Acta et Commentationes, Sciences of Education, nr. 3(33), 2023 ISSN 1857-0623
p. 7-14 E-ISSN 2587-3636

CZU: 514.11 DOI: 10.36120/2587-3636.v33i3.7-14

METODOLOGIA REZOLVĂRII ECUAȚIILOR TRIGONOMETRICE CU UN GRAD SPORIT DE DIFICULTATE

Ilie LUPU, dr. hab., prof. univ.
https://orcid.org/0000-0003-1375-3071
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chişinău

Rezumat. În articol sunt incluse, în principiu, ecuații trigonometrice cu un grad sporit de dificultate, care vor contribui la dezvoltarea învățământului matematic, la organizarea lucrului independent și diferențiat cu elevii din liceele cu profil real.

Cuvinte cheie: ecuații, parametri, metode, gândire logică, învățământ, strategii, rezolvare.

METHODOLOGY FOR SOLVING TRIGONOMETRIC EQUATIONS WITH AN INCREASED DEGREE OF DIFFICULTY

Abstract. The article includes, in principle, trigonometric equations with an increased degree of difficulty, which will contribute to the development of mathematical education, to the organization of independent and differentiated work with students in high schools with a real profile.

Keywords: equations, parameters, methods, logical thinking, education, strategies, solving.

Ex. 1. Să rezolvăm ecuația: $\cos^4 x-(a+2)\cos^2 x-(a+3)=0$.

Inițial vom determina discriminantul trinomului respectiv cu scopul de a examina valorile rădăcinilor acestuia ce se vor conține pe segmentul [-1; 1].

$$\mathrm{D}=(a+2)^2+4(a+3)=a^2+8a+16=(a+4)^2.$$

Deoarece discriminantul este un pătrat perfect, atunci ecuația dată:

$$cos^4x-(a+2)cos^2x-(a+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cos^2x=\frac{a+2-a-4}{2} \\ cos^2x=\frac{a+2+a+4}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cos^2x=-1 \\ cos^2x=a+3\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$cos^2x=a+3$.

Ecuația $cos^2x=a+3$ va avea soluții numai pentru $0\le a+3\le 1$, deci pentru $-3\le a\le -2$.

$$x=\pm arc\ cos\sqrt{a+3}+k\pi, k\in Z.$$

Răspuns: $x=\pm arc\ cos\sqrt{a+3}+k\pi, k\in Z$, pentru $-3\le a\le -2$.

Ex. 2. Pentru care valori ale parametrului *a* ecuația $\sqrt{a+\sqrt{a+sin\,x}}=sin\,x$ are soluții?

Ecuația $\sqrt{a+\sqrt{a+sin\,x}}=sinx \Leftrightarrow \begin{cases}0\le sin\,x\le 1,\\ a+\sqrt{a+sin\,x}=sin^2x\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}0\le sin\,x\le 1,\\ sin^2x-a\ge 0\\ a+sinx=sin^4x-2asin^2x+a^2\end{cases} \quad (1)$$

Utilizând algoritmul rezolvării ecuației iraționale, am redus ecuația dată la un sistem echivalent cu aceasta. Ecuația a treia a sistemului (1) reprezintă o ecuație de gradul doi în raport cu parametrul *a*: $a^2-a(2\,sin^2x+1)+(sin^4x-\,sin\,x)=0$. (2)

Calculăm discriminantul trinomului din stânga ecuației.

$$\mathrm{D}=(2\,sin^2x+1)^2-4(sin^4x-sin\,x)=4\,sin^2x+4\,sin\,x+1=(2\,sin\,x+1)^2$$

Discriminantul reprezintă un pătrat perfect, de aceea ecuația (2) are soluțiile:

$$\left[\begin{array}{l} a = sin^2x + \sin x + 1, \\ a = sin^2x - sin\,x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} sin^2x + \sin x + 1 - a = 0 \\ sin^2x - sin\,x - a = 0 \end{array}\right. . \qquad (3)$$

Astfel, am obținut două ecuații și evident apare problema, pentru care valori ale parametrului *a*, măcar o soluție a acestor ecuații aparține segmentului [-1; 1]?

