APLICAREA RELAŢIILOR METRICE ÎN TRIUNGHI LA DETERMINAREA EXTREMELOR FUNCŢIILOR

Dorin AFANAS, dr., conf. univ.
Universitatea de Stat din Tiraspol
email: dorinafanas@rambler.ru

Key words: minimum, maximum, extremes of function, cosines theorem, metric relations, triangle.

Abstract. In this paper the application of metric relations in triangle for determination of extremes of functions is studied.
The proposed method is efficient when the traditional methods leads to cumbersome calculations.

1. Noţiuni preliminare

Considerăm funcţia $f: I \to R$ (intervalul $I \subseteq R$) de o singură variabilă x.

Definiţia 1.1. *Punctul $x_0 \in I$ se numeşte punct de minim local al funcţiei f dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît are loc relaţia $f(x_0) \leq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap I$. În acest caz valoarea funcţiei în punctul x_0, adică $f(x_0)$ se numeşte minim local al funcţiei f* [1, p. 137].

Definiţia 1.2. *Punctul $x_0 \in I$ se numeşte punct de maxim local al funcţiei f dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît are loc relaţia $f(x_0) \geq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap I$. În acest caz valoarea funcţiei în punctul x_0, adică $f(x_0)$ se numeşte maxim local al funcţiei f* [1, p. 137-138].

Punctele de minim local şi de maxim local ale funcţiei $f(x)$ se numesc *puncte de extrem local* ale acestei funcţii.

Valorile funcţiei $f(x)$ în punctele ei de extrem local se numesc *extremele locale* ale acestei funcţii.

Definiţia 1.3. *Punctul $x_0 \in I$ se numeşte punct de minim global al funcţiei f dacă are loc relaţia $f(x_0) \leq f(x)$ pentru orice $x \in I$, iar valoarea funcţiei în punctul x_0, adică $f(x_0)$ se numeşte minim global al funcţiei f pe intervalul I* [1, p. 138].

Definiţia 1.4. *Punctul $x_0 \in I$ se numeşte punct de maxim global al funcţiei f dacă are loc relaţia $f(x_0) \geq f(x)$ pentru orice $x \in I$, iar valoarea funcţiei în punctul x_0, adică $f(x_0)$ se numeşte maxim global al funcţiei f pe intervalul I* [1, p. 138].

Punctele de minim global şi de maxim global ale funcţiei $f(x)$ se numesc *puncte de extrem global* ale acestei funcţii.

Valorile funcţiei $f(x)$ în punctele ei de extrem global se numesc *extremele globale* ale acestei funcţii.

Observaţia 1.5. Un punct de minim (maxim) local nu este în mod necesar un punct de minim (maxim) global, iar un punct de minim (maxim) global este, în acelaşi timp, şi un punct de minim (maxim) local.

Observaţia 1.6. Este posibil ca un minim local al unei funcţii să fie mai mare decît un maxim local al aceleiaşi funcţii.

De obicei minimul unei funcţii se notează cu m, iar maximul ei – cu M.

Considerăm funcţia $f\colon I \to R$ (intervalul $I \subseteq R$) derivabilă pe intervalul I.

Definiţia 1.7. *Punctele în care derivata f' ia valoarea zero se numesc puncte critice ale funcţiei f.*

Punctul x_0 va fi un punct critic, dacă are loc una din următoarele trei condiţii:

1) $f'(x_0) = 0$; 2) $f'(x_0) = \infty$; 3) $f'(x_0)$ nu există, iar însuşi funcţia $f(x)$ în punctul $x = x_0$ este definită.

Geometric aceste condiţii ne indică că:

• în punctul critic tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu axa (Ox), dacă se realizează condiţia 1 (vezi fig. 1);

• în punctul critic tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu axa (Oy), dacă se realizează condiţia 2 (vezi fig. 2);

• tangenta la graficul funcţiei nu există, dacă se realizează condiţia 3 (vezi fig. 3).

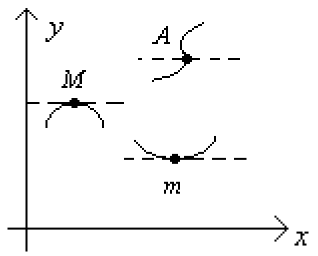

Fig. 1

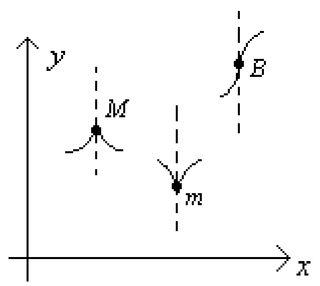

Fig. 2

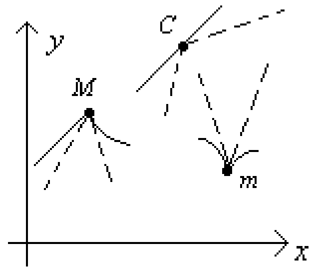

Fig. 3

Admitem că funcţia $f\colon I \to R$ (intervalul $I \subseteq R$) este derivabilă pe intervalul I, iar x_0 este un punct interior lui I în care $f'(x_0) = 0$, adică x_0 este un punct critic al acestei funcţii.

