Acta et Commentationes, Sciences of Education, nr. 1(35), 2024 ISSN 1857-0623
p. 47-60 E-ISSN 2587-3636

CZU: 519.83:502 DOI: 10.36120/2587-3636.v35i1.47-60

ASPECTE TEORETICE ȘI PRACTICE ALE APLICĂRII CRITERIILOR DE DECIZIE ÎN JOCURILE CONTRA NATURII

Natalia JOSU, dr., conf. univ.
https://orcid.org/0000-0002-3687-5437
Catedra Informatică și Tehnologii Informaționale
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău

Rezumat. Acest articol prezintă succint unele aspecte teoretice despre criteriile de decizie și modul de aplicare ale acestora în practică în cadrul teoriei jocurilor. Scopul acestui articol este să dezvolte și să întărească aptitudinile practice în luarea și justificarea deciziilor în situații cu informații limitate, în care unul dintre jucători nu are un obiectiv bine determinat și alege mișcările ulterioare în mod aleatoriu.
Cuvinte cheie: criterii de optimizare, condiții de incertitudine, condiții de risc, stare a naturii, criteriul lui Wald, criteriul pesimismului, criteriul lui Savage, criteriul lui Hurwicz, criteriul Bayes, criteriul Laplace, criteriul lui Bernoulli, criteriul Hermeyer, criteriul lui Hodges-Lehmann, criteriul lui Hermeyer-Hurwicz.

THEORETICAL AND PRACTICAL ASPECTS OF APPLYING DECISION CRITERIA IN A GAME WITH NATURE

Abstract. This article succinctly outlines certain theoretical aspects concerning decision criteria and their practical application within the realm of game theory. The aim of this article is to enhance and reinforce practical aptitudes in making and justifying decisions in situations characterized by limited information, where one player lacks a clearly defined objective and selects subsequent moves randomly.
Keywords: optimization criteria, uncertainty conditions, risk conditions, state of nature, Wald's criterion, pessimism criterion, Savage's criterion, Hurwicz's criterion, Bayes' criterion, Laplace's criterion, Bernoulli's criterion, Hermeyer's criterion, Hodges-Lehmann's criterion, Hermeyer-Hurwicz's criterion.

Noțiuni introductive

Teoria jocurilor a fost o provocare semnificativă pentru abordarea convențională în examinarea economiei. Prima ilustrare formală a teoriei jocurilor se concentrează pe analiza interacțiunii dintre două persoane într-un joc, prezentată de Antoine Cournot în 1838. Această teorie a investigat modul în care piețele oligopoliste funcționau în acea perioadă. În anul 1921, matematicianul Emile Borel a propus o teorie formală a jocurilor, care ulterior, în 1928, a fost dezvoltată și completată de matematicianul John von Neumann cu noi concepte. Teoria jocurilor este un domeniu relativ nou, care a început să se dezvolte oficial în ultimii 80 de ani, odată cu apariția lucrării "Teoria jocurilor și comportamentul economic" de John von Neumann și Oskar Morgenstern în 1944, fiind recunoscută ca un studiu formal al dinamicii conflictelor și cooperării [1].

Teoria jocurilor se fundamentează pe trei ipoteze esențiale:

- Toți jucătorii se comportă rațional;
- Fiecare jucător știe că ceilalți jucători sunt raționali;
- Toți jucătorii cunosc regulile jocului.

Deoarece teoria jocurilor investighează comportamentul uman în contexte conflictuale, unde rațiunea se confruntă cu rațiunea și fiecare parte implicată dispune de capacități analitice și de luare a deciziilor pentru a-și atinge propriile obiective, putem concluziona că aceasta se bazează pe ipoteza raționalității. Aceasta înseamnă că propriul câștig este direct influențat de deciziile celorlalți jucători și că teoria jocurilor oferă soluții pentru diverse situații conflictuale.

Prin urmare, teoria jocurilor constituie o abordare pentru investigarea interacțiunilor strategice, în care actorii economici (jucătorii) recunosc interdependența dintre ei și iau decizii individuale având în vedere acțiunile celorlalți [2].

Odată cu apariția teoriei jocurilor, se puneau mari speranțe în rezolvarea eficientă a conflictelor. Din păcate, aceste speranțe s-au realizat într-o măsură limitată. Mai mult, teoria devine și mai complicată atunci când sunt implicați mai mulți jucători. Cele menționate mai sus reprezintă doar o încercare de a stimula interesul pentru analiza incertitudinii în mediul decizional înainte de a lua o decizie argumentată. Prin urmare, este important ca jucătorul să fie familiarizat cu metodele din domeniul teoriei deciziilor și statistica matematică [3].

Criterii de optimizarea a deciziilor. Aspecte teoretice

În viața de zi cu zi, ne confruntăm deseori cu situații de conflicte care nu sunt dictate exclusiv de raționalitate. Uneori, aceste situații conflictuale pot să apară ca rezultat al evenimentelor naturale, cunoscute sub numele de conflicte cu natura sau jocuri contra naturii, sau jocuri stohastice. În astfel de situații se spune că, natura (hazardul) este al $n + 1$ - lea jucător. Natura nu posedă funcție de câștig și acționează în mod aleatoriu. Orice acțiune a omului poate fi analizată ca fiind asemănătoare unui joc cu natura. Într-un sens mai amplu, prin "*natură*" se înțelege totalitatea factorilor nedeterminați care influențează deciziile luate. În continuare, se vor examina diverse criterii de optimizare a deciziilor în contextul jocurilor împotriva naturii.