Concomitent aceste ecuații se conțin în sistemul (1), care conține încă 2 condiții:

$$\begin{cases} 0 \le \ sin\,x \le 1 \\ sin^2x \ - a \ge 0. \end{cases}$$

Ținând cont de aceste restricții, prima ecuație a totalității (3) nu are soluții. De aceea este suficient să rezolvăm numai ecuația a doua. Considerăm funcția $f(t) = t^2 - t - a$, $t \in [-1; 1]$. Pentru că acest trinom pătrat să aibă pe segmentul [-1; 1] măcar o soluție, este necesar și suficient, ca ordonata vârfului parabolei să fie negativă, iar măcar în unul din punctele extreme ale segmentului [-1; 1] valoarea însuși a trinomului, din contra, nenegativă (abscisa vârfului parabolei este egală cu $\frac{1}{2}$).

Astfel, valorile căutate ale parametrului *a* sunt date în următoarele condiții:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - a \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} -a \ge -0 \\ 2 - a \ge 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -\frac{1}{4} \\ a \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le a \le 0.$$

Răspuns: $-\frac{1}{4} \le a \le 0$.

<u>Metoda a doua</u>. Din condițiile ecuației rezultă că $0 \le \sin x \ \le 1$. Notăm $t = sin\,x, 0 \le t \le 1$ și considerăm funcția $f(t) = \sqrt{t + a}$. Atunci pe segmentul [0; 1] pentru fiecare din valorile căutate funcția este monoton crescătoare.

Ecuația se scrie sub forma $f\big(f(t)\big) = t$, care în baza monotoniei funcției va fi echivalentă cu ecuația $f(t) = t$. Astfel: $\sqrt{a + \sqrt{a + sin\,x}} = sinx \Leftrightarrow \sqrt{a + sin\,x} = sin\,x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le sin\,x \le 1, \\ sin^2x - sin\,x \ - a = 0 \end{cases}$

Utilizând metoda a doua, am ajuns la o ecuație unică, care probabil are soluții. Procedând, ca și în cazul precedent, obținem că $-\frac{1}{4} \le a \le 0$.

Ex. 3. Să rezolvăm ecuația $sin^6x + cos^6x = a$.

Pentru $a \le 0$ ecuația dată nu are soluții. Ulterior vom considera $a > 0$.

Să efectuăm unele transformări identice asupra membrului stând al ecuației:

$$sin^6x + cos^6x = (sin^2x)^3 + (cos^2x)^3 =$$
$$= (sin^2x + cos^2x) \cdot (sin^4x - sin^2xcos^2x + cos^4x) =$$
$$= sin^4x + cos^4x + 2sin^2xcos^2x - 3sin^2xcos^2x =$$
$$= (sin^2x + cos^2x)^2 - 3\,sin^2x\,cos^2x = 1 - \frac{3}{4}sin^2 2x =$$
$$= 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - cos4x}{2} = \frac{5 + 3\,cos4x}{8}$$

Astfel, ecuația dată ia forma: $\frac{5+3\,cos4x}{8} = a \Leftrightarrow 5 + 3\,cos4x = 8a \Leftrightarrow cos4x = \frac{8a-5}{3}$, care are soluții pentru $-1 \leq \frac{8a-5}{3} \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 8a - 5 \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq 8a \leq 8 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq a \leq 1$.

De aceea, pentru $\frac{1}{4} \leq a \leq 1, cos4x = \frac{8a-5}{3} \Leftrightarrow 4x = \pm \arccos\frac{8a-5}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{8a-5}{3} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z$.

Ex. 4. Să calculăm valorile parametrului p, pentru care ecuația $1 + psinx = p^2 - sin^2x$ are soluții.

Scriem ecuația sub forma $sin^2x + psinx + 1 - p^2 = 0$ și considerăm funcția $f(t) = t^2 + pt + 1 - p^2$.

Ecuația dată va avea soluții numai în cazul, când măcar una din rădăcinile trinomului pătrat $f(t)$ va aparține $[-1; 1]$. Pentru aceasta este necesar să se verifice una din condițiile: sau $f(1) \cdot f(-1) \leq 0$, sau

$$\begin{cases} D_f \geq 0, \\ f'(-1) \leq 0, \\ f(-1) \geq 0, \\ f'(1) \geq 0, \\ f(1) \geq 0. \end{cases}$$

Prima condiție corespunde cazului, când pe segmentul $[-1; 1]$ este situată exact o rădăcină a trinomului, iar a doua – când ambele rădăcini aparțin segmentului dat. Valorile căutate ale parametrului sunt date de totalitatea acestor condiții.

