cu y_i, $i = 0,1, \dots, n$ (numite *valori de sprijin*, *valori nodale*, *valori estimate* sau *valori aproximate*). Evident $y_i = f_e(x_i)$, unde $f_e(x)$ nu este cunoscută. Pentru a determina o funcție de aproximare $f_a(x) = f_{reg}(x)$ se va impune un anumit criteriu de aproximare. Criteriile de aproximare se împart în două categorii:

- ✓ Funcția de aproximare trece prin punctele cunoscute $f_a(x_i) = f_e(x_i)$, $i = 0,1, \dots, n$. În aceste condiții funcție de aproximare $f_a(x)$ este o funcție de interpolare, iar procedeul de determinare a funcției $f_a(x)$ se numește *interpolare*. Se observă că la procesul de interpolare valorile funcției $f_e(x_i)$ sunt cunoscute exact, adică nu sunt afectate de erori (Figura 1).

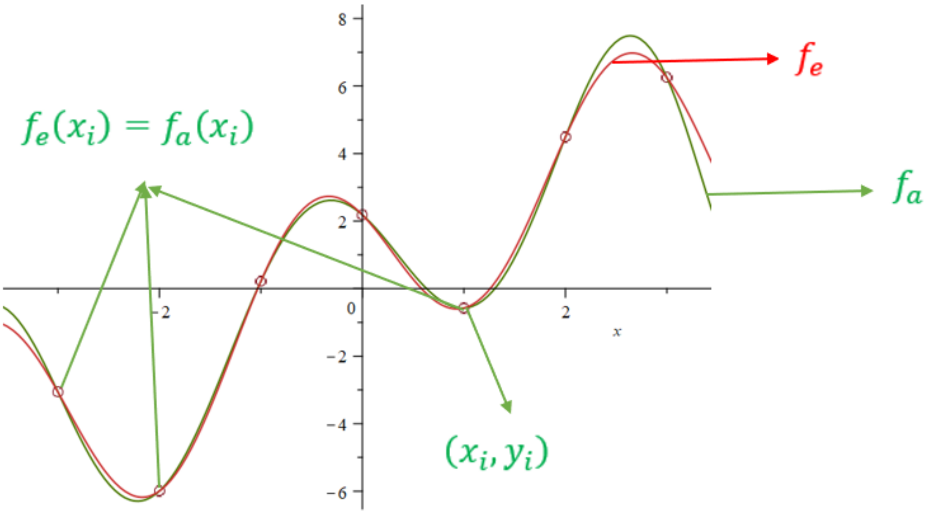


Figura 1. Interpolarea numerică

- ✓ Funcția de aproximare nu trece prin punctele cunoscute $f_a(x_i) \neq f_e(x_i)$. În aceste condiții $f_a(x)$ este o funcție de aproximare (funcție de regresie), iar procedeul de determinare a funcției de aproximare $f_a(x)$ se numește *regresie* sau *metoda celor mai mici pătrate* (MCMMP). Regresia reprezintă operația matematică prin care se determină valorile parametrilor unei funcții trasate printre punctele experimentale, din condiția minimizării distanței dintre valorile funcției exacte $f_e(x_i)$ și funcției de aproximare $f_a(x_i)$. Aproximarea funcției $f_e(x)$ cunoscute sub forma unui set de valori printr-un polinom prin MCMMP este numită și regresie polinomială, cu particularizările: regresie liniară ($y = ax + b$), regresie parabolică ($y = ax^2 + bx + c$) și regresie cubică ($y = ax^3 + bx^2 + cx + d$) (Figura 2). În calitate de funcţie de aproximare pot fi utilizate și alte funcții diferite de cele polinomiale: $y = \frac{1}{ax+b}$, $y = \frac{a}{x} + b$, $y = \frac{x}{ax+b}$, $y = ae^{mx}$, $y = a \cdot ln(x) + b$, $y = ax^4$, unde *a*, *b*, *c*, *m* - sunt parametri. După ce este stabilit comportamentul funcției exacte $f_e(x)$ conform graficului punctiform, problema se reduce la aflarea valorilor parametrilor *a*, *b*, *c*, *m* [1, 3]. MCMMP se consideră cea mai răspândită metodă de aproximare a unei dependențe $y = y(x)$ definite în mod tabelar. Dependența $y = y(x)$ se reprezintă grafic în plan și astfel se obține graficul punctiform (norul de puncte) al tabelului de date experimentale. Astfel după graficul punctiform se poate stabili forma funcției de regresie. Regresia se recomandă în condițiile în care:

- Datele experimentale sunt puternic afectate de erori. Adică, fiecărui punct x_i îi corespunde o valoare diferită față de valoarea exactă a funcției $f_e(x)$, $f_e(x_i) = f_e(x_i) + n(x_i)$, unde $n(x_i)$ reprezintă perturbația;
- Numărul de noduri este relativ mare;
- Expresia analitică a funcției exacte este cunoscută, dar este destul de complicată și nu poate fi evaluată [5, 6].

