

O NOUĂ ABORDARE A PROBLEMEI TRISECȚIEI UNGHIULUI

Gheorghe VODĂ, inginer

<https://orcid.org/0009-0002-4311-043X>

ASEM

Rezumat. În articol se prezintă formule noi în problema trisecției unghiului cu ajutorul conicelor și datorită acestui fapt se propune o nouă viziune la rezolvarea problemei trisecției unghiului cu rigla negradată și compasul, folosind elipsa desenată în plan, nerezolvată până acum. La momentul actual în literatura de matematică sunt descrise trisecția unghiului cu ajutorul parabolei (R. Decarts) și cu ajutorul hiperbolei (M. Chasles). Trisecția unghiului cu ajutorul elipsei desenate în plan este descrisă în simboluri și textual întrucât nu toți cititorii cunosc simbolurile utilizate în geometria constructivă. Conținutul acestui articol contribuie la soluționarea problemei trisecției unghiului cu rigla negradată și compasul. Informația din articol prezintă un interes din domeniul geometriei constructive.

Cuvinte cheie: cercul, elipsa, trisecția unghiului.

A NEW APPROACH TO THE ANGLE TRISECTION PROBLEM

Summary. The article presents new formulas in the problem of trisection of the angle with the help of conics and thanks to this fact a new vision is proposed for solving the problem of trisection of the angle with the ungraded ruler and the compass, using the ellipse drawn in the plane, not solved so far. Currently, the trisection of the angle with the help of the parabola (R. Decarts) and with the help of the hyperbola (M. Chasles) are described in the mathematical literature. The trisection of the angle with the help of the ellipse drawn in the plane is described in symbols and textually since not all readers know the symbols used in constructive geometry. The content of this article contributes to solving the angle trisection problem with the ungraded ruler and the compass. The information in the article is of interest in the field of constructive geometry.

Key words: circle, ellipse, angle trisection.

Introducere

Problemele de construcții geometrice (de regulă executate cu rigla și compasul) se află, de peste două mii de ani, printre problemele esențiale ale geometriei elementare.

Una dintre aceste probleme, trisecția unghiului cu rigla și compasul a provenit din Grecia Antică încă cu două probleme clasice - construirea unui cub de volum dublu față de cel al unui dat și construirea unui pătrat de arie egală cu aria unui disc circular (cuadratura cercului) [1, 2]. Originile problemei trisecției unghiului (construcția unui unghi cu rigla și compasul, fiind a treia parte a unghiului desenat în plan) sunt oarecum obscure. Se presupune că ea a apărut în contextul construcției geometrice a poligoanelor regulate care deseori se foloseau în arhitectură. Și se pare adevărat prin faptul că până acum nu poate fi construit exact cu rigla negradată și compasul un poligon regulat cu 9 laturi al cărui unghi central este de 40° și alte poligoane regulate.

S-au făcut mai multe încercări de a soluționa problema trisecției unghiului, dar mulți dintre marii matematicieni de atunci au înțeles că este imposibilă rezolvarea ei

utilizând doar rigla negradată și compasul deși, ele pot fi rezolvate utilizând suplimentar și alte instrumente. Căutarea altor instrumente pentru rezolvarea problemelor menționate mai sus și mai ales pentru trisecția unghiului a cauzat cercetările conicelor și altor figuri geometrice mai sofisticate (concoida lui Nicomede, cuadratriza lui Hippias, spirala lui Arhimede ș. a.).

Kortum și Smith în două lucrări apreciate de Academia din Berlin în 1866 cu premiul Șteiner, au arătat că fiecare problemă geometrică de gradul al treilea și al patrulea poate fi rezolvată cu strictețe prin desenarea de cercuri și linii drepte, dacă în plan este desenată o secțiune de con diferită de cerc.

La momentul actual sunt cunoscute soluția lui R. Descartes (1596-1650) folosind parabola și metoda lui M. Chasles (1793-1880) folosind hiperbola [3, 4].

Mai puțină informație în literatura de matematică este despre trisecția unghiului cu ajutorul elipsei.

Metode și rezultate obținute

Fiind motivat de acest fapt, Gheorghe Vodă, mai mulți ani, s-a ocupat cu cercetarea problemei trisecției unghiului cu ajutorul elipsei.