În primul caz obținem:

$$(2 - p + p^2)(2 - p - p^2) \leq 0 \Leftrightarrow (p+2)(p+1)(p-1)(p-2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leq p \leq -1, \\ 1 \leq p \leq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \leq |p| \leq 2.$$

În cazul al doilea obținem:

$$\begin{cases} 5p^2 - 4 \geq 0, \\ p - 2 \leq 0, \\ -p^2 - p + 2 \geq 0, \\ p + 2 \geq 0, \\ -p^2 + p + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |p| \geq \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ -2 \leq p \leq 2, \\ -1 \leq p \leq 2, \\ -2 \leq p \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \leq |p| \leq 1$$

Reuniunea soluțiilor obținute constituie inegalitatea $\frac{2}{\sqrt{5}} \leq |p| \leq 2$.

Răspuns: $\frac{2}{\sqrt{5}} \leq |p| \leq 2$.

Ex. 5. Să determinăm valorile parametrului $a \in R$ pentru care soluțiile ecuației $|cos2x| = |sin^2x - a|$ verifică restricția $0 \leq x \leq 2\pi$.

Ecuația dată este echivalentă cu totalitatea de două ecuații:

$$cos2x = sin^2x - a \quad (1)$$

$$cos2x = a - sin^2x. \quad (2)$$

Deoarece $sin^2x = \frac{1-cos2x}{2}$, ecuațiile (1) și (2) iau forma: $cos2x = \frac{1-2a}{3}$, $cos2x = 2a - 1$.

Ecuația $cos2x = \frac{1-2a}{3}$ are soluții atunci și numai atunci când $-1 \leq \frac{1-2a}{3} \leq 1$, adică $-1 \leq a \leq 2$ și $x = \pi n \pm \frac{1}{2} arccos\frac{1-2a}{3}, n \in Z$.

Ecuația $cos\ 2x = 2a - 1$ are soluții dacă și numai dacă $-1 \leq 2a - 1 \leq 1$, adică $0 \leq a \leq 1$ și $x = m\pi \pm \frac{1}{2}\mathrm{arccos}(2a-1), \mathrm{m} \in \mathrm{Z}$.

Deoarece $0 \leq \frac{1}{2} arccos\frac{1-2a}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ și $0 \leq \frac{1}{2}\mathrm{arccos}\ (2a-1) \leq \frac{\pi}{2}$, atunci ușor putem găsi soluțiile ecuației date care aparțin domeniului $0 \leq x \leq 2\pi$.

Răspuns: Pentru $-1 \leq a \leq 2$ avem soluțiile $\frac{1}{2} arccos\frac{1-2a}{3}, \pi \pm arccos\frac{1-2a}{3}$, $2\pi - \frac{1}{2}\mathrm{arccos}\frac{1-2a}{3}$; pentru $0 \leq a \leq 1$ avem soluțiile $\frac{1}{2}\mathrm{arccos}(2a-1)$, $\pi \pm \frac{1}{2}\mathrm{arccos}\ (2a-1), 2\pi - \frac{1}{2}\mathrm{arccos}(2a-1)$.

Ex. 6. Să rezolvăm ecuația $\sqrt{17sec^2x + 16(\frac{1}{2}tg\ x \cdot sec\ x - 1)} = 2tg\ x\ (1 + 4\ sin\ x)$.

DVA: $\cos x\ \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$.

Aducem expresia de sub radical la forma:

$$17sec^2x + 16\left(\frac{1}{2}tg\ x \cdot sec\ x - 1\right) = \frac{17}{cos^2x} + \frac{8sinx}{cos^2x} - 16 =$$

$$= \frac{1}{cos^2x}(17 + 8\sin x - 16\,cos^2x) = \frac{1}{cos^2x}(17 + 8\ sinx - 16 + 16sin^2x) =$$

$$= \frac{1}{cos^2x} \cdot (16sin^2x + 8\ sinx + 1) = \frac{(4sinx+1)^2}{cos^2x}.$$

Astfel ecuația dată ia forma: $\frac{|4\sin x+1|}{|cosx|} = 2tgx \cdot (1 + 4sinx)$.

