Acta et Commentationes, Sciences of Education, nr. 1(35), 2024 ISSN 1857-0623
p. 7-11 E-ISSN 2587-3636

CZU: 511.212:514.11 DOI: 10.36120/2587-3636.v35i1.7-11

ROLUL CONGRUENTELOR ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ

Ilie LUPU, dr. hab., prof. univ.
https://orcid.org/0000-0003-1375-3071
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă" din Chișinău

Rezumat. În articol sunt examinate definiția și proprietățile congruențelor și sunt propuse și rezolvate exemple concrete de aplicare a lor la rezolvarea problemelor matematice prin diverse metode și strategii.
Cuvinte cheie: rezolvarea problemelor matematice, congruență, modulo, modul al congruenței, termen al congruenței, membru al congruenței, numere reciproc prime.

THE ROLE OF CONGRUENCES IN SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS

Abstract. In the article, the definition and properties of congruences are examined, and concrete examples of their application to solving mathematical problems through various methods and strategies are proposed and solved.
Key words: solving mathematical problems, congruence, modulo, the modulus of congruence, term of the congruence, member of the congruence, mutually prime numbers.

Două numere întregi a și b se numesc congruente modulo m dacă, fiind împărțite la numărul natural m, dau unul și același rest r, unde $0 \le r < m$.

Notația congruenței este: $a \equiv b \ (mod\ m)$. Se citește a este congruent cu b modulo m. Numărul m se numește modul al congruenței $a \equiv b \ (mod\ m)$.

Dacă $a \equiv b \ (mod\ m)$, atunci:

a) $a \equiv b + mt$, unde t este număr întreg;
b) Diferența $a - b$ se divide cu m.

Invers, dacă $a = b + mt$ sau $a - b$ se divide cu m, atunci a $\equiv b \ (mod\ m)$.

Noțiunea și notația „≡" au fost introduse de K. Gaus în anul 1801.

Proprietățile congruențelor.

1^0. Dacă $a \equiv c \ (mod\ m)$ și $b \equiv c \ (mod\ m)$, atunci $a \equiv b \ (mod\ m)$.

2^0. Congruențele modulo m pot fi adunate termen cu termen

Fie $a_1 \equiv b_1 (mod\ m)$, $a_2 \equiv b_2 (mod\ m)$, ..., $a_n \equiv b_n (mod\ m)$, atunci $a_1 = b_1 + mt_1$, $a_2 = b_2 + mt_2$, ..., $a_n + b_n + mt_n$.

Prin urmare, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)(mod\ m)$.

Consecința 1. Orice termen al congruenței poate fi transferat dintr-un membru în altul cu semnul opus.

Consecința 2. Orice membru al congruenței poate fi adunat cu un număr arbitrar egal cu multiplul modulului.

3^0. Congruențele modulo m poate fi înmulțite membru cu membru.

Consecința 1. Ambii membrii ai congruenței pot fi ridicați la aceeași putere.

Dacă $a \equiv b \ (mod\ m)$, atunci $a^n \ \equiv b^n \ (mod\ m)$.

<u>*Consecința* 2.</u> Ambii membrii ai congruenței pot fi înmulțiți cu unu și același număr.

Dacă $a \equiv b \ (mod\ m)$, atunci $ak \ \equiv bk \ (mod\ m)$.

<u>4^0</u>. Ambii membri ai congruenței pot fi împărțiți la divizorul lor comun, dacă acest divizor și modulul sunt numere prime între ele.

Fie a $\equiv b \ (mod\ m)$, $a = a_1 d$ și $b = b_1 d$, iar $(m, d) = 1$. Obținem $a - b = (a_1 - b_1)d \ \vdots\ m$. Însă $(m, d) = 1$ și de aceea $(a_1 - b_1) \ \vdots\ m$. Deci, $a_1 \equiv b_1 (mod\ m)$.

<u>5^0</u>. Ambii membri ai congruenței și modulul pot fi înmulțiți cu unul și același număr întreg. Dacă $a \equiv b \ (mod\ m)$, atunci $ak \equiv bk \ (mod\ mk)$.

