CZU: 531/534:378 DOI: 10.36120/2587-3636.v34i4.22-32

FORMAREA NOȚIUNILOR DE MOMENTE DE INERȚIE ALE SISTEMELOR MECANICE ÎN CADRUL MECANICII TEORETICE

Leonid GUȚULEAC, dr., conf. univ.
https://orcid.org/0009-0008-2727-3996
Catedra Fizică Teoretică și Experimentală, Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă" din Chișinău

Rezumat. Mecanica este primul compartiment al fizicii studiat în învățământul universitar. În acest compartiment se formează un șir de noțiuni și concepte, care sunt folosite ulterior în alte compartimente. O cunoaștere bună a mecanicii poate permite studenților de a însuși mai bine celelalte capitole ale fizicii. Printre noțiunile fundamentale ale fizicii se numără inerția unui corp. Măsură a inerției unui corp în mișcarea lui de translație este masa inerțială. Această mărime fizică se întâlnește destul de des. Mult mai rar se folosesc noțiunile de momente de inerție, care descriu inerția unui corp într-o mișcare de rotație. Determinarea acestor momente este necesară la descrierea mișcărilor de rotație. Materialul expus în acest articol poate servi în calitate de suport pentru studenții, care studiază cursul de Mecanică Teoretică.
Cuvinte cheie: învățământ universitar, studiul mecanicii, sistem de puncte materiale, impuls, masă, centru de masă, momente de inerție.

FORMATION OF THE CONCEPTS OF MOMENTS OF INERTIA OF MECHANICAL SYSTEMS WITHIN THE FRAMEWORK OF THEORETICAL MECHANICS

Abstract. Mechanics is the first branch of physics studied in university education. In this branch, a series of concepts and notions are formed, which are subsequently used in other branches. A good understanding of mechanics can enable students to better grasp other chapters of physics. Among the fundamental concepts of physics is the inertia of a body. The measure of the inertia of a body in its translational motion is the inertial mass. This physical quantity is encountered quite often. Much less frequently used are the notions of moments of inertia, which describe the inertia of a body in rotational motion. Determining these moments is necessary for describing rotational movements. The material presented in this article can serve as a support for students studying the course of Theoretical Mechanics.
Keywords: university education, mechanics study, system of material points, impulse, mass, center of mass, moments of inertia.

Introducere

Mișcarea mecanică a corpurilor se studiază în cadrul mecanicii, primul compartiment al fizicii studiat în învățământul universitar. O cunoaștere bună a mecanicii poate permite studenților de a însuși mai bine celelalte capitole ale fizicii, prin urmare este importantă formarea și însușirea corectă a noțiunilor principale ale acestui domeniu. Unul din compartimentele mecanicii se ocupă cu studierea corpurilor rigide. Rigidul este un model al unui corp solid, care nu se deformează. Un rigid poate efectua o diversitate de mișcări, care pot fi destul de complicate. O mișcare elementară a unui rigid poate fi descrisă destul de bine, dacă combinăm în modul cuvenit două mișcări simple: de translație și de rotație

$[1,\ pp. 217-222]$. Un exemplu de o astfel de mişcare este rostogolirea unui cilindru pe un plan înclinat. Cilindrul se roteşte în jurul axei sale, iar această axă îndeplineşte o mişcare de translaţie.

Printre noţiunile fundamentale ale fizicii se numără inerţia unui corp. Pentru a descrie mişcarea de rotaţie a unui rigid este necesar de a cunoaşte momentele lui de inerţie, în special, în raport cu axa de rotaţie $[2,\ pp. 146-149]$. Problemele referitoare la determinarea momentelor de inerţie sunt destul de importante în tehnică. Exemple de rotaţii: elicele unui ventilator, arborele volant al motorului unui automobil, roţile unui vehicul, pedalele unei biciclete etc. Dacă cunoaştem momentele de inerţie ale unor părţi componente rotitoare ale unei instalaţii tehnice, care trebuie elaborată, atunci vom reuşi să realizăm un proiect destul de calitativ.

Noţiunile de momente de inerţie se aplică şi la modelul unui sistem de puncte materiale. Iar un rigid este un caz particular al unui aşa sistem.