Criteriile de optimalitate în teoria deciziilor sunt împărțite în două categorii, în funcție de condițiile în care este creat modelul de lucru.

- **decizii luate în condiții de incertitudine** – condițiile nedeterministe se exprimă prin faptul că primul decident nu are informații suficiente asupra mulțimii de decizie ale celui de–al doilea decident, nu cunoaște toate alternativele, nu poate stabili probabilitățile asociate alternativelor cunoscute.
- **decizii luate în condiții de risc** – decidentul cunoaște toate alternativele decizionale, iar consecințelor acestora le sunt asociate estimări probabilistice.

Se consideră matricea câștigurilor:

	Stările naturii				
Strategiile jucătorului rațional	$\frac{A_i}{N_j}$	N_1	N_2	$\cdots$	N_n
	A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
	A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
	A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}
Probabilitățile de apariție a stărilor naturii		q_1	q_2	$\cdots$	q_n

Jucătorul rațional posedă *m* strategii posibile $A_1,\ A_2, \dots, A_m$. Natura poate acționa în una din cele *n* stări $N_1,\ N_2, \dots, N_n$. Fiecare element al matricei de plăți/câștiguri a_{ij} reprezintă câștigul jucătorului rațional pentru strategia A_i și starea N_j a naturii. Probabilitățile de apariție a unor evenimente viitoare pot fi determinate în mod subiectiv sau obiectiv:

Probabilitatea obiectivă reprezintă frecvența relativă de apariție a unui eveniment calculată după formula $P(A) = \frac{m}{n}$, unde *m* – numărul de apariții a evenimentului *A*, *n* – numărul total al experimentelor efectuate.

Probabilitatea subiectivă nu este determinată pe bază de calcule. Prin probabilitate subiectivă se înțelege acea regulă *P*, conform căreia o persoană asociază fiecărui eveniment *A* un număr $P(A) \in [0,1]$, numit probabilitatea evenimentului *A*. Indiferent de modul de stabilire a probabilităților, pentru alegerea variantei optime se va calcula valoarea așteptată V_A pentru fiecare alternativă luată în considerare: $V_A = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \cdots + p_n \cdot x_n$, adică $V_A = \sum_{i,j=1}^{n} p_i \times x_j$, unde: p_i – probabilitățile de apariție ale evenimentelor, x_j – valorile strategiei A_i ale jucătorului rațional. Decidentul va alege alternativa cu valoarea cea mai mare [4].

Pentru a alege cea mai eficientă strategie, toate criteriile de optimizare sunt aplicate simultan tuturor strategiilor posibile: fiecare criteriu permite selectarea unei singure opțiuni, iar varianta optimă va fi acea strategie, determinată de majoritatea criteriilor.

Criterii de optimizarea a deciziilor în condiții de incertitudine – în acest caz pot fi utilizate mai multe criterii și tehnici:

- *Criteriul lui Wald*, tehnica pesimistă sau criteriul prudenței maxime (Abraham Wald – evreu-american originar din Transilvania, matematician-statistician) – asigură maximizarea câștigului minim, care poate fi obținut în realizarea fiecăreia dintre strategiile jucătorului rațional. Criteriul orientează jucătorul rațional către o strategie care permite obținerea de venit și minimizarea riscurilor posibile în același timp. Se consideră optimală acea strategie, care garantează un câștig, nu mai mic decât prețul inferior al jocului cu natura:

$$W_p = \underbrace{max}_{i}\left(\underbrace{min}_{j}(a_{ij})\right).$$

- *Criteriul lui Wald*, tehnica optimistă sau criteriul optimismului, sau criteriul beneficiului maxim – este conceput pentru a selecta cel mai mare element din matricea de plăți pentru fiecare strategie, apoi la fel elementul maximal din vectorul obținut:

$$W_o = \underbrace{max}_{i}\left(\underbrace{max}_{j}(a_{ij})\right).$$

- *Criteriul pesimismului* – presupune că evoluția situației va fi nefavorabilă pentru jucătorul rațional. Aplicarea acestui criteriu, indică un aspect în care jucătorul rațional se concentrează pe o posibilă pierdere a controlului asupra situației și, prin urmare, se străduiește să elimine toate riscurile potențiale și să aleagă opțiunea cu randament minim:

$$P = \underbrace{min}_{i}\left(\underbrace{min}_{j}(a_{ij})\right).$$

- *Criteriul lui Savage* sau criteriul riscului minimal a lui Savage, sau criteriul regretelor (Leonard I. Savage – matematician-statistician american) – esența acestei abordări constă în faptul că se evită un risc la adoptarea deciziei, sau se minimizează regretul că nu s-a apelat la cea mai favorabilă alegere. Pentru a aplica criteriul respectiv se calculează inițial matricea de riscuri.