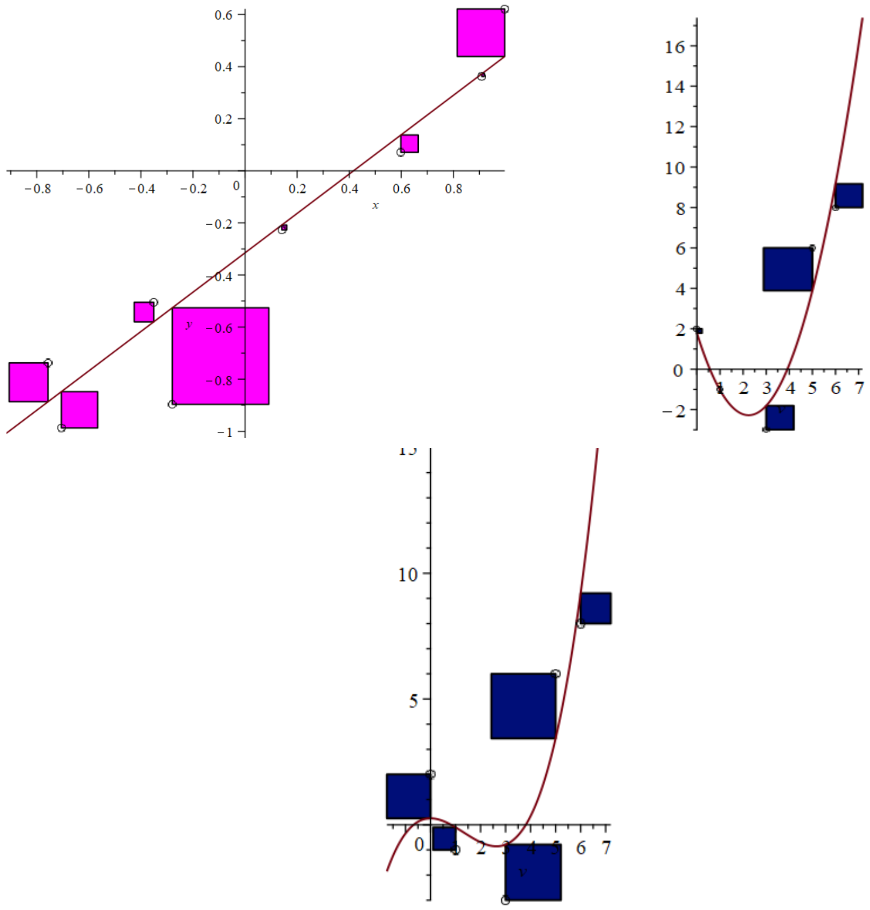


Figura 2. Aproximarea numerică (Regresia liniară, pătratică și cubică)

MCMMP este utilizată nu doar ca metodă de aproximare a datelor experimentale, dar are o aplicabilitate largă și la soluționarea cu aproximare a sistemelor de ecuații liniare și neliniare în care numărul de ecuații este mai mare decât numărul de necunoscute, în calcule statistice, în special în analiza de regresie. Metoda celor mai mici pătrate îşi are începuturile în domeniul astronomiei şi geodeziei, cu scopul de a obţine soluţii de navigaţie pe cale maritimă. Metoda dată a fost descrisă pentru prima data de Carl Friedrich Gauss în jurul anului 1794. La vârsta de 18 ani, în 1795, Carl Friedrich Gaus a pus bazele metodei celor mai mici pătrate, dar a publicat metoda abia în 1809, în volumul doi al operei sale pe tema mecanicii cereşti, „Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium”. În continuare, ne vom referi la aspectul regresiei polinomiale (caz particular: regresia liniară - relaţia dintre cele două variabile poate fi descrisă printr-o dreaptă în cadrul norului de puncte, regresie parabolică - relaţia dintre cele două variabile poate fi descrisă printr-o parabolă în cadrul norului de puncte şi regresie cubică - relaţia dintre cele două variabile poate fi descrisă printr-o funcţie cubică în cadrul norului de puncte. Regresia este strâns legată de conceptul de corelaţie. Dacă am avea o corelaţie perfectă, estimarea ar fi extrem de precisă [7].

Implementarea programului de calcul tabelar MS Excel şi softului Maple la soluționarea problemei aproximării numerice

Softurile matematice Maple, Matlab, Mathematica, programul tabelar MS Excel, pachetele statistice SPSS şi PSPP, includ o gamă largă de instrucțiuni şi comenzi definite pentru soluționarea problemei interpolării şi aproximării numerice. În continuare vor fi prezentate unele dintre ele, examinând o problemă concretă.

Problemă: În exemplul dat se vor analiza datele unui experiment ce descriu rezultatele măsurării lungimii părului a 10 subiecți până la tratarea părului cu un şampon inovator şi după tratament. *x* reprezintă vectorul variabilelor independente (explicative, predictori) şi exprimă lungimea părului în cm până la tratament şi *y* este vectorul variabilelor dependente (explicate, rezultative) şi defineşte lungimea părului în cm după tratament. Se cere să se determine funcția de regresie în dependență de forma diagramei de dispersie (norului de puncte, graficului punctiform) definită de perechile de puncte (x_i, y_i) conform Tabelului 1.

Tabelul 1. Datele experimentale

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Subiectul**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	x	15	3	8	2	56	35	13	57	25	29
3	y	16	4	15	15	58	40	22	65	19	30

Soluție: Se consideră cunoscute perechile de puncte (x_i, y_i) corespunzătoare celor două variabile pentru care dorim să studiem asocierea şi relaţia dintre ele. O primă apreciere asupra distribuției comune o vom avea dacă realizăm diagrama de „împrăştiere" a valorilor (diagrama de dispersie, graficul punctiform), adică reprezentarea în plan a punctelor (x_i, y_i). Analiza vizuală a organizării şi formei norului de puncte obţinut poate oferi indicii importante asupra relaţiei dintre variabile. Graficul punctiform poate fi construit în MS Excel, Maple, Mathematica, GeoGebra etc.