Primul criteriu suficient de extrem al funcţiei $f(x)$. *Dacă la trecerea prin punctul critic x_0 prima derivată $f'(x)$ îşi schimbă semnul, atunci acest punct critic este un punct de extrem.*

• *Punctul x_0 este un punct de minim local al funcţiei $f(x)$, dacă pentru orice $x \in I$ au loc relaţiile: $f'(x) < 0$ pentru $x < x_0$ şi $f'(x) > 0$ pentru $x > x_0$. Se notează: $\searrow f(x_0) \nearrow$.*

• *Punctul x_0 este un punct de maxim local al funcţiei $f(x)$, dacă pentru orice $x \in I$ au loc relaţiile: $f'(x) > 0$ pentru $x < x_0$ şi $f'(x) < 0$ pentru $x > x_0$. Se notează: $\nearrow f(x_0) \searrow$.*

• *Dacă derivata $f'(x)$ are acelaşi semn la stînga şi la dreapta lui x_0, atunci x_0 nu este punct de extrem al acestei funcţii.*

Aplicînd **primul criteriu suficient de extrem al funcţiei $f(x)$** este comod de utilizat aşa-numitul *tablou de variaţie al funcţiei*.

	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x_2 < x < x_3$	x_3	$x_3 < x < x_4$	etc.
$f'(x)$		–	0	+	*n.e.*	+	...
$f(x)$		↘	m	↗	*n.d.*	↗	...

Pe linia întîi a acestui tablou se indică domeniul de definiţie al funcţiei şi punctele în care derivata ei se anulează sau nu există. Pe linia a doua – semnele derivatei funcţiei pe intervalele pe care derivata ei se anulează. Pe ultima linie se indică descreşterea (↘), creşterea (↗) funcţiei, precum şi extremele ei. Inscripţia *n.e.* – înseamnă, că derivata nu există, iar inscripţia *n.d.* – înseamnă că funcţia nu este definită.

Menţionăm, că extremele globale ale unei funcţii $f : [a, b] \to R$ derivabile pe intervalul (a, b) pot fi determinate aplicînd algoritmul:

I. Se calculează $f'(x)$.

II. Se află punctele critice ale funcţiei $f(x)$, adică se rezolvă ecuaţia $f'(x) = 0$, $x \in (a, b)$.

III. Se calculează valorile funcţiei $f(x)$ în punctele critice determinate şi se compară cu valorile acesteia la extremităţile intervalului: cea mai mică (mare) dintre aceste valori va fi minimul (maximul) global al funcţiei $f(x)$ pe $[a, b]$.

În unele cazuri este dificil de a stabili semnul derivatei la stînga şi la dreapta punctelor critice. În asemenea cazuri se utilizează alt criteriu suficient de extrem, fără a mai studia semnul funcţiei $f'(x)$, cu condiţia că funcţia $f(x)$ posedă derivate de ordin superior pe intervalul I.

Al doilea criteriu suficient de extrem al funcţiei $f(x)$. *Punctul critic $x_0 \in (a, b)$ este un punct de extrem al funcţiei $f: (a, b) \to R$, dacă prima derivată ce nu primeşte valoarea zero în acest punct are ordin par. Dacă această derivată de ordin par este pozitivă (negativă), atunci punctul critic $x_0 \in (a, b)$ este un punct de minim (maxim) pentru funcţia $f(x)$.*

De exemplu, dacă au loc condiţiile: $f'(x_0) = 0$ şi $f''(x_0) \neq 0$, atunci pentru $f''(x_0) > 0$ avem $f(x_0) = m$ (minim), iar pentru $f''(x_0) < 0$ avem $f(x_0) = M$ (maxim).

Considerăm funcţia de două variabile $z = f(x; y)$ definită în careva vecinătate a punctului $(x_0; y_0)$ [3, p. 319].

Definiţia 1.8. *Vom spune că funcţia $z = f(x; y)$ are în punctul $(x_0; y_0)$ minim (maxim) local dacă există o astfel de vecinătate a punctului $(x_0; y_0)$ în care pentru orice punct $(x; y)$ se verifică inegalitatea $f(x; y) \geq f(x_0; y_0)$ $(f(x; y) \leq f(x_0; y_0))$.*

Din definiţia 1.8 rezultă că dacă funcţia $z = f(x; y)$ are extrem în punctul $(x_0; y_0)$, atunci creşterea totală $\Delta z = f(x; y) - f(x_0; y_0)$ a acestei funcţii în punctul $(x_0; y_0)$ satisface în careva vecinătate a punctului $(x_0; y_0)$ una din următoarele condiţii: $\Delta z \geq 0$ (în cazul minimului local); $\Delta z \leq 0$ (în cazul maximului local).