	Stările naturii					$\max\limits_j(r_{ij})$	$\min\limits_i\left(\max\limits_j(r_{ij})\right)$
Strategiile jucătorului rațional	$\frac{A_i}{N_j}$	N_1	N_2	$\cdots$	N_n		
	A_1	r_{11}	r_{12}	$\cdots$	r_{1n}	max_1	S
	A_2	r_{21}	r_{22}	$\cdots$	r_{2n}	max_2	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	A_m	r_{m1}	r_{m2}	$\cdots$	r_{mn}	max_n	

Dintre elementele acestei matrice se determină mai întâi elementul maximal pentru fiecare strategie a jucătorului rațional, apoi din vectorul obținut se determină elementul minimal. În acest caz jucătorul rațional este din start pesimist și consideră că natura va acționa astfel încât, alegerea oricărei strategii va fi pentru el un risc, de aceea alege strategia A_i, astfel încât să minimizeze acest risc:

$$S = \underbrace{min}_{i}\left(\underbrace{max}_{j}(r_{ij})\right),$$

unde r_{ij} – elementele matricei de riscuri sau matricei regretelor și $r_{ij} = \underbrace{max}_{j}(a_{ij}) - a_{ij}$, unde $\underbrace{max}_{j}(a_{ij})$ – elementul maximal al fiecărei coloane din matricea de câștiguri.

- *Criteriul lui Hurwicz* sau criteriul pesimismului-optimismului (Leonid Hurwicz - matematician și economist, evreu-american, născut în Rusia) – presupune că jucătorul rațional nu este nici complet optimist, nici complet pesimist. Acest criteriu implică introducerea unui coeficient λ (0 < λ < 1), numit coeficient de optimism. Dacă λ=0 – pesimism total, atunci criteriul lui Hurwicz se transformă în criteriul lui Wald. Dacă λ=1 – optimism total, atunci criteriul lui Hurwicz se transformă în criteriul optimismului. Dacă λ este coeficientul de optimism, atunci 1-λ este coeficientul de pesimism. Criteriul Hurwicz tinde a găsi un echilibru între cazurile extreme de pesimism și cazurile extreme de optimism:

$$H = \underbrace{max}_{i}\left(\lambda \cdot \underbrace{max}_{j}(a_{ij}) + (1-\lambda)\cdot \underbrace{min}_{j}(a_{ij})\right),$$

unde $\underbrace{max}_{j}(a_{ij})$ – câștigul cel mai favorabil al strategiei A_i, iar $\underbrace{min}_{j}(a_{ij})$ – câștigul cel mai nefavorabil al strategiei A_i.

Criterii de optimizarea a deciziilor în condiții de risc

- *Criteriul Bayes* (Bayes pentru câștiguri și Bayes pentru riscuri) – se presupune că jucătorului rațional îi sunt cunoscute nu doar stările naturii $N_1, N_2, \dots, N_n$, dar și probabilitățile apariției acestor stări $q_1, q_2, \cdots q_n$, pentru care, $\sum_i^n q_i = 1$. Criteriul Bayes utilizează ca indicator mărimea câștigului mediu sau mărimea riscului mediu.
  - ✓ *Criteriul Bayesian pentru câștiguri*

Orice strategie pură A_i poate fi definită ca o variabilă aleatoare cu următoarea lege de distribuție:

A_i	a_{i1}	a_{i2}	⋯	a_{in}
p_i	q_1	q_2	⋯	q_n

Valoarea așteptată B_i pentru fiecare alternativă va fi: $B_i = \sum_{j=1}^{n} q_j \cdot a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m$. Criteriul Bayes pentru câștiguri permite alegerea elementului maximal dintre câștigurile așteptate privind elementele matricei de plăți și probabilitățile cu care acționează stările naturii: $B = \max_i\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \cdot a_{ij}\right), i = 1, 2, \dots, m$ sau $B = \max_i(q_1 \cdot a_{i1} + q_2 \cdot a_{i2} + \cdots + q_n \cdot a_{in}), i = 1, 2, \dots, m$.

- ✓ *Criteriul Bayesian pentru riscuri*

Indicatorul de eficiență al strategiei A_i, în funcție de criteriul Bayes, privind matricea riscurilor este definit de valoarea așteptată B_i^r, care se calculează conform formulei: $B_i^r =$

$\sum_{j=1}^{n} q_j \cdot r_{ij}, i = 1, 2, \dots, m$. Criteriul Bayes pentru riscuri permite alegerea valorii minime dintre câștigurile așteptate privind elementele matricei riscurilor și probabilitățile cu care acționează stările naturii: $B^r = \min_i\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \cdot r_{ij}\right), i = 1, 2, \dots, m$ sau $B^r = \min_i(q_1 \cdot r_{i1} + q_2 \cdot r_{i2} + \dots + q_n \cdot r_{in}), i = 1, 2, \dots, m$.

- *Criteriul Laplace* (Criteriul echiprobabilității) – are la bază ideea că fiecare strategie a jucătorului rațional are aceeași probabilitate de a fi aleasă. Astfel, $q_j = \frac{1}{n}$ și $\sum q_j = 1$.