MS Excel

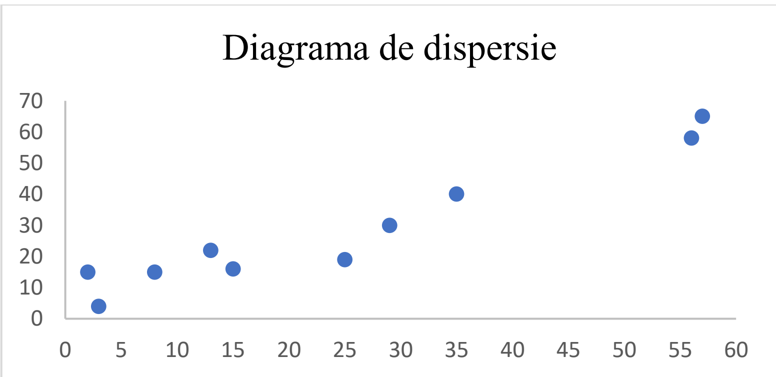


Figura 3. Graficul punctiform al datelor experimentale

Pasul 1: Se va construi graficul punctiform al datelor experimentale definite în Tabelul 1 în MS Excel (figura 3).

Pasul 2: Se observă că asocierea dintre x_i și y_i poate fi reprezentată printr-o dreaptă trasată printre punctele diagramei de împrăştiere. Dreapta, în acest caz, se consideră "cea mai bună aproximare" a punctelor din Figura 3 în sensul că aproximează cel mai bine datele inițiale. Această linie (dreaptă de regresie) satisface condiția că suma pătratelor distanţelor (pe verticală) dintre punctele (x_i, y_i) și dreaptă este minimă (Figura 4).

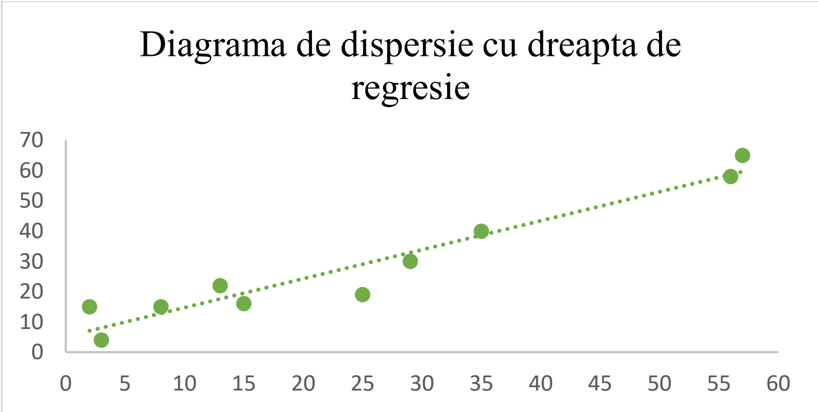
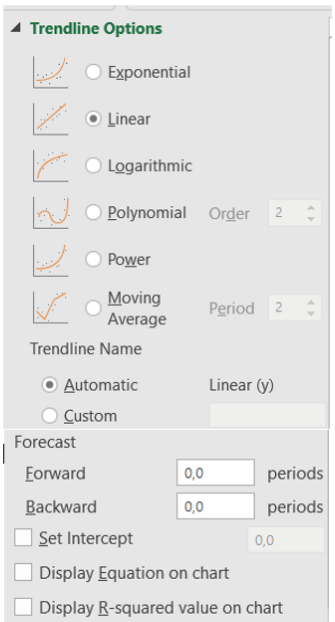


Figura 4. Graficul punctiform și dreapta de regresie

Așa cum forma norului de puncte ne indică că punctele sunt distribuie în jurul unei drepte, atunci se va alege drept funcție de regresie un polinom de gradul I (regresie liniară), $f_{reg}(x) = ax + b$. Parametrii (coeficienții polinomului de regresie) a, b se determină prin minimizarea erorii pătratice cumulate dintre valorile reale $f_e(x_i)$ și valorile aproximative $f_a(x_i)$. Diferențele $f_e(x_i) - f_a(x_i) = \varepsilon_i$ se numesc abateri, iar $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ suma pătratelor abaterilor și această sumă trebuie să fie minimă.

Pasul 3: În continuare vor fi prezentate câteva metode de soluționare a problemei date cu implementarea funcțiilor din programul de calcul tabelar MS Excel.

3.1 MS Excel. Opțiunea *Trendline*



Opțiunea *Trendline* pune la dispoziție utilizatorului modele de curbe pentru aproximarea datelor experimentale: *Exponențial*, *Linear*, *Logarithmic*, *Polynomial*, *Power*. Fereastra *Format Trendline* include de asemenea opțiunile *Display Equation on chart* (afișarea expresiei analitice a funcției de regresie) și *Display R-squared value on chart* (afișarea coeficientului de determinare – o măsură a concentrării punctelor experimentale în jurul dreptei de regresie și are valori între 0 și 1). Bifarea opțiunilor *Display Equation on chart* și *Display R-squared value on chart* are ca rezultat afișarea pe același grafic a dreptei de regresie, a expresiei analitice a funcției de regresie și a coeficientului de determinare (Figura 5).