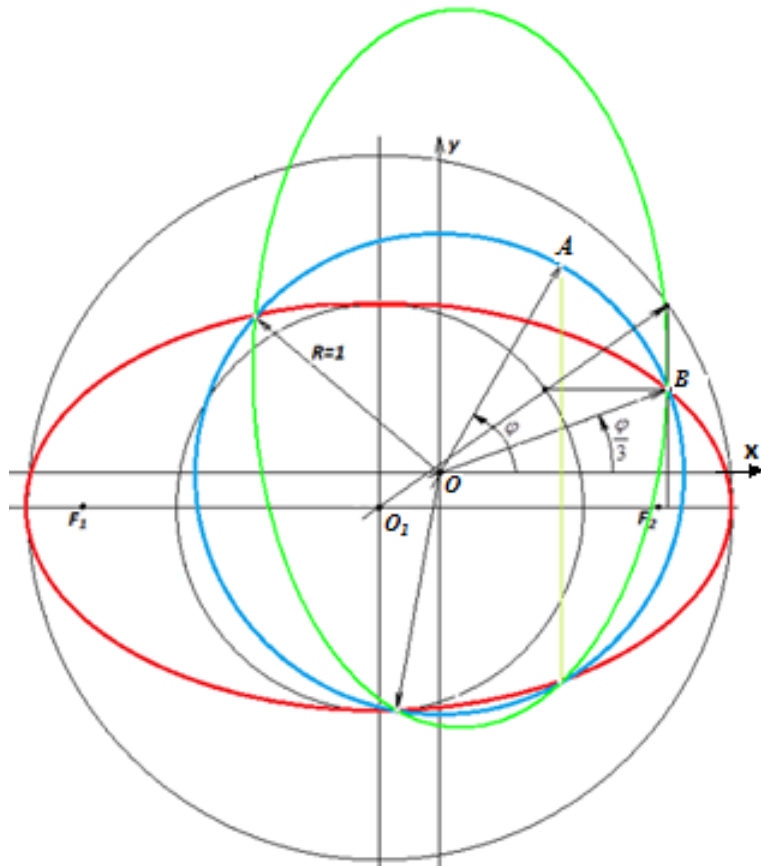


Figura 1. Metoda lui Gheorghe Vodă de trisecție a unghiului folosind elipsa

Autorul a identificat faptul, că trisecția unghiului de mărimea ϕ ($0 < \phi < 90$) reprezintă din punct de vedere algebric rezolvarea sistemului din trei ecuații trigonometrice prezentate mai jos (1) cu (2), (1) cu (3) sau (2) cu (3):

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

$$\frac{\left(x + \frac{\cos \phi}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{\sin^2 \phi}{6}}\right)^2} + \frac{\left(y + \frac{\sin \phi}{6}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{\sin^2 \phi}{18}}\right)^2} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{\left(x - \frac{\cos \phi}{6}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{\cos^2 \phi}{18}}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{\sin \phi}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{\cos^2 \phi}{6}}\right)^2} = 1 \quad (3)$$

iar din punct de vedere geometric în sistemul de coordonate cartezian acest sistem de ecuații reprezintă intersecția cercului trigonometric (1) cu două elipse (fig.1), una orizontală (formula 2) și una verticală (formula 3).

Metoda lui Gheorghe Vodă de trisecție a unghiului folosind elipsa nerezolvată până acum constă în următoarele:

Construcția de trisecție a unghiului $\phi \leq 90^\circ$ cu rigla negradată și compasul, folosind elipsa, în sistemul cartezian de coordonate xOy reprezintă construcția punctului de intersecție a elipsei

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \quad (4)$$

desenată în plan, cu cercul de rază $\frac{1}{b}$ cu următoarea formulă

$$\left(x - \frac{\cos \phi}{2b}\right)^2 + \left(y - \frac{\sin \phi}{6b}\right)^2 = \frac{1}{b^2}, \quad (5)$$

unde

$$b = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{\sin^2 \phi}{18}},$$

iar centrul $O_1(x_0, y_0)$ al cercului după cum parvine din formula (5) are coordonatele