  ✓ *Criteriul Laplace pentru câștiguri*

  Conform criteriului Laplace pentru câștiguri, eficiența strategiei pure A_i este reprezentată de media aritmetică a profiturilor din această strategie: $L_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m$. Varianta optimă este aceea pentru care media aritmetică a rezultatelor asociate fiecărei strategii este cea mai favorabilă: $L = \max_i\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right),\ i = 1, 2, \dots, m$ sau $L = \max_i\left(\frac{a_{i1}+a_{i2}+\dots+a_{in}}{n}\right), i = 1, 2, \dots, m$.

  ✓ *Criteriul Laplace pentru riscuri*

  Indicatorul de neeficiență pentru strategia pură A_i după criteriul Laplace luând în considerație matricea riscurilor este media aritmetică a riscurilor pentru această strategie: $L_i^r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}, i = 1, 2, \dots, m$. Criteriul lui Laplace pentru matricea riscurilor implică alegerea strategiei cu risc minimal așteptat, cu probabilitatea egală de apariție a posibilelor stări ale naturii: $L^r = \min_i\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\right), i = 1, 2, \dots, m$ sau $L^r = \min_i\left(\frac{r_{i1}+r_{i2}+\dots+r_{in}}{n}\right), i = 1, 2, \dots, m$.

- *Criteriul lui Bernoulli* – conform criteriului dat toate stările naturii sunt echiprobabile și pentru determinarea valorii așteptate se utilizează logaritmul natural al elementelor din matricea plăților: $B_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} ln(a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m$. Se va alege strategia cu cea mai mare valoare așteptată: $B = \max_i(B_i),\ i = 1, 2, \dots, m$. Acest criteriu poate fi utilizat în cazul în care toate elementele din matricea de plăți sunt pozitive $a_{ij} > 0$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.
- *Criteriul Hermeyer* – criteriul lui Hermeyer este utilizat pentru determinarea câștigului maximal dintre cele minimale aplicat pentru matricea Hermeyer: $G = \max_i\left(\min_j(a_{ij} \cdot q_j)\right),\ i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n$.

Matricea Hermeyer					
	Stările naturii				
Strategiile jucătorului rațional	$\frac{A_i}{N_j}$	N_1	N_2	$\cdots$	N_n
	A_1	$a_{11} \cdot q_1$	$a_{12} \cdot q_2$	$\cdots$	$a_{1n} \cdot q_n$

	A_2	$a_{21} \cdot q_1$	$a_{22} \cdot q_2$	$\cdots$	$a_{2n} \cdot q_n$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
	A_m	$a_{m1} \cdot q_1$	$a_{m2} \cdot q_2$	$\cdots$	$a_{mn} \cdot q_n$
Probabilitățile de apariție a stărilor naturii		q_1	q_2	$\cdots$	q_n

- *Criteriul lui Hodges-Lehmann* – criteriul Hodges-Lehman pentru câștiguri se bazează atât pe criteriul Wald, cât și pe criteriul Bayes.

  ✓ *Criteriul lui Hodges-Lehmann pentru câștiguri*

Pentru a determina strategia optimă în funcție de acest criteriu se va introduce parametrul λ, care reprezintă gradul de corectitudine a informațiilor despre distribuția de probabilitate a stărilor naturii $q_1,\ q_2, \cdots q_n$, a cărui valoare se situează în intervalul [0, 1]. În cazul în care gradul de fiabilitate este ridicat, domină criteriul Bayes, în caz contrar domină criteriul Wald. Indicatorul de eficiență al strategiei A_i, în funcție de criteriul dat, privind matricea câștigurilor este definit de valoarea așteptată HL_i, care se calculează conform formulei: $HL_i = \lambda B_i(q) + (1-\lambda)W_i,\ i = 1, 2, \dots, m$, unde $B_i(q)$ reprezintă indicele de eficiență al strategiei A_i conform criteriului bayesian în raport cu vectorul distribuției de probabilitate a stărilor naturii $q_1,\ q_2, \cdots q_n$, care este definit prin formula: $B_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_j, i = 1, 2, \dots, m$. W_i este indicatorul de eficiență al strategiei A_i în conformitate cu criteriul Wald, care se determină după formula: $W_i = \min_j(a_{ij})$. Prețul jocului în strategii pure în conformitate cu criteriul Hodges-Lehman în ceea ce privește matricea de câștiguri este valoarea maximă dintre valorile HL_i: $HL = \max_{1 \le i \le m}(HL_i)$.

✓ *Criteriul lui Hodges-Lehmann pentru riscuri*

Criteriul Hodges-Lehman pentru riscuri se bazează atât pe criteriul Bayes, cât și pe criteriul Savage. Neeficiența strategiei pure A_i în conformitate cu criteriul Hodges-Lehman în ceea ce privește matricea riscurilor HL_i^r este: $HL_i^r = \lambda \cdot B_i^r(q) + (1-\lambda) \cdot S_i,\ i = 1, 2, \dots, m$, unde, $B_i^r(q)$ reprezintă indicele de neeficiență al strategiei A_i conform criteriului bayesian în raport cu vectorul distribuției de probabilitate a stărilor naturii $q_1,\ q_2, \cdots q_n$, care este definit prin formula: $B_i^r(q) = \sum_{j=1}^{n}(q_j \cdot r_{ij})$. S_i este indicatorul de neeficiență al strategiei A_i în conformitate cu criteriul Savage, care se determină prin formula: $S_i = \max_j(r_{ij})$. Prețul jocului în strategiile pure conform criteriului Hodges-Lehman în raport cu matricea de riscuri este valoarea minimă dintre indicatorii de neeficiență a strategilor pure A_i: $HL^r = \min_i(HL_i^r) = \min_i(\lambda \cdot B_i^r(q) + (1-\lambda) \cdot S_i),\ i = 1,\ 2, \dots, m$.