1. Impulsul unui sistem de puncte materiale

Un sistem de puncte materiale reprezintă o totalitate de puncte materiale, care interacţionează reciproc şi sunt concentrate într-o anumită regiune limitată a spaţiului. În calitate de exemplu poate servi sistemul solar, în care interacţiunile se datorează atracţiei universale dintre corpurile, care formează acest sistem.

Mişcarea mecanică a unui corp are un caracter relativ. Pentru a descrie mişcarea trebuie să alegem un sistem de referinţă. În continuare vom lucra într-un sistem de referinţă fix, adică absolut. Vom alege pentru acest sistem de referinţă un sistem de coordonate cartezian de dreapta $OXYZ$.

Examinăm un sistem de puncte materiale cu masele m_i (în continuare i va reprezenta numărul de ordine al punctului material), care se mişcă în spaţiu. Într-un moment arbitrar de timp vitezele lor sunt $\vec{v}_i$, iar impulsurile:

$$\vec{P}_i = m_i \cdot \vec{v}_i \qquad (1).$$

Aceste impulsuri pot varia în timp datorită forţelor, care acţionează asupra punctelor materiale respective. Notăm prin $\vec{F}_i$ rezultanta forţelor aplicate punctului i. O parte din aceste forţe sunt interioare. Ele sunt exercitate de celelalte puncte din sistem. Notăm suma lor prin $\vec{F}_i^{in}$. O altă parte o reprezintă forţele exterioare, care vin din partea corpurilor, care nu fac parte din sistem. Notăm suma lor prin $\vec{F}_i^{ex}$. Evident, că:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{in} + \vec{F}_i^{ex} \qquad (2).$$

Din legea de bază a dinamicii unui punct material rezultă, că derivata în raport cu timpul a impulsului unui punct material este egală cu rezultanta forţelor, care acţionează asupra acestui punct $[3,\ p. 73]$:

$$\frac{d\vec{P}_i}{dt} = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{in} + \vec{F}_i^{ex} \qquad (3).$$

Ecuații de acest fel se pot scrie pentru toate punctele sistemului. Adunăm aceste ecuații parte cu parte și grupăm aparte forțele interioare și cele exterioare:

$$\sum_i \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{in} + \sum_i \vec{F}_i^{ex} \qquad (4).$$

Trebuie să ne clarificăm cu fiecare din sumele din această expresie. Începem cu prima și o transformăm:

$$\sum_i \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{P}_i.$$

Suma geometrică a impulsurilor particulelor unui sistem se numește impuls al sistemului:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i = \sum_i (m_i \cdot \vec{v}_i) \qquad (5).$$

Obținem:

$$\sum_i \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{P}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (6).$$

Cea de-a doua sumă din (4) reprezintă suma geometrică a tuturor forțelor interioare din sistem. Vom determina această sumă pentru cazul simplu al unui sistem format din 3 particule, care se atrag reciproc.

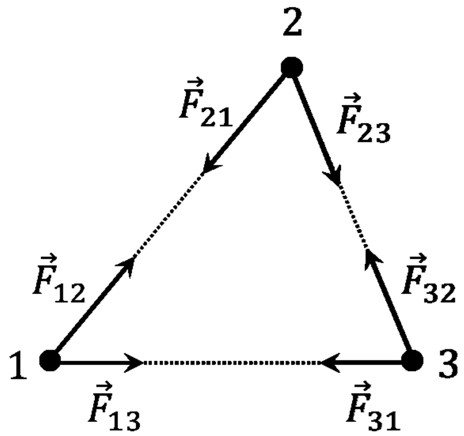

Figura 1. Forțele de interacțiune dintre particulele sistemului

Prezentăm forțele interioare (fig.1) și determinăm suma lor geometrică. Expresiile de tip $\vec{F}_i^{in}$ pentru cele 3 particule au forma:

$$\vec{F}_1^{in} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13},$$
$$\vec{F}_2^{in} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23},$$
$$\vec{F}_3^{in} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}.$$

Astfel, suma examinată:

$$\sum_i \vec{F}_i^{in} = \vec{F}_1^{\ in} + \vec{F}_2^{\ in} + \vec{F}_3^{\ in},$$

$$\sum_i \vec{F}_i^{in} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32},$$

$$\sum_i \vec{F}_i^{in} = \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}\right) + \left(\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}\right) + \left(\vec{F}_{23} + \vec{F}_{32}\right).$$