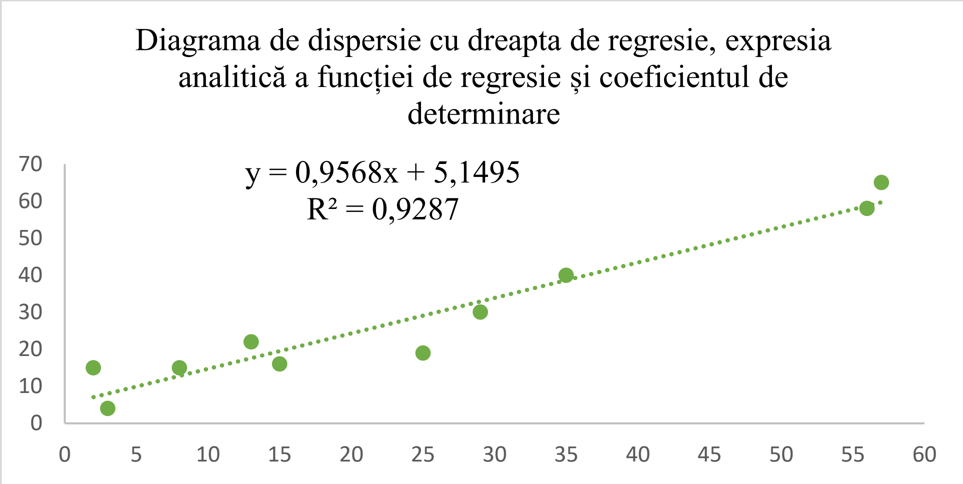


Figura 5. Opțiunile *Display Equation on chart* și *Display R-squared value on chart*

3.2 MS Excel. Opțiunea *Solver* Solver

Așa cum polinomul de regresie (în cazul problemei date) are forma $f_{reg}(x) = ax + b$ este necesar să se calculeze parametrii a, b. Se va porni de la niște valori inițiale *a=1* și *b=1*.

	M	N
1	Funcția de regresie	y=ax+b
2	a=	1
3	b=	1

În tabelul de mai jos s-au calculat valorile $Y_i = a \cdot x_i + b$, unde *a=N2* și *b=N3*, $(y_i - Y_i)^2$ și suma pătratelor abaterilor $\sum_{i=1}^{n}(y_i - Y_i)^2 = 359$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Subiectul**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	x	15	3	8	2	56	35	13	57	25	29
3	y	16	4	15	15	58	40	22	65	19	30
4	Y	16	4	9	3	57	36	14	58	26	30
5	(y-Y)^2	0	0	36	144	1	16	64	49	49	0
6	Suma pătratelor abaterilor										359

Problema se reduce la minimizarea sumei pătratelor abaterilor $\sum_{i=1}^{n}(y_i - Y_i)^2$. În acest scop selectăm celula *K6* și apelăm comanda Solver din meniul *Data* (Figura 6).

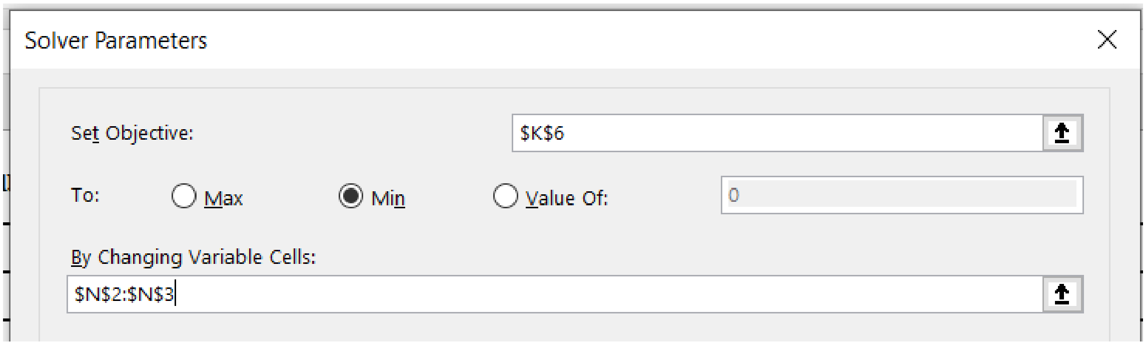


Figura 6. Instrucțiunea *Solver*

În câmpul *By Changing Variable Cells* selectăm adresa celulelor ce conțin parametri a, b după care confirmăm operația cu butonul *Solve*. Astfel obținem parametrii a, b din funcția de regresie $f_{reg}(x) = ax + b$.

Funcția de regresie	y=ax+b
a=	0,9568
b=	5,1496

Conform rezultatelor obținute, funcția de regresie va avea forma $f_{reg}(x) = 0{,}9568x + 5{,}1496$.