<u>6^0</u>. Ambii membri ai congruenței și modulul pot fi împărțiți la divizorul lor comun. Fie $a \equiv b \ (mod\ m)$, unde $a = a_1 d,\ \ b = b_1 d,\ \ m = m_1 d$, atunci $a = b + mt$ sau $a_1 d = b_1 d + m_1 td$, de unde $a_1 = b_1 + m_1 t$. Deci, $a_1 \equiv b_1 (mod\ m)$.

<u>7^0</u>. Dacă numerele *a* și *b* sunt congruente pentru câțiva moduli, atunci ele sunt congruente modulo *m*, unde *m* este cel mai mic multiplu al acestor module.

Fie $a \equiv b \ (mod\ m_1)$, a $\equiv b \ (mod\ m_2)$, ..., a $\equiv b \ (mod\ m_k)$, atunci $a - b$ se divide cu $m_1, m_2, \dots, m_k$. Prin urmare, $a - b$ se divide cu cel mai mic multiplu comun *m* al acestor module. Deci, $a \equiv b \ (mod\ m)$.

<u>8^0</u>. Dacă $a \equiv b \ (mod\ m)$, atunci $a \equiv b \ (mod\ d)$, unde *d* este divizorul numărului *m*.

<u>9^0</u>. Dacă un membru al congruenței și modulul se divid cu un număr întreg arbitrar, atunci și celălalt membru al congruenței se divide cu acest număr.

Dacă $a \equiv b \ (mod\ m)$, atunci $a \equiv b + mt$. Fie ca *a* și *m* se divid cu numărul k, adică $a = a_1 k,\ \ m = m_1 k$. Atunci $b = a - mt = k(a_1 - m_1 t)$, deci $b \ \vdots\ k$.

<u>Exemplul 1</u>. Să demonstrăm că $(2^{60} + 7^{30}) \ \vdots\ 13$.

Rezolvare:

Deoarece $2^4 = 16 = 13 + 3,\ \ 7^2 = 49 = 13 \times 4 - 3$, rezultă că $2^4 \equiv 3 (mod\ 13)$, $7^2 \equiv -3\ (mod\ 13)$. Ridicând ambii membri ai fiecărei congruențe la puterea a 15, obținem $2^{60} \equiv 3^{15} (mod\ 13),\ \ 7^{30} \equiv -3^{15}\ (mod\ 13)$. Adunând aceste congruențe, obținem $2^{60} + 7^{30} \equiv 0\ (mod\ 13)$. Deci, $(2^{60} + 7^{30}) \ \vdots\ 13$.

<u>Exemplul 2.</u> Împărțind numărul N la 3 și la 37 se obțin respectiv resturile 1 și 33. Să calculăm restul împărțirii numărului N la 111.

Rezolvare:

Știm că $111 = 3 \times 37$. Deoarece $N \equiv 1 (mod\ 3)$ și $N \equiv 33\ (mod\ 37) \equiv -4\ (mod\ 37)$, rezultă că $N \ = 1 + 3x$ și $N = -4 \ + 37y$, unde *x* și *y* sunt numere întregi arbitrare.

Prin urmare, $1 + 3x = -4 + 37y$, de unde $x \ = 12\ y \ + \frac{y-5}{3}$.

Deoarece *x* și *y* sunt numere întregi, rezultă că numărul $\frac{y-5}{3}$ de asemenea este întreg, adică $(y - 5) \ \vdots\ 3$, deci $y - 5 = 3k,\ y = 3k + 5$, unde k este un număr întreg. Deoarece $N = -4 \ + 37y$, obținem: $N = -4 + 37\ (3k + 5) = -4 + 111k + 185 = 181 + 111k$.

Prin urmare, $N \equiv 181 \ (mod\ 111) \equiv 70 \ (mod\ 111)$. Astfel, împărțind numărul N la 111 obținem restul 70.

Exemplul 3. Să demonstrăm, că pentru *n* natural numărul $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ se divide cu 133.