Prima paranteză de aici descrie interacțiunea dintre primele două particule. Ele se atrag reciproc cu forțe egale ca modul și opuse ca sens în conformitate cu legea a treia a lui Newton și obținem:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \qquad\qquad \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0.$$

În mod analog pentru celelalte două paranteze se obține:

$$\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} = 0, \qquad\qquad \vec{F}_{23} + \vec{F}_{32} = 0.$$

Deci, suma geometrică a tuturor forțelor interioare din sistem este egală cu zero:

$$\sum_i \vec{F}_i^{in} = 0 \qquad (7).$$

Această concluzie rămâne valabilă pentru orice sistem.

Ultima sumă din expresia (4) reprezintă suma geometrică a tuturor forțelor exterioare, care acționează asupra particulelor din sistem și se numește vector principal al forțelor exterioare:

$$\sum_i \vec{F}_i^{ex} = \vec{F}^{ex} \qquad (8).$$

Substituim expresiile (6,7 și 8) în (4) și obținem:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ex} \qquad (9).$$

Această expresie reprezintă teorema variației impulsului unui sistem de puncte materiale: derivata în raport cu timpul a impulsului unui sistem de puncte materiale este egală cu vectorul principal al forțelor exterioare aplicate sistemului.

Un sistem se numește închis, dacă asupra particulelor lui nu acționează forțe din exterior ($\vec{F}^{ex} = 0$). Din (9) rezultă, că impulsul unui sistem închis nu variază:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0, \qquad\qquad \vec{P} = const \qquad (10).$$

Această expresie reprezintă teorema conservării impulsului unui sistem mecanic și se aplică pe larg la rezolvarea problemelor despre ciocnirile dintre corpuri.

2. Momentul impulsului unui sistem de puncte materiale

Revenim la cazul general al unui sistem arbitrar. Pozițiile punctelor materiale în sistemul de referință ales sunt indicate de vectorii de poziție $\vec{r}_i$. Conform definiției momentele impulsurilor particulelor în raport cu originea sunt determinate de expresiile $[4,\ \text{p.}132]$:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \times \vec{P}_i] \tag{11}$$

Momentul impulsului sistemului în raport cu originea este o sumă geometrică a momentelor particulelor lui:

$$\vec{L} = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{P}_i] \tag{12}$$

La mișcarea particulelor aceste momente pot varia. Variația li $\vec{L}$ poate fi descrisă cu ajutorul derivatei lui în raport cu timpul:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i [\vec{r}_i \times \vec{P}_i] = \sum_i \frac{d}{dt}[\vec{r}_i \times \vec{P}_i] = \sum_i \left(\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{P}_i\right] + \left[\vec{r}_i \times \frac{d\vec{P}_i}{dt}\right]\right).$$

Exprimăm derivatele din partea dreaptă. Prima din ele reprezintă viteza punctului i, iar cea de-a doua determină rezultanta forțelor aplicate acestui punct:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i, \qquad \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{in} + \vec{F}_i^{ex}.$$

Obținem:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \left([\vec{v}_i \times \vec{P}_i] + [\vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{in} + \vec{F}_i^{ex})]\right).$$

În această expresie avem $[\vec{v}_i \times \vec{P}_i] = 0$, deoarece $\vec{v}_i \upuparrows \vec{P}_i$. Obținem:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,in}\right] + \sum_i \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,ex}\right].$$

Sumele din această expresie reprezintă momentele rezultante ale forțelor interioare și ale celor exterioare respectiv $[5,\ \text{pp.}176-178]$:

$$\left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,in}\right] = \vec{M}_i^{\,in}, \qquad \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,ex}\right] = \vec{M}_i^{\,ex}.$$

Astfel, derivata examinată va fi egală cu:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i^{\,in} + \sum_i \vec{M}_i^{\,ex} \tag{12}$$

Trebuie să ne clarificăm cu aceste sume. Suma geometrică a momentelor tuturor forțelor exterioare, care acționează asupra particulelor sistemului se numește moment principal al forțelor exterioare:

$$\sum_i \vec{M}_i^{ex} = \vec{M}^{ex} \tag{13}$$

Suma geometrică a tuturor forțelor interioare din sistem:

$$\sum_i \vec{M}_i^{in} = \vec{M}^{in} = \vec{M}_1^{\,in} + \vec{M}_2^{\,in} + \vec{M}_3^{\,in} + \cdots$$