3.3 MS Excel. Funcția *LINEST()*

Funcția dată este utilizată pentru a aproxima setul de date experimentale cu o funcție polinomială de regresie (regresia liniară simplă $f_{reg}(x) = ax + b$ sau regresia multilplă $f_{reg}(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + b$). Formatul general este LINEST (y_i, x_i, [const], [stats]), unde y_i – vectorul ce exprimă setul de variabile dependente, x_i – vectorul (sau vectorii) ce exprimă setul de variabile independente, *const* – parametru opțional ce reprezintă o valoare logică și determină modul în care este prezentat parametrul *a*. Dacă *const=true* sau *const=" "*, atunci coeficientul *a* este calculat în mod normal. Dacă *const=false*, atunci parametrul *a=0*, iar ecuația dreptei de regresie are forma $f_{reg}(x) = bx$. *stats* – parametru opțional ce reprezintă o valoare logică și determină dacă se vor afișa ca rezultat sau nu elemente de statistică suplimentare. Dacă *const=true*, atunci se vor afișa ca rezultat elemente de statistică suplimentare (eroarea standard pentru coeficientul *a*, eroarea standard pentru coeficientul *b*, coeficientul de determinare R^2, parametru *F*-statistic indică dacă modelul ales de funcție de regresie ajusteaza bine datele din eșantion. Valoarea parametrului *F* trebuie să fie în general mai mică de 5% (0.05), *df* – parametru ce indică numărul de grade de libertate, *ssreg* – suma de regresie a pătratelor, *ssresid* – suma reziduală de pătrate. Dacă *const=false* sau este omisă, *LINEST* returnează doar constanta de interceptare și coeficientul (coeficienții) de pantă. În continuare se va soluționa aceeași problemă, utilizând datele din Tabelul 1.

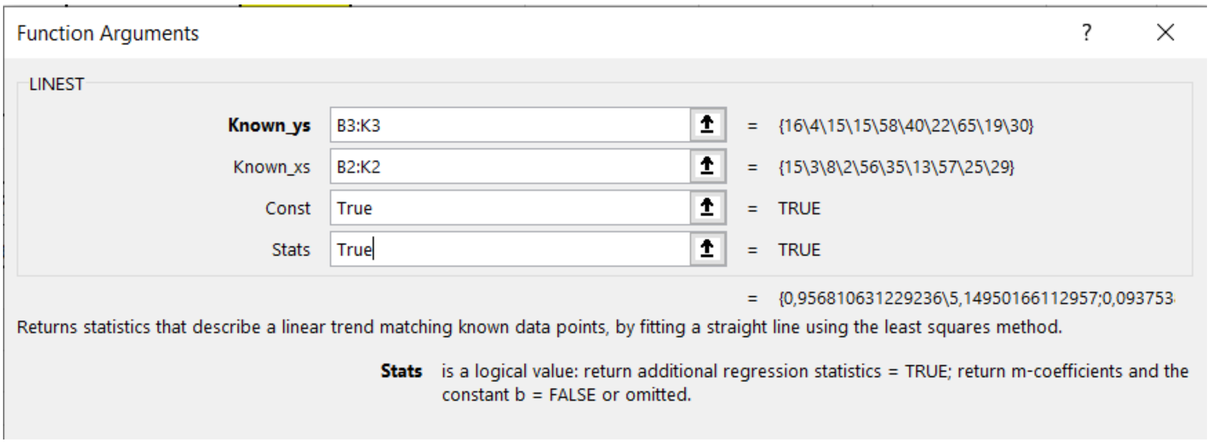


Figura 7. Instrucțiunea *Linest*

Astfel pentru datele experimentale definite în Tabelul 1, funcția de regresie este $f_{reg}(x) = 0{,}9568x + 5{,}1495$ împreună cu elementele de statistică suplimentare definite în Tabelul 2.

Tabelul 2. Descrierea elementelor de statistică suplimentare

Valoarea coeficientului de regresie *a*	0,956810631	5,149501661	Valoarea termenului liber al dreptei de regresie b
Valoarea de eroare standard pentru coeficientului de regresie *a*	0,093753872	2,896827777	Valoarea de eroare standard pentru termenul liber al dreptei de regresie *b*
Coeficientul de determinare R^2	0,928669142	5,658028724	Valoarea de eroare standard pentru valoarea estimativă Y
F-statistic	104,1534247	8	*df* – parametru ce indică numărul de grade de libertate
Suma reziduală a pătratelor	3334,293688	256,1063123	Suma de regresie a pătratelor