Rezolvare:

Știm că: $12^{2n+1} = 12 \times 12^{2n} = 12 \times 144^n$. Însă $144 \equiv 11 \ (mod\ 133)$ și de aceea conform consecinței 1, $144^n \equiv 11^n \ (mod\ 133)$. Înmulțind cu 12 obținem (conform consecinței 2): $12 \times 144^n \equiv 12 \times 11^n (mod\ 133)$. Deci, $12^{2n+1} \equiv 12 \times 11^n \ (mod\ 133)$. Ulterior, $11^{n+2} \equiv 121 \times 11^n$. Însă de obicei $121 \equiv -12 \ (mod\ 133)$, atunci $121 \times 11^n \equiv -12 \times 11^n (mod\ 133)$, adică $11^{n+2} \equiv -12 \times 11^n \ (mod\ 133)$. Adunând congruențele $12^{2n+1} \equiv 12 \times 11^n \ (mod\ 133)$, $11^{n+2} \equiv -12 \times 11^n \ (mod\ 133)$ (proprietatea 2^0), obținem $12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 0 \ (mod\ 133)$, deci numărul $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ se divide cu 133.

Exemplul 4. Să demonstrăm că numărul $(3299^5 + 6)^{18} - 1$ se divide cu 112.

Rezolvare:

Scriem numărul 112 ca produs a două numere reciproc prime $112 = 7 \times 16$. Deoarece $3299 = 7 \times 471 + 2$, atunci $3299 \equiv 2 \ (mod\ 7)$; de unde $3299^5 \equiv 32 \ (mod\ 7) \equiv 4 \ (mod\ 7)$; ulterior $3299^5 + 6 \equiv 10 \ (mod\ 7) \equiv 3 \ (mod\ 7)$; prin urmare $(3299^5 + 6)^6 \equiv 3^6 (mod\ 7) \equiv 1 \ (mod\ 7)$, deoarece $3^6 = 729 = 7 \times 104 + 1$ și de aceea $(3299^5 + 6)^{18} \equiv 1^3 \ (mod\ 7)$ sau $(3299^5 + 6)^{18} - 1 \equiv 0 \ (mod\ 7)$. **(1)**

În mod analog $3299 = 16 \times 206 + 3$ și de aceea $3299 \equiv 3 \ (mod\ 16)$; ulterior $3299^5 \equiv 243 \ (mod\ 16) \equiv 3 \ (mod\ 16)$, deoarece $243 = 16 \times 15 + 3$; prin urmare, $3299^5 + 6 \equiv 9 \ (mod\ 16)$.

De aceea $(3299^5 + 6)^2 \equiv 1 (mod\ 16)$, deoarece $81 = 16 \times 5 + 1$. Prin urmare, $(3299^5 + 6)^{18} \equiv 1^9 (mod\ 16)$ sau $(3299^5 + 6)^{18} - 1 \equiv 0 (mod\ 16)$. **(2)**

Din (1) și (2), ținând cont că 7 și 16 sunt numere reciproc prime, rezultă $(3299^5 + 6)^{18} - 1 \equiv 0 \ (mod\ 112)$ și de aceea $(3299^5 + 6)^{18} - 1$ se divide cu 112.

Exemplul 5. Să demonstrăm că $5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n}$ se divide cu 11, adică *k, m, n* sunt numere naturale.

Știm că $5^5 = 3125 = 11 \times 284 + 1$, $4^5 = 1024 = 11 \times 93 + 1$, $3^5 = 243 = 11 \times 22 + 1$, atunci:

$5^5 \equiv 1 \ (mod\ 11)$, $4^5 \equiv 1 \ (mod\ 11)$, $3^5 \equiv 1 \ (mod\ 11)$,

$5^{5k} \equiv 1 \ (mod\ 11)$, $4^{5m} \equiv 1 \ (mod\ 11)$, $3^{5n} \equiv 1 \ (mod\ 11)$,

$5^{5k+1} \equiv 5 \ (mod\ 11)$, $4^{5m+2} \equiv 4^2 \ (mod\ 11)$,

$4^{5m+2} \equiv 5 \ (mod\ 11)$.

Adunând congruențele

$5^{5k+1} \equiv 5 \ (mod\ 11)$, $4^{5m+2} \equiv 5 \ (mod\ 11)$, $3^{5n} \equiv 1 \ (mod\ 11)$,

obținem $5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n} \equiv 11 \ (mod\ 11)$ sau $5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n} \equiv 0 \ (mod\ 11)$.

Adică $5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n}$ este divizibil cu 11.