Reciproc, dacă în careva vecinătate a punctului $(x_0; y_0)$ este satisfăcută una din inegalităţile de mai sus, atunci funcţia are extrem în punctul $(x_0; y_0)$.

Criteriul necesar de extrem al funcţiei $f(x; y)$. *Dacă funcţia $f(x; y)$ are extrem în punctul $(x_0; y_0)$ şi admite derivate parţiale de ordinal întîi, atunci aceste derivate sunt egale cu zero, adică* $f'_x(x_0; y_0) = f'_y(x_0; y_0) = 0$.

Notăm [4, p. 406]: $r = f''_{x^2}(x_0; y_0)$, $s = f''_{xy}(x_0; y_0)$, $t = f''_{y^2}(x_0; y_0)$ şi $\Delta = rt - s^2$.

Criteriul suficient de extrem al funcţiei $f(x; y)$. *Dacă în punctul critic* $(x_0; y_0)$ *avem*:

- $\Delta > 0$ *şi* $r > 0$, *atunci* $(x_0; y_0)$ *este un punct de minim*;
- $\Delta > 0$ *şi* $r < 0$, *atunci* $(x_0; y_0)$ *este un punct de maxim*;
- $\Delta < 0$, *atunci în punctul* $(x_0; y_0)$ *nu există extrem*;
- $\Delta = 0$, *atunci în punctul* $(x_0; y_0)$ *funcţia* $f(x; y)$ *poate să aibă, dar poate şi să nu aibă extrem*. *În acest caz sunt necesare cercetări suplimentare*.

Deseori întîlnim probleme în care se cere de aflat valoarea cea mai mică (mare) a funcţiei $z = f(x; y)$ într-un domeniu închis oarecare D. Cu acest scop este necesar de aflat toate valorile minime (maxime) ale acestei funcţii din interiorul domeniului D şi valorile funcţiei pe frontierea domeniului D, iar apoi alegem din ele valoarea cea mai mică (mare). Menţionăm, că nu este necesar de calculat derivatele parţiale de ordinul doi şi de utilizat criteriul suficient de extrem, deoarece toate extremele funcţiei $f(x; y)$ se află printre valorile sale în punctele critice. Este suficient de aflat valorile funcţiei $f(x; y)$ în toate punctele critice şi dintre ele de ales valoarea cea mai mică (mare).

Problema aflării celei mai mici (mari) valori a funcţiei $z = f(x; y)$ pe frontiera domeniului D se reduce la determinarea celei mai mici (mari) valori a unei funcţii de o singură variabilă.

Raţionamente analoage au loc şi pentru funcţiile de trei şi mai multe variabile.

2. Determinarea extremelor funcţiilor prin intermediul relaţiilor metrice în triunghi

Vom cerceta la extrem funcţii de o singură variabilă şi de trei variabile prin metode netradiţionale. Problemele 2.1 – 2.4, 2.6 le vom numi probleme de tipul I, iar problemele 2.8 – 2.11 le vom numi probleme de tipul II.

Problema 2.1. Aflaţi valoarea cea mai mică a funcţiei $f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{81}{25}} + \sqrt{x^2 + \frac{256}{25}}$.

Rezolvare. Metoda tradiţională. Această funcţie este definită pe toată axa numerică. Dacă utilizăm primul criteriu de extrem al funcţiei de o singură variabilă, atunci derivata de ordinul întîi a acestei funcţii este:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{81}{25}}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{256}{25}}}.$$

Egalăm această derivată cu zero, adică rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$ sau ecuaţia

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{81}{25}}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{256}{25}}} = 0,$$

care admite numai soluţia $x = 0$.

Alcătuim tabloul de variaţie al funcţiei $f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{81}{25}} + \sqrt{x^2 + \frac{256}{25}}$:

	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < +\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	5	$\nearrow$

Deci valoarea cea mai mică 5, funcţia dată o primeşte în punctul $x = 0$.

Dacă utilizăm al doilea criteriu de extrem, atunci obţinem:

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2 + \frac{81}{25}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{81}{25}}}}{x^2 + \frac{81}{25}} + \frac{\sqrt{x^2 + \frac{256}{25}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{256}{25}}}}{x^2 + \frac{256}{25}} =$$

$$= \frac{81}{25\left(x^2 + \frac{81}{25}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{256}{25\left(x^2 + \frac{256}{25}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Observăm că $f''(0) > 0$. Deci, $x = 0$ este un punct de minim pentru funcţia dată şi cea mai mică valoare a ei este $f(0) = 5$.