- *Criteriul lui Hermeyer-Hurwicz* – acest criteriu reprezintă criteriul Hurwitz aplicat asupra matricei Hermeyer. Astfel, dacă $0 \le \lambda \le 1$, atunci λ este indicatorul de optimism pentru jucătorul rațional, iar indicatorul de indicatorul de pesimism pentru jucătorul rațional este $0 \le (1 - \lambda) \le 1$. Indicatorul de eficiență al strategiei pure A_i în conformitate cu criteriul Hermeyer-Hurwicz în ceea ce privește matricea de câștiguri este: $GH_i = (1-\lambda)\cdot G_i + \lambda \cdot M_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, unde, G_i este indicatorul de eficiență al strategiei A_i în conformitate cu criteriul Hermeyer în ceea ce privește vectorul distribuției de probabilitate a stărilor de natură $q_1, q_2, \cdots q_n$, care se determină prin formula: $G_i = \min_{1\le j\le m}(a_{ij}\cdot q_j)$, $i = 1, 2, \dots, m$. M_i este indicatorul de eficiență al strategiei A_i în conformitate cu criteriul Hurwicz pentru matricea Hermeyer, care se determină după formula: $M_i = \max_{1\le j\le m}(a_{ij}\cdot q_j)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Prețul jocului în strategiile pure, în conformitate cu criteriul Hermeyer-Hurwicz în ceea ce privește matricea de câștiguri, este valoarea maximă dintre indicatorii de performanță ai strategilor pure A_i: $GH = \max_i\left((1-\lambda)\cdot G_i + \lambda \cdot M_i\right)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Aplicație practică

Se consideră matricea câștigurilor/plăților.

	A	B	C	D	E
1	A_i/N_j	N_1	N_2	N_3	N_4
2	A_1	8	7	5	16
3	A_2	6	4	15	9
4	A_3	2	1	12	11
5	A_4	13	8	3	10

Fiecare element a_{ij} din matricea câștigurilor reprezintă câștigul jucătorului rațional în raport cu strategiile A_i și stările naturii N_j. q_i – reprezintă probabilitățile de apariție a stărilor naturii, $q_1 = 0.1, q_2 = 0.2, q_3 = 0.3, q_4 = 0.4$. $\lambda = 0,4$ – coeficientul de optimism. Fiecare element r_{ij} din matricea riscurilor/regretelor se calculează după formula $r_{ij} = \underbrace{max}_{j}(a_{ij}) - a_{ij}$, unde $\underbrace{max}_{j}(a_{ij})$ – elementul maximal al fiecărei coloane din matricea de câștiguri.

	G	H	I	J	K
1	A_i/N_j	N_1	N_2	N_3	N_4
2	A_1	5	1	10	0
3	A_2	7	4	0	7
4	A_3	11	7	3	5
5	A_4	0	0	12	6

În continuare se va determina prețul jocului și strategia optimă pentru jucătorul rațional aplicând criteriile de decizie expuse anterior. Se va lucra cu programul de calcul tabelar Microsoft Excel.

Criterii de optimizarea a deciziilor în condiții de incertitudine

Criteriul lui Wald, tehnica pesimistă sau criteriul prudenței maxime

Criteriul lui Wald, tehnica pesimistă	
min(a[i,j])	max(min(a[i,j]))
=MIN(B2:E2)	
=MIN(B3:E3)	
=MIN(B4:E4)	
=MIN(B5:E5)	=MAX(F9:F12)

Criteriul lui Wald, tehnica pesimistă	
min(a[i,j])	max(min(a[i,j]))
5	5
4	
1	
3	

Astfel, conform criteriului lui *Wald, tehnica pesimistă* strategia optimă pentru jucătorul rațional va fi *A1*. Valoarea jocului *v=5*.

Criteriul lui Wald, tehnica optimistă sau criteriul optimismului, sau criteriul beneficiului maxim

Criteriul lui Wald, tehnica optimistă	
max(a[i,j])	max(max(a[i,j]))
=MAX(B2:E2)	
=MAX(B3:E3)	
=MAX(B4:E4)	
=MAX(B5:E5)	=MAX(F22:F25)

Criteriul lui Wald, tehnica optimistă	
max(a[i,j])	max(max(a[i,j]))
16	16
15	
12	
13	

Astfel, conform criteriului lui *Wald, tehnica optimistă,* strategia optimă pentru jucătorul rațional va fi la fel *A1*. Valoarea jocului *v=16.*

Criteriul pesimismului

Criteriul pesimismului	
min(a[i,j])	min(min(a[i,j]))
=MIN(B2:E2)	
=MIN(B4:E4)	
=MIN(B3:E3)	
=MIN(B5:E5)	**=MIN(F35:F38)**

Criteriul pesimismului	
min(a[i,j])	min(min(a[i,j]))
5	
4	
1	**1**
3	

Astfel, conform criteriului *pesimismului* strategia optimă pentru jucătorul rațional va fi la fel *A3*. Valoarea jocului *v=1*.