Exemplul 6. Să demonstrăm că pentru numerele arbitrare întregi a și b și numărul întreg nenegativ *n* numărul $(7a+3)^{2n+1}+(7b+25)^{2n+1}$ este divizibil cu 7.

Deoarece $7a+3 \equiv 3(mod\ 7)$, $7b+25 \equiv -3(mod\ 7)$, atunci, ridicând ambele părți a acestor congruențe la puterea impară $2n+1$, avem $(7a+3)^{2n+1} \equiv 3^{2n+1}(mod\ 7)$, $(7b+25)^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}(mod\ 7)$.

Adunând aceste congruențe, obținem $(7a+3)^{2n+1}+(7b+25)^{2n+1} \equiv 0\ (mod\ 7)$; prin urmare, $(7a+3)^{2n+1}+(7b+25)^{2n+1}$ se împarte la 7.

Exemplul 7. Să calculăm restul de la împărțirea $(9674^6+28)^{15}$ la 39.

Numărul $39 = 3 \times 13$ – produs a două numere reciproc prime. Deoarece $9674 = 3 \times 3225 - 1$, atunci $9674 \equiv (-1)(mod\ 3)$ și de aceea $9674^6 \equiv 1(mod\ 3)$, deoarece $(-1)^6 = 1$. Ulterior, $9674^6+28 \equiv 29(mod\ 3) \equiv -1(mod\ 3)$, deoarece $29 = 3 \times 10 - 1$. De aceea $(9674^6+28)^{15} \equiv -1(mod\ 3)$, deoarece $(-1)^{15} = -1$.

Știm că $9674 = 13 \times 744 + 2$, de aceea $9674 \equiv 2\ (mod\ 13)$; Prin urmare $9674^6 \equiv 64\ (mod\ 13) \equiv -1(mod\ 13)$, deoarece $64 = 13 \times 5 - 1$.

Ulterior, $9674^6+28 \equiv 27\ (mod\ 13) \equiv 1(mod\ 13)$, $(9674^6+28)^{15} \equiv 1(mod\ 13)$. Deci, $(9674^6+28)^{15} \equiv -1(mod\ 3)$, $(9674^6+28)^{15} \equiv 1(mod\ 13)$ și de aceea $(9674^6+28)^{15} = -1+3x$ și $(9674^6+28)^{15} = 1+13y$, unde *x* și *y* sunt numere întregi arbitrare. Prin urmare $-1+3x = 1+13y$, de unde $x = 4y + \frac{y+2}{3}$. Deoarece *x* și *y* sunt numere întregi, atunci și $\frac{y+2}{3}$ trebuie să fie întreg, adică $y+2$ se împarte la 3. Deci, $y+2 = 3k$, adică $y = 3k-2$, unde *k* este un oarecare număr întreg.

Anterior, aveam că $(9674^6+28)^{15} = 1+13y$, de aceea obținem $(9674^6+28)^{15} = 1+13\,(3k-2) = 39k-25$. Prin urmare, $(9674^6+28)^{15} \equiv 14(mod\ 39)$ și de aceea restul de la împărțirea $(9674^6+28)^{15}$ la 39 este egal cu 14.

Exemplul 8. Să demonstrăm că $(a^n - b^n) \vdots (a-b)$ pentru orice *n* natural, unde *a* și *b* sunt numere întregi diferite.

Soluția întâi.

1) Pentru $n=1$ afirmația este justă, deoarece $(a-b) \vdots (a-b)$.

2) Admitem că $(a^n-b^n) \vdots (a-b)$ pentru $n=k$, adică $(a^k-b^k) \vdots (a-b)$ prin urmare $a^k - b^k = (a-b)c$. Atunci pentru $n=k+1$ avem $a^{k+1}-b^{k+1} = (a-b)a^k + a^k b - b^{k+1} = (a-b)a^k + b(a^k-b^k) = [(a-b)a^k + (a-b)bc] \vdots (a-b)$.

În baza principiului inducției matematice $(a^n-b^n) \vdots (a-b)$ pentru orice număr natural *n*.