Dacă $4sinx + 1 = 0$, atunci $x = n\pi + (-1)^{n+1}arcsin\frac{1}{4},\ n \in Z$.

Fie $1 + 4sinx \neq 0$. Atunci examinăm 2 cazuri:

1) pentru $1 + 4sinx > 0$ avem $\sin x > -\frac{1}{4}$ și ecuația dată ia forma: $\frac{1}{|\cos x|} = 2tgx$ sau $2tgx \times |\cos x| = 1$ care este echivalentă cu totalitatea a două sisteme:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ cos\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ cos\ x < 0. \end{cases}$$

Sistemul al doilea nu are soluții pentru $sinx > -\frac{1}{4}$. Primul sistem are soluțiile: $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, n \in Z$.

2) fie $1 + 4sinx < 0$, adică $sinx < -\frac{1}{4}$. Atunci ecuația dată ia forma $2tgx \cdot |\cos x| = -1$, care este echivalentă cu totalitatea a două sisteme $\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ cos\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ cos\ x < 0. \end{cases}$

Sistemul al doilea nu are soluții pentru $sinx < -\frac{1}{4}$, iar primul este verificat de $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi, n \in Z$.

Răspuns: $n\pi + (-1)^{n+1} arcsin\frac{1}{4},\ n \in Z; \pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi, n \in Z$.

Ex. 7. Să rezolvăm ecuația $\sqrt{tgx + sin\,x} + \sqrt{tgx - sin\,x} = 2\sqrt{tgx} \times cosx$.

Deoarece $tgx + \sin x = tgx(1 + cosx) = 2tgx \times cos^2\frac{x}{2}$, iar $tgx - \sin x = 2tgx \times sin^2\frac{x}{2}$, ecuația dată ia forma:

$$\sqrt{2tgx} \times \left|cos\frac{x}{2}\right| + \sqrt{2tgx} \times \left|sin\frac{x}{2}\right| = 2\sqrt{tgx} \times cosx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{tgx}\left(\left|cos\frac{x}{2}\right| + \left|sin\frac{x}{2}\right|\right) = \sqrt{2}cosx.$$

De aici $tgx = 0,\ x = k\pi,\ k \in Z\ (tgx > 0)$.

Să rezolvăm ecuația $\left|cos\frac{x}{2}\right| + \left|sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{2} \times cosx$, iar apoi să excludem pe acele soluții care nu verifică inecuația $tgx > 0$. Ridicăm ambii membri la pătrat și pentru a păstra echivalența cerem ca $cosx \geq 0$. Astfel obținem sistemul $\begin{cases} 1 + |sinx| = 2cos^2x \\ cos\,x \geq 0 \end{cases}$. Deoarece $2cos^2x = 2 - 2sin^2x = 2 - 2|sinx|^2$, atunci obținem ecuația $2|sinx|^2 + |sinx| - 1 = 0$, de unde $|sinx| = \frac{-1\pm 3}{4}$. Însă $|sinx| \geq 0$, deci rămâne să rezolvăm ecuația $|sinx| = \frac{1}{2}$, adică $sinx = \pm\frac{1}{2}$, soluțiile fiind $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in Z$. Dacă $k = 2n$ atunci $cosx = \cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) > 0$; însă dacă $k = 2n + 1$, atunci $cosx = \cos\left(\pi \pm \frac{\pi}{6}\right) < 0$.

Răspuns: $k\pi$; $\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$.

Ex. 8. Să rezolvăm ecuația $sin\,4x = mtgx$, unde $m > 0$. DVA: $cosx \neq 0$.

Inițial exprimăm $sin4x$ prin $sin\,x$ și $cos\,x$: $sin\,4x = 4sinxcosx\ (2cos^2x - 1)$, atunci ecuația ia forma:

$$4sinxcosx\ (2cos^2x - 1) = \frac{msinx}{cosx} \Leftrightarrow sinx\left[4cosx(2cos^2x - 1) - \frac{m}{cosx}\right] = 0.$$

Dacă $sinx = 0$, atunci $x = k\pi$. Acestea sunt soluțiile ecuației date, deoarece $\cos k\pi \neq 0$. Dacă expresia de sub parantezele pătrate este egală cu zero, adică:

$$4cosx(2cos^2x - 1) - \frac{m}{cosx} = 0,$$

atunci obținem ecuația bipătrată $8\,cos^4x - 4cos^2x - m = 0$, printre soluțiile căreia nu poate fi $cosx = 0$.