Determinăm această sumă pentru sistemul din 3 particule prezentat în fig.1. Asupra primei particule acționează forțele $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{13}$. Momentele lor sunt $\vec{M}_{12}, \vec{M}_{13}$. Astfel:

$$\vec{M}_1^{\ in} = \vec{M}_{12} + \vec{M}_{13}.$$

În mod analog pentru celelalte două particule avem:

$$\vec{M}_2^{\ in} = \vec{M}_{21} + \vec{M}_{23}, \qquad \vec{M}_3^{\ in} = \vec{M}_{31} + \vec{M}_{32}.$$

Deci, obținem:

$$\sum_i \vec{M}_i^{\ in} = \vec{M}_{12} + \vec{M}_{13} + \vec{M}_{21} + \vec{M}_{23} + \vec{M}_{31} + \vec{M}_{32}.$$

Este comod de a examina interacțiunile dintre particule grupându-le în perechi. Grupăm termenii din această expresie:

$$\sum_i \vec{M}_i^{\ in} = \left(\vec{M}_{12} + \vec{M}_{21}\right) + \left(\vec{M}_{13} + \vec{M}_{31}\right) + \left(\vec{M}_{23} + \vec{M}_{32}\right) \qquad (14).$$

Prima paranteză de aici corespunde interacțiunii dintre primele două particule. Folosim fig.2 pentru a exprima momentele din această paranteză.

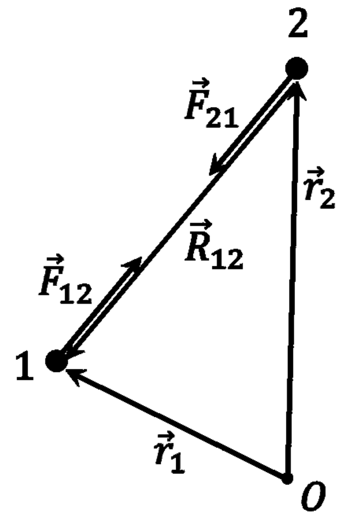

Figura 2. Referitor la determinarea momentelor forțelor de interacțiune dintre primele două particulele ale sistemului

Folosim definiția momentelor forțelor, transformăm și obținem:

$$\vec{M}_{12} = \left[\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}\right], \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

$$\vec{M}_{21} = \left[\vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}\right] = -\left[\vec{r}_2 \times \vec{F}_{12}\right],$$

$$\vec{M}_{12} + \vec{M}_{21} = \left[\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}\right] - \left[\vec{r}_2 \times \vec{F}_{12}\right] = \left[(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}\right].$$

Din fig. 2 se poate observa, că vectorul de poziție al primului punct în raport cu cel de-al doilea se poate exprima prin diferența:

$$\vec{R}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2.$$

Obținem, în final, un produs vectorial dintre doi vectori antiparaleli ($\vec{R}_{12} \uparrow\downarrow \vec{F}_{12}$), care este egal cu zero:

$$\vec{M}_{12} + \vec{M}_{21} = \left[\vec{R}_{12} \times \vec{F}_{12}\right] = 0.$$

Celelalte două paranteze din (14) la fel vor fi egale cu zero din considerente asemănătoare:

$$\vec{M}_{13} + \vec{M}_{31} = 0, \qquad \vec{M}_{23} + \vec{M}_{32} = 0.$$

Astfel, am demonstrat, că suma geometrică a momentelor forțelor interioare din sistem este egală cu zero:

$$\sum_i \vec{M}_i^{in} = 0 \tag{15}$$

Această concluzie la fel este valabilă pentru orice sistem.

Substituim (13) și (15) în (12) și obținem teorema despre variația momentului impulsului unui sistem de puncte materiale: derivata în raport cu timpul a momentului impulsului unui sistem de puncte materiale este egală cu momentul principal al forțelor exterioare aplicate sistemului:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{ex} \tag{16}$$

Dacă sistemul este închis, atunci $\vec{M}^{ex} = 0$ și momentul impulsului său nu variază:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \qquad \vec{L} = const \tag{17}$$

Am obținut teorema despre conservarea momentului impulsului unui sistem mecanic.