Criteriul lui Savage – se va aplica asupra matricei regretelor.

Criteriul Savage	
max(a[i,j])	min(max(a[i,j]))
=MAX(H2:K2)	
=MAX(H3:K3)	
=MAX(H4:K4)	
=MAX(H5:K5)	**=MIN(F47:F50)**

Criteriul Savage	
max(a[i,j])	min(max(a[i,j]))
10	
7	7
11	
12	

Astfel, conform criteriului lui *Savage* strategia optimă pentru jucătorul rațional va fi *A2*. Valoarea jocului *v=7*.

Criteriul lui Hurwicz

Criteriul lui Hurwicz			
λ*max(a[i,j])	λ*max(a[i,j])	H_i	H=max(H_i)
=MAX(B2:E2)*0,4	=(1-0,4)*MIN(B2:E2)	**=F61+G61**	
=MAX(B3:E3)*0,4	=(1-0,4)*MIN(B3:E3)	=F62+G62	
=MAX(B4:E4)*0,4	=(1-0,4)*MIN(B4:E4)	=F63+G63	
=MAX(B5:E5)*0,4	=(1-0,4)*MIN(B5:E5)	=F64+G64	**=MAX(H61:H64)**

Criteriul lui Hurwicz			
λ*max(a[i,j])	λ*max(a[i,j])	H_i	H=max(H_i)
6,4	3	**9,4**	
6	2,4	8,4	**9,4**
4,8	0,6	5,4	
5,2	1,8	7	

Astfel, conform criteriului lui *Hurwicz* strategia optimă pentru jucătorul rațional va fi *A1*. Valoarea jocului *v=9.4*.

Criterii de optimizarea a deciziilor în condiții de risc

Criteriul Bayes pentru câștiguri

Criteriul Bayesian pentru câștiguri						
A_i/N_j	N_1	N_2	N_3	N_4	suma(a[i,j])	max(suma(a[i,j]))
A_1	0,8	1,4	1,5	6,4	10,1	10,1
A_2	0,6	0,8	4,5	3,6	9,5	
A_3	0,2	0,2	3,6	4,4	8,4	
A_4	1,3	1,6	0,9	4	7,8	
Probabilitățile stărilor naturii	q_1	q_2	q_3	q_4	Soluție: Strategia optimă - A1. Prețul jocului v=10.1	
	0,1	0,2	0,3	0,4		

Astfel, conform criteriului Bayesian pentru câștiguri strategia optimă pentru jucătorul rațional va fi *A1*. Valoarea jocului *v=10,1*.

Criteriul Bayesian pentru riscuri - se va aplica asupra matricei regretelor.

Criteriul Bayesian pentru riscuri						
A_i/N_j	N_1	N_2	N_3	N_4	suma(a[i,j])	min(suma(a[i,j]))
A_1	0,5	0,2	3	0	3,7	3,7
A_2	0,7	0,8	0	2,8	4,3	
A_3	1,1	1,4	0,9	2	5,4	
A_4	0	0	3,6	2,4	6	
Probabilitățile stărilor naturii	q_1	q_2	q_3	q_4	Soluție: Strategia optimă - A1. Prețul jocului v=3.7	
	0,1	0,2	0,3	0,4		

Astfel, conform criteriului Bayesian pentru riscuri, strategia optimă pentru jucătorul rațional va fi la fel *A1*, iar valoarea jocului *v=3,7*.

Criteriul Laplace pentru câștiguri

Deoarece $q_j = \frac{1}{n}$, avem $q_j = \frac{1}{4} = 0.25$. Strategia *A1* se va calcula astfel: $8 \cdot 0.25 + 7 \cdot 0.25 + 5 \cdot 0.25 + 16 \cdot 0.25 = 9$.

Criteriul Laplace pentru câștiguri						
A_i/N_j	N_1	N_2	N_3	N_4	suma(a[i,j])	max(suma(a[i,j]))
A_1	2	1,75	1,25	4	9	9
A_2	1,5	1	3,75	2,25	8,5	
A_3	0,5	0,25	3	2,75	6,5	
A_4	3,25	2	0,75	2,5	8,5	
Probabilitățile stărilor naturii	q_1	q_2	q_3	q_4	Soluție: Strategia optimă - A1. Prețul jocului v=9	
	0,1	0,2	0,3	0,4		

Astfel, conform criteriului *Laplace pentru câştiguri*, strategia optimă pentru jucătorul raţional va fi la fel *A1*, iar valoarea jocului *v=9*.

Criteriul Laplace pentru riscuri – se va aplica asupra matricei regretelor. Strategia *A1* se va calcula astfel: $5 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.25 + 10 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.25 = 4$.