Rezolvând ecuația bipătrată, obținem $cos^2x = \frac{1\pm\sqrt{1+2m}}{4}$. Deoarece $m > 0$, atunci în fața radicalului considerăm semnul plus (este evident că în acest caz $x \neq 0$). Utilizând formula $cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$, transformăm ecuația la forma $cos2x = \frac{-1+\sqrt{1+2m}}{2}$. Membrul stând al acestei ecuații este pozitiv. Pentru ca ecuația să aibă soluții, este suficient ca $\frac{-1+\sqrt{1+2m}}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2m} \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 4$.

Răspuns: pentru $m > 0, x = n\pi,\ n \in Z$;

pentru $0 < m \leq 4, x = \pm\frac{1}{2}arccos\frac{1+\sqrt{1+2m}}{2} + n\pi,\ n \in Z$.

Ex. 9. Să rezolvăm ecuația $cos^4x + 2sin^4x = a$.

Pentru $a \leq 0$ ecuația dată nu are soluții. Ulterior vom considera $a > 0$. Scriem ecuația astfel:

$$(cos^2x)^2 + 2(sin^2x)^2 = a \Leftrightarrow \left(\frac{1 + cos2x}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1 - cos2x}{2}\right)^2 = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3cos^2 2x - 2cos2x - 4a = 0. \qquad (1)$$

Discriminantul trinomului (în raport cu *cos2x*) este $D = 48a - 32$. Dacă $D < 0$, adică $48a - 32 < 0 \Rightarrow a < \frac{2}{3}$ ecuația (1) nu are soluții reale. Pentru $a > \frac{2}{3}$ ecuația (1) are 2 soluții $cos2x = \frac{1\pm2\sqrt{3a-2}}{3}$, de unde:

$$x = k\pi \pm \frac{1}{2}arccos\frac{1\pm2\sqrt{3a-2}}{3},$$

dacă $-1 \leq \frac{1\pm2\sqrt{3a-2}}{3} \leq 1$.

Inecuația $-1 \leq \frac{1+2\sqrt{3a-2}}{3} \leq 1$ are soluțiile $\frac{2}{3} \leq a \leq 1$, iar inecuația $-1 \leq \frac{1-2\sqrt{3a-2}}{3} \leq 1$ are soluțiile $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$.

Deci, $x = k\pi \pm \frac{1}{2}arccos\frac{1\pm2\sqrt{3a-2}}{3}$, dacă $\frac{2}{3} \leq a \leq 1$ și $x = k\pi \pm \frac{1}{2}arccos\frac{1-2\sqrt{3a-2}}{3}$, dacă $1 < a \leq 2$.

Răspuns: pentru $a < \frac{2}{3}, \emptyset$; pentru $\frac{2}{3} \leq a \leq 1, x = k\pi \pm \frac{1}{2}arccos\frac{1\pm\sqrt{3a-2}}{3}$;
pentru $1 < a \leq 2, x = k\pi \pm arccos\frac{1-2\sqrt{3a-2}}{3}$.

Ex. 10. Să rezolvăm ecuația $asin\frac{x}{2} - \left(sinx + sin\frac{3x}{2}\right) = 0$.

Scriem ecuația dată astfel:

$$asin\frac{x}{2} - \left(2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} + 3sin\frac{x}{2} - 4sin^3\frac{x}{2}\right) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sin\frac{x}{2}\left[a - 2cos\frac{x}{2} - 3 + 4\left(1 - cos^2\frac{x}{2}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow sin\frac{x}{2}\left(a - 2cos\frac{x}{2} - 4cos^2\frac{x}{2} + 1\right) = 0,$$

de aici $sin\frac{x}{2}$ =0, $x = 2k\pi$; și $4cos^2\frac{x}{2} + 2cos\frac{x}{2} - (a + 1) = 0$, de unde $cos\frac{x}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{4a+5}}{4}$, soluții reale pentru

$$a \geq -\frac{5}{4}. \qquad (1)$$

Deoarece $|cosx| \leq 1$, ecuația $cos\frac{x}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{4a+5}}{4}$ va avea soluții când:

$$-1 \leq \frac{-1\pm\sqrt{4a+5}}{4} \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq -1 \pm \sqrt{4a + 5} \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq \pm\sqrt{4a + 5} \leq 5.$$

Rezolvăm separat fiecare din aceste 2 inegalități.