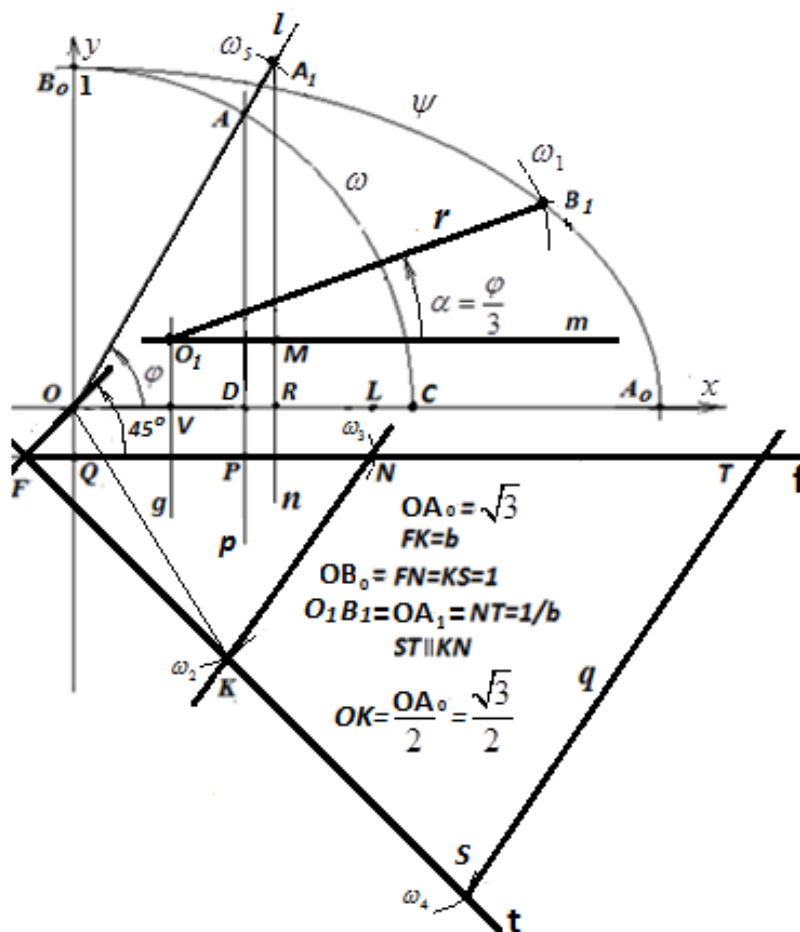
$$x_0 = \frac{\cos \phi}{2b}, y_0 = \frac{\sin \phi}{6b}.$$

Toate segmentele din formula (5) se pot construi cu rigla negradată și compasul. Formulele (4) și (5) sunt deduse în baza unor transformări a ecuațiilor (1) și (2). În construcția care v-a urma în plan este desenată doar a patra parte a elipsei din cadranul I pentru unghiul de trisecție $\phi \leq 90^\circ$.

Construcția unghiului $\alpha = \frac{\phi}{3}$ (fig.2) (în simboluri)

Ca unitate de măsură este luată semiaxa mică a elipsei orizontale desenată în plan (segmentul $[OB_0]=1$) pe axa absciselor).

1. **Dat în sistemul de coordonate xOy :** Linia l , $\angle \phi$, elipsa ψ , $[OB_0]=1$, $[OA_0]=\sqrt{3}$
2. ω (O , $[OB_0]$)
3. $\omega \cap l = A$



Trisecția unghiului cu ajutorul elipsei desenate în plan

15. $\omega_2 \cap t = K$
16. $[FK] = b = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{\sin^2 \phi}{18}}$; **b construit**
17. $\omega_3(F, [OB_0])$
18. $\omega_3 \cap f = N, [FN]=[OB_0]=1$

19. (KN)
20. $\omega_4(K, [OB_0])$
21. $\omega_4 \cap t = S, [KS]=[OB_0]$
22. $q \parallel (KN) : S \in q$
23. $q \cap f = T$
24. $[NT] = \frac{1}{b} = r, \frac{1}{b}$ **construit**
25. $\omega_5(O, [NT])$
26. $\omega_5 \cap l = A_1$
27. $n \perp f : A_1 \in n$
28. $n \cap (Ox) = R.$
29. $[A_1R] = \frac{\sin \phi}{b} = l_2$