3. Centrul de masă al sistemului de puncte materiale

Centrul de masă (CM) al unui sistem de puncte materiale reprezintă un punct geometric al spațiului, poziția cărui este determinată de expresia:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_i (m_i \vec{r}_i) \tag{18}$$

Aici m este masa sistemului $(m = \sum_i m_i)$. La mișcare vectorii de poziție ai particulelor $\vec{r}_i$ variază și, în rezultat, poate varia și poziția CM. Pentru a descrie mișcarea centrului de masă în sistemul de referință fix transformăm (18) și derivăm în raport cu timpul:

$$m\vec{r}_c = \sum_i (m_i \vec{r}_i), \qquad m\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \sum_i \left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right).$$

Derivatele din această expresie reprezintă vitezele CM și ale particulelor respectiv:

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{v}_c, \qquad \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i.$$

Folosim (5) și obținem:

$$m\vec{v}_c = \sum_i (m_i \vec{v}_i) = \vec{P} \tag{19}$$

Deci, impulsul unui sistem este egal cu impulsul, pe care l-ar avea CM, dacă în el ar fi concentrată toată masa sistemului. Derivăm această expresie în raport cu timpul, folosim (9) și obținem legea de mișcare a CM $[6,\ \text{pp.} 156 - 157]$:

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ex} \qquad (20).$$

Dacă sistemul este închis, atunci $\vec{F}^{ex} = 0$ și pentru un așa sistem avem:

$$\frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0, \qquad \vec{v}_c = const \qquad (21).$$

Deci, *centrul de masă al unui sistem închis se mișcă rectiliniu și uniform*. Centrul de masă al sistemului închis se mai numește centru de inerție al lui. Dacă de CM al sistemului închis vom atașa un sistem de referință mobil, atunci el va fi inerțial.

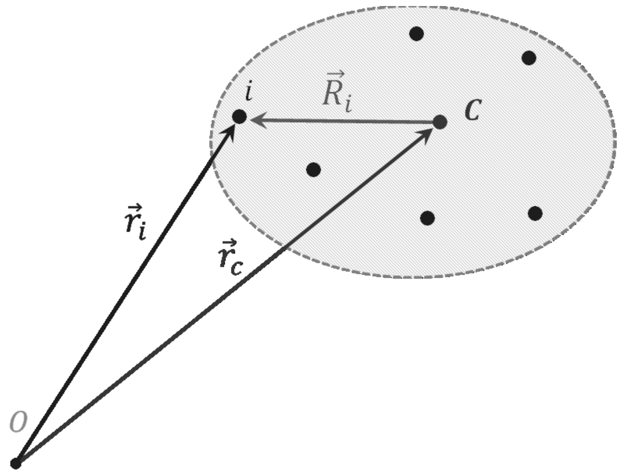

Figura 3. Poziția punctului i în sistemele de referință fix și al CM

Mișcarea particulelor poate fi descrisă și în sistemul CM. Pozițiile lor în acest sistem sunt indicate de vectorii $\vec{R}_i$. Legătura dintre vectorii de poziție din aceste două sisteme de referință se poate stabili cu ajutorul fig.3:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{R}_i \qquad (22).$$

Evident, că pentru poziția CM în sistemul de referință al CM vom obține $\vec{R}_C = 0$. Folosim definiția CM pentru acest sistem de referință și obținem:

$$m\vec{R}_c = \sum_i (m_i\vec{R}_i), \qquad \sum_i (m_i\vec{R}_i) = 0 \qquad (23).$$

Ultima expresie se folosește destul de des atunci, când se descrie mișcarea particulelor în sistemul de referință al CM.

4. Momente de inerție ale unui sistem de puncte materiale

Momentele de inerție ale unui corp descriu cantitativ inerția lui la mișcarea de rotație. Pentru un sistem de particule se definesc momente de inerție în raport cu anumite puncte (momente polare), axe (momente axiale) și plane (momente planare). La calculele acestor momente contează masele particulelor și distanțele lor până la punctul, axa sau planul respectiv.

Momentul de inerție al unui sistem de puncte materiale în raport cu un punct (axă sau plan) este o sumă a produselor maselor particulelor lui la pătratele distanțelor lor până la punctul (axa sau planul) de reper. Aceste momente de inerție corespund diferitor configurații ale sistemului și pot varia la mișcarea particulelor. Mai importante în practică sunt momentele axiale.