Criteriul Laplace pentru riscuri						
A_i/N_j	N_1	N_2	N_3	N_4	suma(a[i,j])	min(suma(a[i,j]))
A_1	1,25	0,25	2,5	0	4	4
A_2	1,75	1	0	1,75	4,5	
A_3	2,75	1,75	0,75	1,25	6,5	
A_4	0	0	3	1,5	4,5	
Probabilităţile stărilor naturii	q_1	q_2	q_3	q_4	Soluţie: Strategia optimă - A1. Preţul jocului v=4.	
	0,1	0,2	0,3	0,4		

Astfel, conform criteriului *Laplace pentru riscuri*, strategia optimă, cu risc minimal aşteptat, pentru jucătorul raţional va fi la fel *A1*, iar valoarea jocului *v=4*.

Criteriul lui Bernoulli

$q_j = \frac{1}{4} = 0.25$. Strategia *A1* se va calcula astfel: $\ln(8) \cdot 0.25 + \ln(7) \cdot 0.25 + \ln(5) \cdot 0.25 + \ln(16) \cdot 0.25 = 2{,}101$.

Criteriul Bernoulli						
A_i/N_j	N_1	N_2	N_3	N_4	suma(a[i,j])	max(suma(a[i,j]))
A_1	2,07944154	1,94591	1,60944	2,77259	2,101844581	2,101844581
A_2	1,79175947	1,38629	2,70805	2,19722	2,020832152	
A_3	0,69314718	0	2,48491	2,3979	1,393987276	
A_4	2,56494936	2,07944	1,09861	2,30259	2,01139707	
Probabilităţile stărilor naturii	q_1	q_2	q_3	q_4	Soluţie: Strategia optimă - A1. Preţul jocului v=2,101.	
	0,1	0,2	0,3	0,4		

Astfel, conform criteriului lui *Bernoulli*, strategia optimă pentru jucătorul raţional va fi la fel *A1*, iar valoarea jocului *v=2,101*.

Criteriul Hermeyer – se aplică pentru matricea Hermeyer. Strategia *A1* se va calcula astfel: $8 \cdot 0.1 + 7 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.3 + 16 \cdot 0.4 = 0{,}8$.

Criteriul Hermeyer						
A_i/N_j	N_1	N_2	N_3	N_4	min(a[i,j])	max(min(a[i,j]))
A_1	0,8	1,4	1,5	6,4	0,8	0,9
A_2	0,6	0,8	4,5	3,6	0,6	
A_3	0,2	0,2	3,6	4,4	0,2	
A_4	1,3	1,6	0,9	4	0,9	
Probabilităţile stărilor naturii	q_1	q_2	q_3	q_4	Soluţie: Strategia optimă - A4. Preţul jocului v=0,9	
	0,1	0,2	0,3	0,4		

Astfel, conform criteriului lui *Hermeyer*, strategia optimă pentru jucătorul rațional va fi *A4*, iar valoarea jocului *v=0,9*.

Criteriul lui Hodges-Lehmann pentru câștiguri – strategia *A1* se va calcula astfel: $8 \cdot 0.1 = 0{,}8;\ 7 \cdot 0.2 = 1{,}4; 5 \cdot 0.3 = 1{,}5;\ 16 \cdot 0.4 = 6{,}4;\quad B_1 = 0{,}8 + 1{,}4 + 1{,}5 + 6{,}4 = 10{,}1;$ $W_1 = \min(8; 7; 5; 16) = 5;\ HL_1 = 0{,}4 * 10{,}1 + (1 - 0{,}4) * 5 = 7{,}4.$

Criteriul Hodges-Lehmann pentru câștiguri								
A_i/N_j	N_1	N_2	N_3	N_4	B_i (q)	W_i	HL_i	HL=max(HL_i)
A_1	0,8	1,4	1,5	6,4	**10,1**	**5**	**7,04**	**7,04**
A_2	0,6	0,8	4,5	3,6	**9,5**	**4**	**6,2**	
A_3	0,2	0,2	3,6	4,4	**8,4**	**1**	**3,96**	
A_4	1,3	1,6	0,9	4	**7,8**	**3**	**4,92**	
Probabilitățile stărilor naturii	q_1	q_2	q_3	q_4	**Soluție: Strategia optimă - A1. Prețul jocului v=7.04**			
	0,1	0,2	0,3	0,4				
λ=0.4								

Astfel, conform criteriului *Hodges-Lehmann pentru câștiguri*, strategia optimă pentru jucătorul rațional va fi la fel *A1*, iar valoarea jocului *v=7,04*.