Termenul liber al dreptei de regresie poate fi calculat și utilizând funcția

Valoarea termenului liber al dreptei de regresie b
=INTERCEPT(B3:K3;B2:K2**)**

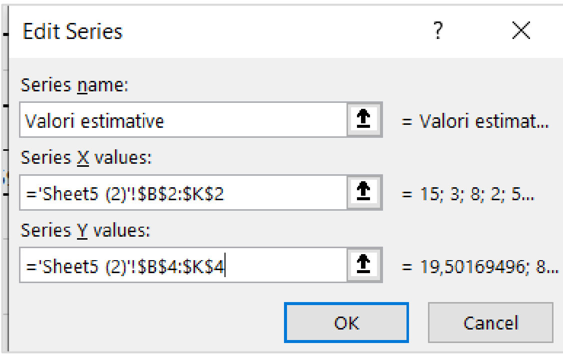
sau =INDEX(LINEST(B3:K3;B2:K2);2),

iar valoarea coeficientului de regresie se mai poate calcula utilizând funcția

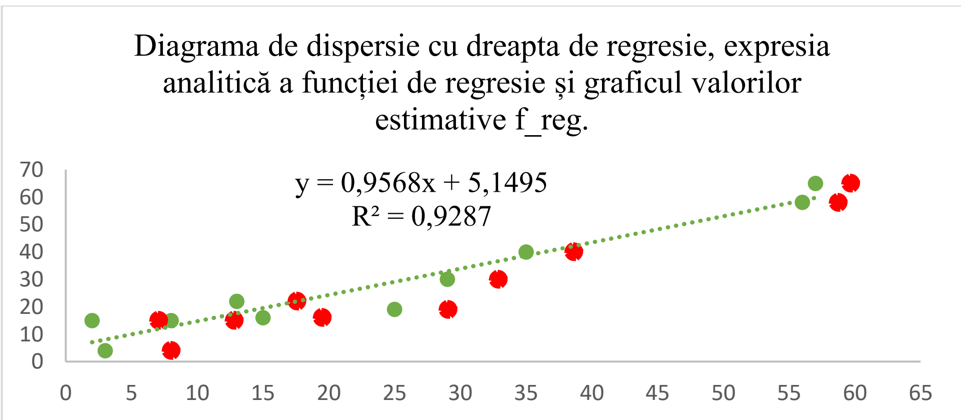
Valoarea coeficientului de regresie a
=SLOPE(B3:K3;B2:K2**)**

sau =INDEX(LINEST(B3:K3;B2:K2);1).

În continuare se va completa graficul din Figura 5 cu graficul ce reprezintă valorile estimative ale funcției $f_{reg}(x) = 0{,}9568x + 5{,}1495$. Astfel din meniul *Design* se va selecta opțiunea *Select Data* și se va completa fereastra astfel:



După selectarea butonului OK se va afișa rezultatul.



3.4 Funcția *Regression* din meniul *Data – Data Analysis*

Selectarea funcției *Regression* are ca rezultat afișarea ferestrei *Regression* (Figura 8), în care utilizatorul definește seriile x_i, y_i și modul de afișare a rezultatului împreună cu alți parametri suplimentari.

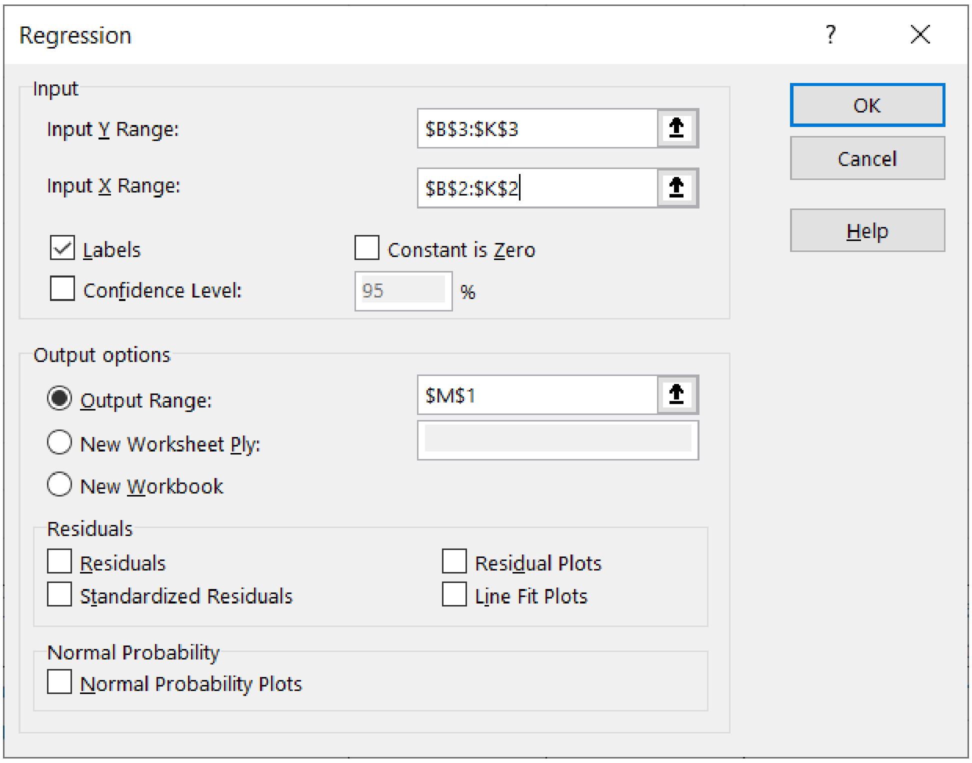


Figura 8. Fereastra *Regression*

Răspunsul returnat de funcția *Regression* este voluminos, din acest motiv am selectat doar blocul ce include coeficienții funcției de regresie. Astfel am obținut expresia analitică a funcției de regresie $f_{reg}(x) = 0{,}9466x + 5{,}797$.

	Coefficients
Intercept	
15	
3	
8	
2	
56	
35	
13	
57	5,797079652
25	0,946606505
29	

3.5 MS Excel. Metoda Cramer

Coeficienții polinomului de regresie $f_{reg}(x) = ax + b$ se vor determina soluționând sistemul de ecuații liniare 1. Astfel aplicând Metoda Cramer se vor calcula coeficienții a, b ai funcției de regresie $f_{reg}(x) = ax + b$.