Astfel, dacă pozițiile particulelor în sistemul de referință fix (în raport cu p.O) sunt indicate de vectorii $\vec{r}_i$, atunci momentul de inerție al sistemului în raport cu p.O va fi:

$$j_O = \sum_i (m_i r_i^2) \qquad (24).$$

Dacă am ales sistemul CM, atunci pozițiile particulelor sunt indicate de vectorii $\vec{R}_i$ și momentul de inerție în raport cu p.C va fi:

$$j_C = \sum_i (m_i R_i^2) \qquad (25).$$

Vom stabili legătura dintre aceste două momente de inerție folosind fig.3 și expresiile (22) și (23):

$$j_O = \sum_i (m_i r_i^2) = \sum_i (m_i \vec{r}_i^{\,2}) = \sum_i \left(m_i (\vec{r}_c + \vec{R}_i)^2 \right),$$

$$j_O = \sum_i \left(m_i (\vec{r}_C^{\,2} + 2\vec{r}_c \cdot \vec{R}_i + \vec{R}_i^{\,2}) \right) = \vec{r}_C^{\,2} \sum_i m_i + 2\vec{r}_c \sum_i (m_i \vec{R}_i) + \sum_i (m_i \vec{R}_i^{\,2}),$$

$$\sum_i (m_i \vec{R}_i) = 0, \qquad j_O = m r_C^2 + \sum_i (m_i R_i^2),$$

$$j_O = j_C + m r_C^2 \qquad (26).$$

Alegem o axă de reper OO^* și stabilim distanțele ρ_i de la particule până la această axă. Momentul axial de inerție în raport cu această axă va fi $[1,\ \text{pp}.\,227 - 228]$:

$$J_{OO} = \sum_i (m_i \rho_i^2) \qquad (27).$$

Alegem o altă axă de reper CC^*, care trece prin CM și este paralelă cu axa OO^*. Notăm prin b_i distanțele de la particule până la axa CC^*. Momentul axial de inerție în raport cu această axă va fi:

$$J_{CC} = \sum_i (m_i b_i^2) \qquad (28).$$

Vom stabili legătura dintre aceste două momente folosind fig.4, unde au fost indicate și niște distanțe suplimentare. Vom folosi pe larg relațiile valabile pentru triunghiurile dreptunghice din această figură. Începem cu ρ_i^2, care se conține în (27):

$$\rho_i^2 = r_i^2 - g_i^2, \qquad g_i = g_C + f_i,$$

$$\rho_i^2 = r_i^2 - (g_C + f_i)^2 = r_i^2 - g_C^2 - 2g_C f_i - f_i^2,$$

$$g_C^2 = r_C^2 - \rho_C^2, \qquad f_i^2 = R_i^2 - b_i^2,$$

$$\rho_i^2 = r_i^2 - r_C^2 + \rho_C^2 - 2g_C f_i - R_i^2 + b_i^2,$$

$$J_{OO} = \sum_i (m_i \rho_i^2) = \sum_i \left(m_i (r_i^2 - r_C^2 + \rho_C^2 - 2g_C f_i - R_i^2 + b_i^2)\right),$$

$$J_{OO} = \sum_i (m_i r_i^2) - r_C^2 \sum_i m_i + \rho_C^2 \sum_i m_i - 2g_C \sum_i m_i f_i - \sum_i (m_i R_i^2) + \sum_i (m_i b_i^2).$$