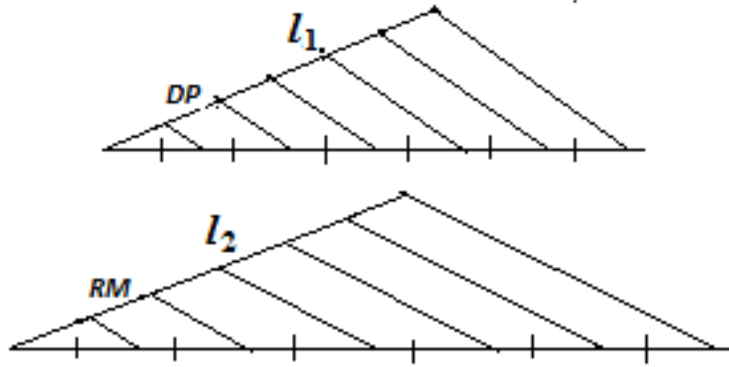


Figura 3. Trisecția unghiului cu ajutorul elipsei desenate în plan

30. $[RM] = \frac{l_2}{6} = \frac{\sin \phi}{6b}$ (fig. 3)
31. $m \perp n : M \in m$
32. $[OR] = \frac{\cos \phi}{b}$
33. $V \in (Ox) : [OV]=[VR]$
34. $[OV] = \frac{[OR]}{2} = \frac{\cos \phi}{2b}$
35. $g \perp [OR] : V \in g$
36. $g \cap m = O_1$
37. $\omega_1(O_1, [OA_1])$ – **cercul de raza $r = \frac{1}{b}$**
38. $\omega_1 \cap \psi = B_1$
39. (O_1B_1)
40. $\angle B_1O_1m = \alpha = \frac{\phi}{3}$ **construit.**

Construcția unghiului $\alpha = \frac{\phi}{3}$ (fig.1) (textual)

1. **Dat în sistemul de coordonate xOy :** Linia l , $\angle \phi$, elipsa ψ , $[OB_0]=1$, $[OA_0]=\sqrt{3}$

2. Trasăm cu ajutorul compasului un arc al cercului ω de raza egală cu lungimea segmentului $[OB_0]=1$ cu centrul în punctul O ;
3. Cercul ω intersectează linia l în punctul A ;
4. Utilizând rigla negradată și compasul din punctul A trasăm linia p perpendiculară pe axa absciselor;
5. Linia p intersectează axa absciselor în punctul D ($[AD]=\sin \varphi = l_1$);
6. Împărțim segmentul $AD=l_1$ în 6 părți egale (fig.3);
7. Din punctul D cu compasul pe linia p depunem segmentul $[DP]$ ($[DP]=\frac{\sin \phi}{6}$);
8. Prin punctul P utilizând compasul și rigla negradată trasăm linia f perpendiculară pe linia p ;
9. Linia f intersectează axa ordonatelor în punctul Q ;
10. Cu ajutorul compasului pe linia f din punctul Q depunem segmentul $[QF]$ egal cu segmentul $[OQ]$ ($[OQ]=[QF]$);
11. Prin punctele O și F cu rigla negradată trasăm linia (OF) ;
12. Utilizând rigla negradată și compasul din punctul F a liniei (OF) trasăm linia t perpendiculară pe linia (OF) ;
13. Utilizând rigla negradată și compasul împărțim segmentul $[OA_0]$ ($[OA_0]=\sqrt{3}$) în 2 segmente egale $[OL]=[LA_0]=\frac{\sqrt{3}}{2}$;
14. Cu ajutorul compasului din punctul F trasăm un arc al cercului ω_2 de raza egală cu segmentul $[OL]$;
15. Arcul cercului ω_2 de raza egală cu segmentul $[OL]$ intersectează linia t în punctul K ;
16. $[FK] = b = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{\sin^2 \phi}{18}}$; b construit
17. Cu ajutorul compasului din punctul F trasăm un arc al cercului ω_3 de raza egală cu segmentul $[OB_0]=1$, care intersectează linia f în punctul N ($[FN]=1$);
18. Prin punctele K și N cu rigla negradată trasăm linia (KN) ;
19. Cu ajutorul compasului din punctul K trasăm un arc al cercului ω_4 de raza egală cu segmentul $[OB_0]=1$, care intersectează linia t în punctul S ($[KS]=1$);
20. Utilizând rigla negradată și compasul din punctul S a liniei t trasăm linia q paralelă liniei (KN) [$q \parallel (KN)$];
21. Linia q intersectează linia f în punctul T ;
22. Segmentul $[NT] = \frac{1}{b}$, **construit**;
23. Cu ajutorul compasului din punctul O trasăm un arc al cercului ω_5 de raza egală cu segmentul $[NT] = \frac{1}{b}$, care intersectează linia l în punctul A_I ($[OA_I]=1/b$);
24. Utilizând rigla negradată și compasul prin punctul A_I trasăm linia n perpendiculară pe axa absciselor;