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + n\cdot b = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \quad (1)$$

În tabelul de mai jos s-au calculat în MS Excel valorile $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i$.

i	x	y	x*x	x*y
1	15	16	225	240
2	3	4	9	12
3	8	15	64	120
4	2	15	4	30
5	56	58	3136	3248
6	35	40	1225	1400
7	13	22	169	286
8	57	65	3249	3705
9	25	19	625	475
10	29	30	841	870
Suma	**243**	**284**	**9547**	**10386**

Astfel am obținut $\sum_{i=1}^{10} x_i = 243$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 284$, $\sum_{i=1}^{10} (x_i)^2 = 9547$, $\sum_{i=1}^{10} x_i \cdot y_i = 10386$. Deci, sistemul de ecuații 1 ia forma:

a	9547	+	b	243	=	10386
a	243	+	b	10	=	284

În continuare se vor forma determinantul principal, determinanții *detA* și *detB*.

$$\text{DetPrincipal}= \begin{vmatrix} 9547 & 243 \\ 243 & 10 \end{vmatrix} = 36421$$

$$\text{DetA}= \begin{vmatrix} 10386 & 243 \\ 284 & 10 \end{vmatrix} = 34848$$

$$\text{DetB}= \begin{vmatrix} 9547 & 10386 \\ 243 & 284 \end{vmatrix} = 187550$$

După care se vor calcula coeficienții a, b a funcției de regresie $f_{reg} = ax + b$. Astfel obținem rezultatul:

a=	0,95681					
b=	5,1495	**f_reg(x)=**	**0,956811**	**x**	**+**	**5,1495**

3.6 MS Excel. Funcția *Trend*

Funcția *TREND* (funcție de tendință) este o funcție statistică utilizată pentru calcularea unor valori estimative ale funcției liniare de regresie $f_{reg}(x) = ax + b$ pentru anumite seturi valori (x_i, y_i) definite anterior, bazându-se pe metoda celor mai mici pătrate. Formatul general al acestei funcții este TREND (y_i, x_i, x_i_nou, [const]), unde y_i – vectorul ce exprimă setul de variabile dependente, x_i – vectorul (sau vectorii) ce exprimă setul de variabile independente, x_i_nou – reprezintă valori noi ale variabilei independente pentru care se solicită o estimare y_i, *const* – parametru opțional ce reprezintă o valoare logică și determină modul în care este prezentată constanta *b*. În continuare se va ilustra un exemplu de utilizate a funcției *Trend* în baza datelor de intrare definite în Tabelul 1. Astfel se va completa Tabelul 1 cu setul de valori independente x_i.

	L	M	N	O
Subiectul	**11**	**12**	**13**	**14**
x	37	55	28	29

Se va apela funcția *Trend* și se va completa fereastra conform Figurii 9.

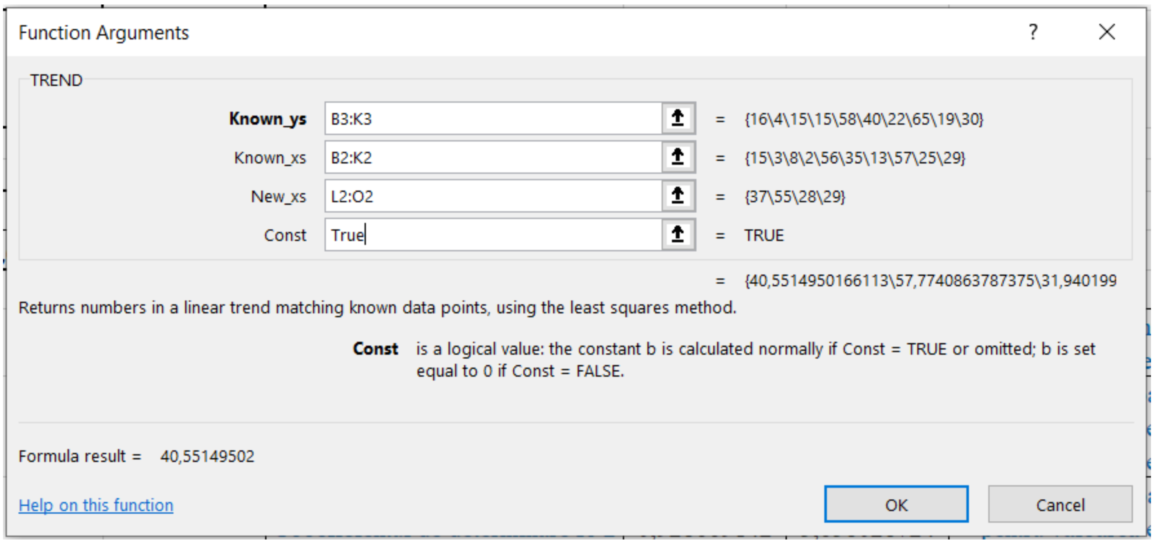


Figura 9. Fereastra funcției *Trend*

Rezultatul returnat de funcția *Trend* este ilustrat în Figura 10.

A	L	M	N	O
Subiectul	**11**	**12**	**13**	**14**
x	37	55	28	29
y	40,55149502	57,7740864	31,9401993	32,89700997

Figura 10. Rezultatul funcției *Trend*

Maple. Instrucțiunile *LeastSquaresPlot* și *LeastSquares*

Softul Maple include comenzi care permit determinarea expresiei analitice a funcției de regresie [2]. Acestea aparțin diferitor pachete și oferă răspunsul sub diverse forme.