Criteriul Hodges-Lehman pentru riscuri – strategia *A1* se va calcula astfel: $5 \cdot 0.1 = 0{,}5;\ 1 \cdot 0.2 = 0{,}2;\ 10 \cdot 0{,}3 = 3;\ 0 \cdot 0.4 = 0;\quad B_1 = 0{,}5 + 0{,}2 + 3 + 0 = 3{,}7;\quad S_1 = \max(5; 1; 10; 0) = 10;\ HL_1 = 0{,}4 * 3{,}7 + (1 - 0{,}4) * 10 = 7{,}48.$

Criteriul Hodges-Lehmann pentru riscuri								
A_i/N_j	N_1	N_2	N_3	N_4	B_i_r (q)	S_i	HL_i	HL=min(HL_i)
A_1	0,5	0,2	3	0	**3,7**	**10**	**7,48**	**5,92**
A_2	0,7	0,8	0	2,8	**4,3**	**7**	**5,92**	
A_3	1,1	1,4	0,9	2	**5,4**	**11**	**8,76**	
A_4	0	0	3,6	2,4	**6**	**12**	**9,6**	
Probabilitățile stărilor naturii	q_1	q_2	q_3	q_4	**Soluție: Strategia optimă - A2. Prețul jocului v=5,92**			
	0,1	0,2	0,3	0,4				
λ=0.4								

Astfel, conform criteriului *Hodges-Lehmann pentru riscuri*, strategia optimă pentru jucătorul rațional va fi *A2*, iar valoarea jocului *v=5,92*.

Criteriul Hermeyer-Hurwicz – acest criteriu reprezintă criteriul Hurwitz aplicat asupra matricei Hermeyer. Strategia *A1* se va calcula astfel: $8 \cdot 0.1 = 0{,}8;\ 7 \cdot 0.2 = 1{,}4; 5 \cdot 0.3 = 1{,}5;\ 16 \cdot 0.4 = 6{,}4;\ G_1 = \min(0{,}8; 1{,}4; 1{,}5; 6{,}4) = 0{,}8;\ M_1 = \max(0{,}8; 1{,}4; 1{,}5; 6{,}4) = 6{,}4;\ GH_1 = (1 - 0{,}4) * 0{,}8 + 0{,}4 * 6{,}4 = 3{,}4.$

Criteriul Hermeyer-Hurwicz								
A_i/N_j	N_1	N_2	N_3	N_4	G_i	M_i	GH_i	GH=max(GH_i)
A_1	0,8	1,4	1,5	6,4	**0,8**	**6,4**	**3,04**	**3,04**
A_2	0,6	0,8	4,5	3,6	**0,6**	**4,5**	**2,16**	
A_3	0,2	0,2	3,6	4,4	**0,2**	**4,4**	**1,88**	
A_4	1,3	1,6	0,9	4	**0,9**	**4**	**2,14**	
Probabilitățile stărilor naturii	q_1	q_2	q_3	q_4	**Soluție: Strategia optimă - A1. Prețul jocului v=3,04**			
	0,1	0,2	0,3	0,4				
λ=0.4								

Astfel, conform criteriului *Hermeyer-Hurwicz*, strategia optimă pentru jucătorul rațional va fi *A1*, iar valoarea jocului *v=3,4*.

Rezumând rezultatele prezentate mai sus putem spune că strategia optimă pentru jucătorul rațional va fi fi strategia *A1*.

Criteriul selectat	Strategia optimă	Prețul jocului
Criteriului lui Wald, tehnica pesimistă	A1	v=5
Criteriului lui Wald, , tehnica optimistă	A1	v=16
Criteriul pesimismului	A3	v=1
Criteriului lui Savage	A2	v=7
Criteriului lui Hurwicz	A1	v=9.4
Criteriul Bayesian pentru câștiguri	A1	v=10,1
Criteriul Bayesian pentru riscuri	A1	v=3,7.
Criteriul lui Laplace pentru câștiguri	A1	v=9
Criteriul lui Laplace pentru riscuri	A1	v=4
Criteriul lui Bernoulli	A1	v=2,101.
Criteriul lui Hermeyer	A4	v=0,9
Criteriul lui Hodges-Lehmann pentru câștiguri	A1	v=7,04
Criteriului lui Hodges-Lehmann pentru riscuri	A2	v=5,92
Criteriul lui Hermeyer-Hurwicz	A1	v=3,4

Articol realizat în cadrul proiectului de cercetări științifice „Metodologia implementării TIC în procesul de studiere a științelor reale din perspectiva conceptului STEAM și Inteligenței Artificiale", codul 040101, din cadrul Programului instituțional de cercetare (2024-2027), aprobat prin Ordin MEC nr. 102 din 01.02.2024

Bibliografie

1. ROMAN, M.; MARIN, D.; STANCU, S. *Teoria jocurilor pentru economiști*. București, Edutura ASE, 2005, ISBN 973-594-598-3.
2. ENICOV, I. *Aplicarea teoriei jocurilor și a teoriei deciziei în managementul firmei*. Conferința „Aspecte ale dezvoltării potențialului economico-managerial în contextul asigurării securității naționale", secțiunea 1-3, Bălți, Moldova, 6-7 iulie 2015, pp. 153-158. ISBN 978-9975-132-35-0.
3. GAINDRIC, C. *Abordări sistemice în luarea deciziilor*. Universitatea Academiei de Științe a Moldovei Institutul de Matematică și Informatică al AȘM. Chișinău 2017, 156 pag.
4. MÂNDRU, L.; BEGU, L.-S. *Optimizarea deciziilor în condiții de risc și incertitudine*. Universitatea „George Barițiu" Brașov, Academia de Studii Economice București. In: Meridian Ingineresc, 2009, nr. 2, pp. 78-81. ISSN 1683-853X.