25. Linia n intersectează axa absciselor în punctul R ($[A_1R] = \frac{\sin \phi}{b} = l_2$);
26. Utilizând rigla negradată și compasul împărțim segmentul $[A_1R] = l_2$ în 6 segmente egale (fig.3);
27. Din punctul R cu compasul pe linia n depunem segmentul $[RM]$ ($[RM] = \frac{\sin \phi}{6b}$);
28. Utilizând rigla negradată și compasul prin punctul M trasăm linia m perpendiculară pe linia n ;
29. Utilizând rigla negradată și compasul împărțim segmentul $[OR] = \frac{\cos \phi}{b}$ în 2 segmente egale și obținem punctul V ($[VR] = [OV] = \frac{[OR]}{2} = \frac{\cos \phi}{2b}$);
30. Utilizând rigla negradată și compasul prin punctul V trasăm linia g perpendiculară pe segmentul $[OR]$;
31. Linia g intersectează linia m în punctul O_I (centrul cercului **(5) construit**);
32. Cu ajutorul compasului din punctul O_I trasăm un arc al cercului ω_1 de raza egală
33. cu segmentul $[OA_1] = \frac{1}{b}$, care intersectează elipsa ψ în punctul B_I ;
34. Cu rigla negradată prin punctele O_I și B_I trasăm linia $(O_I B_I)$;
35. $\angle B_1 O_1 m = \alpha = \frac{\phi}{3}$ **construit**.

O nouă tratare a problemei trisecția unghiului inclusiv și construcția de trisecție a unghiului $\phi \leq 90^\circ$ cu rigla negradată și compasul folosind elipsa (nerezolvată până acum) sunt descrise în cartea „Cercul, elipsa și trisecția unghiului“ (autor Gheorghe Vodă, editura „Tipografia Centrală“ or. Chișinău, anul 2023).

Despre autor

Vodă Gheorghe Nichifor. Născut 27 iulie 1941 în satul Boldurești raionul Nisporeni. A absolvit școala medie din satul Seliște același raion. În anul 1964 a absolvit Institutul Politehnic din Chișinău (recent Universitatea Tehnică din Moldova). Încă din anii de școală a fost pasionat de matematică, dar mai ales de trigonometrie și algebră. Această pasiune a rămas pentru toată viața. Făcând cunoștință cu formula Cardano pentru rezolvarea ecuației trinomului cubic în cazul în care cele trei rădăcini sunt numere reale el a rămas nedumerit de faptul că pentru identificarea acestor rădăcini este necesar de a extrage rădăcina de ordinul trei din număr complex. Fiind motivat de acest fapt el a încercat să găsească alte formule de rezolvare a ecuației trinomului cubic fără a răsfoi literatura de matematică. Până la urmă el a ajuns la un principiu unic de deducere a formulelor de rezolvare a ecuațiilor algebrice de gradul trei și patru cu ajutorul polinoamelor. Căutând alte soluții el a dedus două formule pentru identificarea rădăcinilor trinomului cubic prin metode numerice când ele sunt numere reale întregi, printre care și căutarea numerelor Pitagora $u^2 + v^2 = z^2$. După cum este cunoscut

rezolvarea trigonometrică a ecuației trinomului cubic este strâns legată de trisecția unghiului. Această problemă provenită din vechime frământă și până acum mințile oamenilor. Pe tema trisecției unghiului este foarte multă informație. În lucrarea dată un interes mai deosebit reprezintă metoda de trisecție a unghiului cu ajutorul unei elipse desenate în plan, elementele căreia nu depind de mărimea unghiului dat (de la 0 până la 90 grade) pentru trisecție, utilizând doar rigla negradată și compasul. Despre această metodă nu este informație în literatura de matematică.

Bibliografie

1. ПРАСОЛОВ, В. Три классические задачи на построение. Москва: «Наука», 1992.
2. АДЛЕР, А. Теория геометрических построений. Санкт-Петербург: Учпедгиз, 1940.
3. KLEIMAN, S. L. Chasles's enumerative theory of conics: a historical introduction. In: *Studies in algebraic geometry*. Washington, D.C., 1980. pp. 117-138.
4. BERTRAND, J. Michel Chasles. In : *Éloges académique*. Paris, 1902. pp. 27-58.