1)$-3 \leq \sqrt{4a + 5} \leq 5$. Inecuația din stânga este verificată de orice *a* din (1), iar cea din dreapta o scriem astfel: $4a + 5 \leq 25$, de unde: $a \leq 5$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $cos\frac{x}{2} = \frac{1+\sqrt{4a+5}}{4}$ pentru $-\frac{5}{4} \leq a \leq 5$.

2) $-3 \le -\sqrt{4a+5} \le 5$. Aici inecuația din dreapta este verificată de orice a din (1), iar cea din stânga o scriem astfel: $\sqrt{4a+5} \le 3$ sau $4a+5 \le 9$, de unde $a \le 1$. (3)

Din (1) și (3) rezultă că $cos\frac{x}{2} = \frac{-1-\sqrt{4a+5}}{4}$ pentru $-\frac{5}{4} \le a \le 1$.

Prin urmare, dacă $a < -\frac{5}{4}$ sau $a > 5$, avem numai $x = 2k\pi$. Dacă $1 < a \le 5$, atunci $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \pm 2arccos\frac{-1+\sqrt{4a+5}}{4} + 4k\pi$; însă dacă $-\frac{5}{4} \le a \le 1$ atunci $x_1 = 2k\pi$; $x_2 = \pm 2arccos\frac{-1\pm\sqrt{4a+5}}{4} + 4k\pi$.

Ex. 11. Să rezolvăm ecuația $b\ ctg\ x - b\ tg\ x - 5a\ ctg\ x = 4a$. DVA: $x \ne \frac{k\pi}{2},\ k \in Z$.

Scriem ecuația dată astfel: $b\ tg^2x + 4a\ tg\ x + (5a-b) = 0$. (1)

1) Dacă $a = b = 0$, obținem identitatea $0 = 0$. Prin urmare, în acest caz orice valoare $x \ne \frac{k\pi}{2}$ verifică ecuația.
2) Dacă $a \ne 0, b = 0$, atunci ecuația ia forma $ctg\ x = -\frac{4}{5}$, de unde $x = -arc\ ctg\frac{4}{5} + k\pi$.
3) Dacă $a \ne 0, b = 5a$, atunci ecuația ia forma $5\ tg\ x + 4 = 0$, de unde $x = -arc\ tg\frac{4}{5} + k\pi$.
4) În sfârșit (pentru $b \ne 0$), dacă $b \ge a$ și $a \le 0$, sau $b \ge 4a \ge 0$, iar dacă $b \le 4a \le 0$ sau $b \le a$ și $a \ge 0$, atunci, rezolvând ecuația (1) obținem

$$x = arc\ tg\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-5ab+b^2}}{b} + k\pi,\ k \in Z.$$

Ex. 12. Să rezolvăm ecuația $4\ sinx + 2\ cosx = 2 + 3\ tgx$.

Utilizăm metoda substituției universale $tg\ \frac{x}{2} = t$. Inițial excludem $x = \pi(2n+1)$ pentru care nu există $tg\ \frac{x}{2}$, iar la finele rezolvării vom verifica dacă $x = \pi(2n+1)$ verifică ecuația dată. Să exprimăm *sin x, cos x* și *tg x* prin $tg\ \frac{x}{2}$: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $tg\ x = \frac{2t}{1-t^2}$.

Astfel ecuația dată ia forma:

$$\frac{8t}{1+t^2} + \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} = 2 + \frac{6t}{1-t^2} \Leftrightarrow \frac{8t+2-2t^2}{1+t^2} = \frac{2-2t^2+6t}{1-t^2} \Leftrightarrow \frac{4t+1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2+3t}{1-t^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t(2t^3 - 7t^2 - 2t + 1) = 0. \quad (1)$$

Făcând verificarea ne convingem că $x = \pi(2n+1)$ nu sunt soluții ale ecuației date. Una din soluțiile ecuației algebrice (1) $t = 0$. Deci, $tg\ \frac{x}{2} = 0$, de unde $x = 2k\pi$.