Instrucțiunea LeastSquaresPlot a pachetului LinearAlgebra

✓ Inițiaiazarea instrucțiunilor pachetului *Student[LinearAlgebra]*

with(Student[LinearAlgebra]):

infolevel[Student[LinearAlgebra]] := 1;

✓ Definirea variabilelor independente

x_i := [15, 3, 8, 2, 56, 35, 13, 57, 25, 29];

x_i := [15, 3, 8, 2, 56, 35, 13, 57, 25, 29]

✓ Definirea variabilelor dependente

y_i := [16, 4, 15, 15, 58, 40, 22, 65, 19, 30]

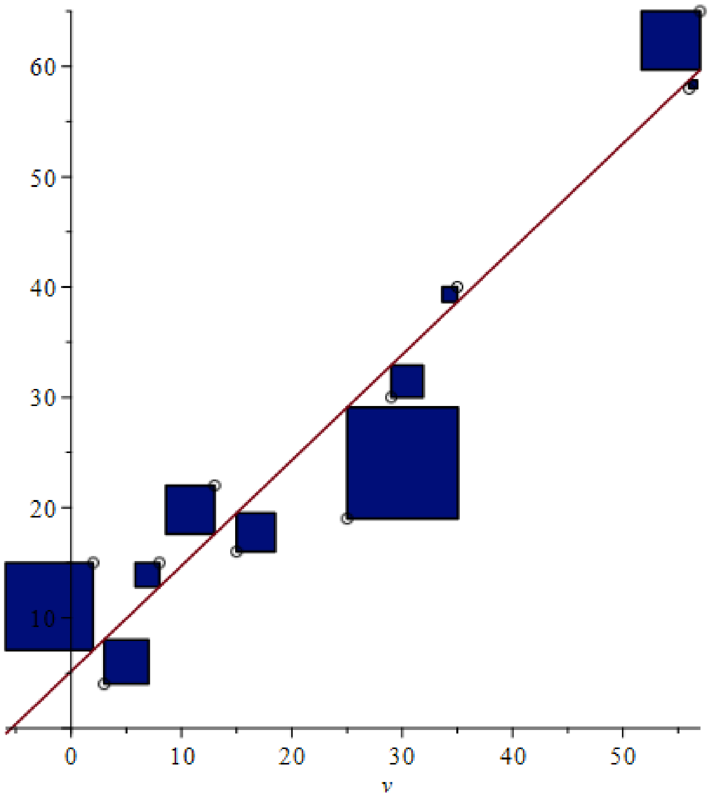
y_i := [16, 4, 15, 15, 58, 40, 22, 65, 19, 30]

- ✓ Apelarea instrucțiunii *LeastSquaresPlot* cu opțiunea *curve = a*v + b*

LeastSquaresPlot([15, 3, 8, 2, 56, 35, 13, 57, 25, 29], [16, 4, 15, 15, 58, 40, 22, 65, 19, 30], v, curve = a*v + b)

- ✓ Afișarea rezultatului instrucțiunii *LeastSquaresPlot*

```
Fitting curve: 5.150+.9568*v
Least squares error: 16.00
Maximum error: 10.07
```



Least-squares fit of the curve $var = a\,v + b$ to 10 given data points.

Instrucțiunea LeastSquares a pachetului CurveFitting

- ✓ Inițializarea instrucțiunilor pachetului *CurveFitting*

with(CurveFitting):

- ✓ Apelarea instrucțiunii *LeastSquares* cu opțiunea *curve = a*v + b*

LeastSquares([15, 3, 8, 2, 56, 35, 13, 57, 25, 29], [16, 4, 15, 15, 58, 40, 22, 65, 19, 30], v, curve = a*v + b)

- ✓ Afișarea rezultatului instrucțiunii *LeastSquares*

*1550/301 + (288*v)/301*

- ✓ Evaluarea rezultatului obținut

evalf(%)

*5.149501661 + 0.9568106312*v*

Concluzii

Implementarea softului Maple și a programului tabelar MS Excel ajută studentul să însușească materia într-un mod creativ. Acesta este participant activ în toate etapele procesului educațional, astfel creste motivația şi eficientizarea învăţării. Metodele examinate mai sus, oferă posibilitatea studierii creative a problemei aproximării numerice, care nu întotdeauna este pe înțelesul studenților. Astfel, ilustrări ale graficelor greu realizabile, ale calculelor ce necesită volum mare de timp, vizualizarea proprietăților unor funcții reprezentate grafic, permit însușirea materiei într-un mod mai ușor.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. CHIRIAC, L.; GOLOVCO, N. *Metode numerice. Îndrumar de laborator*. Chişinău, 2004. 126 p.
2. CHIRIAC, L.; JOSU, N. *Maple - sistem electronic de calcul. Aspecte teoretice și practice*. 151 p. Chișinău: UST, 2018. ISBN 978-9975-76-243-4.
3. CHIRIAC, L.; JOSU, N. *Metode numerice. Ghid pentru efectuarea lucrărilor de laborator*. Chișinău: UPSC, 2023. 214 p. ISBN 978-9975-3568-3-1.
4. CICONE, T. *Metode numerice în ingineria economică*. Capitolul II: Aproximarea și interpolarea funcțiilor, 2005-2006.
5. MARIȘ, S.; BRĂESCU, L. *Metode numerice. Probleme de seminar și lucrări de laborator*. Universitatea de Vest din Timișoara Facultatea de Matematică și Informatică, 2007.
6. POP, N. *Metode de calcul numeric*. Cluj-Napoca: Editura Risoprint, 2002.
7. ȚURCANU, A. Aplicarea metodei celor mai mici pătrate la studierea corelației dintre factorii climaterici în Republica Moldova. In: *Acta et Commentationes (Ştiinţe Exacte și ale Naturii)*, 2017. nr. 2(4), pp. 138-143. ISSN 2537-6284.