Soluția a doua. Deoarece a și b sunt două numere întregi diferite, atunci $(a-b) \equiv 0\ (mod(a-b))$, de aceea $a \equiv b\ (mod\ (a-b))$. Ridicând ambele părți ale congruenței la puterea *n*, obținem $a^n \equiv b^n(mod(a-b))$, adică $a^n - b^n$ se împarte la $a-b$.

Exemplul 9. Să demonstrăm că pentru orice număr natural *n* numărul $3^{3n+3} - 26n - 27$ este divizibil cu 676.

Avem $3^{3n+3} - 26n - 27 = 27^{n+1} - 27 - 26n = 27(27^n - 1) - 26n = 27(27 - 1)(27^{n-1} + 27^{n-2} + \ldots + 27 + 1) - 26n = 26[(27^n + 27^{n-1} + \ldots + 27^2 + 27) - n]$. **(1)**

Deoarece pentru orice număr natural k diferența $27^k - 1^k$ se divide cu $27 - 1 = 26$, atunci $27^k \equiv 1 (mod\ 26)$; de aceea $27^n + 27^{n-1} + \ldots + 27^2 + 27 \equiv n\ (mod\ 26)$.

Este evident că $n \equiv n\ (mod\ 26)$. Scăzând ultima congruență din penultima, obținem $27^n + 27^{n-1} + \ldots + 27^2 + 27 - n \equiv 0\ (mod\ 26)$ **(2)**

Adică $27^n + 27^{n-1} + \ldots + 27^2 + 27 - n = 26k$ (unde k este un număr natural).

Din (1) și (2) rezultă că numărul dat se divide cu $26 \times 26 = 676$.

Exemplul 10. Să demonstrăm că numărul $20^{15} - 1$ se divide cu produsul $11 \times 31 \times 61$.

Pentru a da răspuns la problema dată este suficient să demonstrăm că numărul $20^{15} - 1$ se divide cu 11, 31 și 61.

1) Știm că $2^5 \equiv -1 (mod\ 11), 10 \equiv -1 (mod\ 11)$, de unde $10^5 \equiv -1\ (mod\ 11)$; de aceea $20^5 \equiv (-1) \times (-1) (mod\ 11)$, adică $20^5 \equiv 1 (mod\ 11)$, iar prin urmare, $20^{15} \equiv 1 (mod\ 11)$, adică $20^{15} - 1$ este divizibil cu 11.
2) Ulterior, avem $20 \equiv -11 (mod\ 31)$, de unde $20^5 \equiv 121 (mod\ 31)$ sau $20^5 \equiv -3 (mod\ 31)$ și de aceea $20^3 \equiv (-11) \times (-3) (mod\ 31)$ sau $20^3 \equiv 2 (mod\ 31)$ și de aceea $2^{15} \equiv 2^5 (mod\ 31)$ sau $20^5 \equiv 1 (mod\ 31)$, adică $20^{15} - 1$ se divide la 31.
3) În fine, $3^4 \equiv 20\ (mod\ 61)$, de unde $20^5 \equiv 3^{20} (mod\ 61)$. **(1)**
   Însă $3^5 \equiv -1 (mod\ 61)$ și de aceea $3^{20} \equiv 1 (mod\ 61)$. **(2)**

Din (1) și (2) rezultă că $20^5 \equiv 1 (mod\ 61)$ și de aceea $20^{15} \equiv 1 (mod\ 61)$, adică $20^{15} - 1$ se divide la 61.

Concluzii

Din cele expuse mai sus, rezultă că articolul reprezintă un suport teoretic și practic accesibil elevilor, conține probleme și exerciții însoțite de rezolvări cu aplicarea unei strategii diverse.

Consider că lucrarea va contribui la dezvoltarea învățământului matematic și totodată va servi ca un suport științific și didactic util și eficient.

Bibliografie

1. LUPU, I. *Divizibilitatea numerelor. Teorie și practică*. Chișinău: Prut Internațional, 2006.
2. СИВАШИНСКИЙ, И.Х. *Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям*. Москва: Наука, 1971. 368 с.
3. СИКОРСКИЙ, К. П. *Дополнительные главы по курсу математики 78 классов для факультативных занятий*. Москва, 1969.
4. ВАХОВСКИЙ, Е.Б.; РЫВКИН, А.А. *Задачи по элементарной математике*. Москва: Наука, 1969. 495 с.