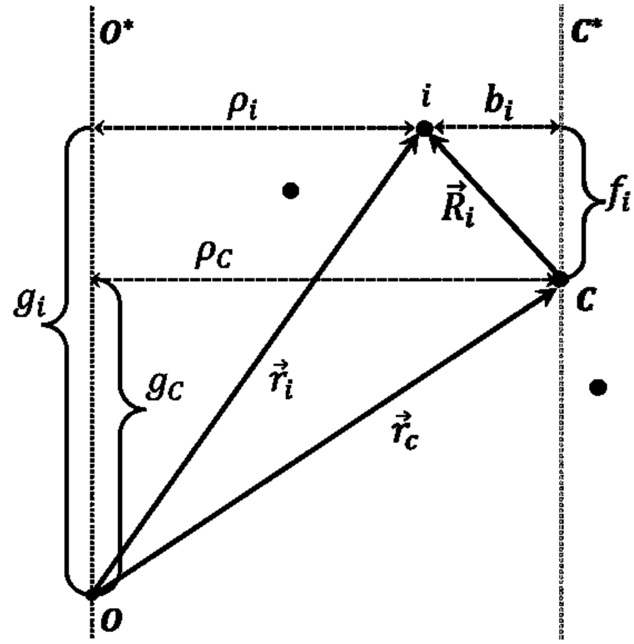

Figura 4. Referitor la determinarea momentelor axiale de inerție

Proiectăm (23) pe axa CC^*:

$$\sum_i \left(m_i \vec{R}_i\right) = 0, \qquad \sum_i m_i f_i = 0.$$

Folosim expresiile anterioare și obținem:

$$J_{OO} = j_O - mr_C^2 + m\rho_C^2 - j_C + J_{CC}.$$

Substituim aici (26), notăm pentru comoditate distanța dintre cele două axe $\rho_C = a$ și obținem:

$$J_{OO} = J_{CC} + ma^2 \qquad (29).$$

Am obținut teorema lui Steiner $[7,\ \text{pp}. 80 - 82]$: momentul de inerție al unui sistem de puncte materiale în raport cu o axă arbitrară este egal cu suma dintre momentul ei de inerție în raport cu o axă, care este paralelă cu prima și trece prin centrul lui de masă și produsul dintre masa sistemului și pătratul distanței dintre aceste axe.

Momentul J_{CC} se calculează ușor atunci, când axa respectivă este o axă de simetrie materială a sistemului.

Alegem un plan de reper Π și stabilim distanțele h_i de la particule până la acest plan. Momentul planar de inerție în raport cu acest plan va fi:

$$J_{\Pi} = \sum_i (m_i h_i^2) \quad (30).$$

Momentele planare luate aparte nu prezintă interes. Ele pot fi calculate ușor pentru un sistem ce posedă plane de simetrie materială și, de regulă, se folosesc pentru a calcula mai ușor momentele axiale. Aceste calcule sunt necesare atunci, când axele de reper alese pentru calculul momentelor axiale nu sunt și axe de simetrie materială ale sistemului.

Concluzii

Momentele axiale de inerție ale unui corp sunt o măsură a inerției lui la rotația în jurul axelor date. Un moment de inerție, în general, este o mărime fizică tensorială, care exprimă măsura prin care un corp se opune modificării stării sale de repaus relativ sau de mișcare de rotație uniformă la acțiunea unui moment al unei forțe, care poate modifica stare de mișcare a lui. Se mai poate spune, că momentul de inerție este o măsură a faptului cât de greu este să modifici viteza de rotație a corpului dat. Momentul de inerție este analog masei inerțiale la mișcarea de translație.

Cunoașterea momentelor de inerție este necesară pentru a calcula energia cinetică la rotație $[1,\ \text{pp}. 236 - 237]$ și pentru a confecționa dispozitive tehnice cu rotații cât mai efective. Astfel, folosind reperele expuse mai sus, studenții își vor forma, însuși și utiliza corect noțiunilor principale ale mecanicii, primul compartiment al fizicii studiat în învățământul universitar, ceea ce le va permite să însușească mai bine celelalte capitole ale fizicii.

Bibliografie

1. АЛЕКСАНДРОВ, Н.В. и др. Курс общей физики. Механика. Москва: Просвещение, 1978. 416 с.
2. ГЕРШЕНЗОН, Е.М. и др. Механика. Москва: Академия, 2001. 384 с.
3. ДЕТЛАФ, А.А. и др. Курс физики. Т.1. Механика. Основы молекулярной физики и термодинамики. Москва: Высшая школа, 1973. 384 с.
4. ИРОДОВ, И.Е. Механика. Основные законы. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. 309 с.
5. СИВУХИН, Д.В. Общий курс физики. Т. I. Механика. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 560 с.
6. САВЕЛЬЕВ, И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Санкт-Петербург: Лань, 2021. 340 с.
7. RUSU, A., RUSU, S. Curs de Fizica. I. Bazele mecanicii clasice. Chişinău: Tehnica-UTM, 2014, 132 p.