În baza teoremei despre rădăcinile raționale ale polinomului cu coeficienți întregi, probăm $t = \pm 1; \pm\frac{1}{2}$. Ușor ne convingem că $t = -\frac{1}{2}$ este a doua soluție a ecuației. Împărțind polinomul $2t^3 - -7t^2 - 2t + 1$ la $2t+1$, obținem ecuația $t^2 - 4t + 1 = 0$, care are 2 soluții: $t = 2+\sqrt{3}$, $t = 2-\sqrt{3}$.

Dacă $tg\ \frac{x}{2} = 2+\sqrt{3}$, atunci $sinx = \frac{2(2+\sqrt{3})}{1+(2+\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2}$; același rezultat îl obținem și pentru $tg\ \frac{x}{2} == 2-\sqrt{3}$ (s-a utilizat formula $sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$).

Deci, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ tg\ \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}, \frac{x}{2} = -arc\ tg\ \frac{1}{2} + k\pi,\ x = 2k\pi - arc\ tg\ \frac{1}{2}$.

Răspuns: $2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ 2k\pi - 2arc\ tg\ \frac{1}{2}$.

Ex. 13. Să rezolvăm ecuația $sin^6x + cos^6x = a(sin^4x + cos^4x)$.

Pentru $a \leq 0$ ecuația dată nu are soluții. Ulterior vom considera $a > 0$.

$$sin^6x + cos^6x = (sin^2x)^3 + (cos^2x)^3 =$$
$$= (sin^2x + cos^2x)(sin^4x - sin^2xcos^2x + cos^4x) =$$
$$sin^4x + cos^4x + 2sin^2xcos^2x - 3sin^2xcos^2x = (sin^2x + cos^2x)^2 - 3sin^2xcos^2x$$
$$= 1 - \frac{3}{4}sin^22x.$$
$$sin^4x + cos^4x = (sin^2x + cos^2x)^2 - 2sin^2xcos^2x = 1 - \frac{1}{2}sin^22x.$$

Astfel ecuația dată ia forma (1) $1 - \frac{3}{4}sin^22x = a(1 - \frac{1}{2}sin^22x)$, de unde

$sin^22x = \frac{4(a-1)}{2a-3}$ sau $\frac{1-cos4x}{2} = \frac{4(a-1)}{2a-3}$, de aici $cos4x = \frac{5-6a}{2a-3}$. (2)

Este necesar ca $2a - 3 \neq 0$, adică $a \neq \frac{3}{2}$. Dacă $a = \frac{3}{2}$ atunci din (1) rezultă $1 = \frac{3}{2}$, deci pentru $a = \frac{3}{2}$ ecuația dată nu are soluții.

Pentru ca ecuația (2) să aibă soluții este necesar ca $-1 \leq \frac{5-6a}{2a-3} \leq 1$, de unde $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.

Deci, pentru $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ ecuația (2) are soluțiile $x = \pm\frac{1}{4}arc\ cos\frac{5-6a}{2a-3} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z$.

Răspuns: pentru $\frac{1}{2} \leq a \leq 1, x = \pm\frac{1}{4}arc\ cos\frac{5-6a}{2a-3} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z$;

pentru $a < \frac{1}{2}$ și pentru $a > 1$ ecuația dată nu are soluții.

Prezenta lucrare se adresează celor interesați de succesul studierii matematicii, precum și cadrelor didactice. Lucrarea vine să înlesnească munca profesorului, elevului, studentului, constituind un adevărat ghid metodologic.

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale în sistemul de educație din Republica Moldova din perspectiva inter/transdisciplinarității (concept STEAM)", inclus în „Program de stat" (2020-2023), Prioritatea IV: Provocări societale, cifrul 20.80009.0807.20, cu suportul financiar oferit de Agenția Națională pentru Dezvoltare și Cercetare

Bibliografie

1. LUPU, I. *Funcții, ecuații și inecuații trigonometrice*. Chișinău: Lyceum, 1999.
2. РЯЗАНОВСКИЙ, А. Р.; МИРОШИН, В. В. *Математика. Решение задач повышенной сложности*. Москва: Интеллект-Центр, 2008.
3. ВАХОВСКИЙ, Е.Б.; РЫВКИН, А.А. *Задачи элементарной математике повышенной трудности*. Москва: «Наука», 1969.
4. СИВАШИНСКИЙ, И.Х. *Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям*. Москва: «Наука», 1971.