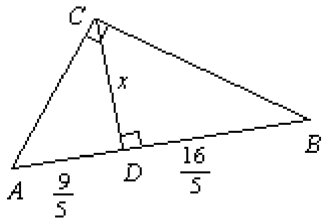

Fig. 4

Metoda netradiţională (fig. 4). Construim segmentele $AD = \frac{9}{5}$ şi $DB = \frac{16}{5}$ situate pe aceeaşi dreaptă. Din punctul D ridicăm perpendiculara $CD = x$. Unim punctul C cu punctele A şi B. Atunci $AC = \sqrt{x^2 + \frac{81}{25}}$ şi $BC = \sqrt{x^2 + \frac{256}{25}}$. Suma $AC + BC$ va primi valoarea minimală numai atunci cînd punctele A, C şi B vor fi coliniare, adică atunci cînd

$$AC + CB = AB.$$

Însă lungimea segmentului $AB = 5$. Prin urmare, valoarea cea mai mică a funcţiei este 5.

În continuare vom rezolva probleme numai prin metoda netradiţională.

Problema 2.2. Aflaţi valoarea cea mai mică a funcţiei $f(x) = \sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-4x\sqrt{3}+16}$.

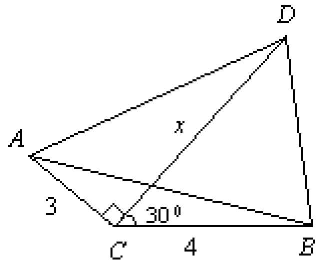

Fig. 5

Rezolvare. Cercetăm triunghiul dreptunghic *ACD* (fig. 5), unde $AC = 3$, $CD = x$, $m(\angle ACD) = 90^0$ şi triunghiul *BCD*, unde $m(\angle BCD) = 30^0$, $CB = 4$, $CD = x$.

Conform teoremei lui Pitagora, din triunghiul dreptunghic *ACD* obţinem $AD = \sqrt{x^2+9}$, iar din triunghiul *BCD*, conform teoremei cosinusului avem $BD = \sqrt{x^2-4x\sqrt{3}+16}$. A determina valoarea cea mai mică a funcţiei date înseamnă a determina lungimea cea mai mică a liniei frînte *ADB*. Deci $\min f(x) = \min (AD + BD) = AB$, adică punctul *D* trebuie să fie situat pe segmentul *AB*. Dar atunci, conform teoremei cosinusului, din triunghiul *ABC*, obţinem:

$$AB = \sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos 120^0} = \sqrt{3^2+4^2+3\cdot 4} = \sqrt{37}.$$

Prin urmare, $\min f(x) = \sqrt{37}$.

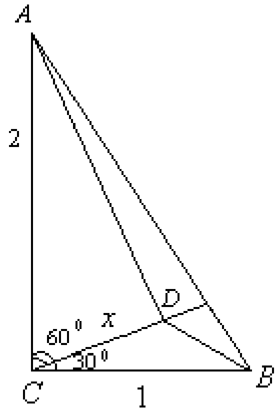

Fig. 6

Problema 2.3. Aflaţi valoarea cea mai mică a funcţiei

$$f(x) = \sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}.$$

Rezolvare. Cercetăm triunghiul *ACD* (fig. 6) în care $AC = 2$, $m(\angle ACD) = 60^0$, $CD = x$ şi triunghiul *BCD* în care $BC = 1$, $CD = x$, $m(\angle BCD) = 30^0$. Atunci, din triunghiul *ACD*, conform teoremei cosinusului obţinem $AD = \sqrt{x^2-2x+4}$. Analog, din triunghiul *BCD* obţinem $DB = \sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}$. Valoarea cea mai mică a funcţiei va fi:

$m = \min(AD + DB) = AB$, adică $D \in AB$.

Din triunghiul dreptunghic *ACD* primim $AB = \sqrt{5}$. Prin urmare, valoarea cea mai mică a funcţiei este $m = \sqrt{5}$.

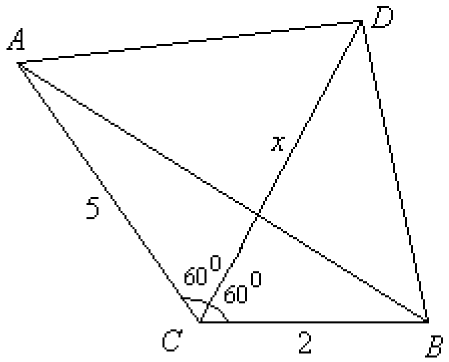

Fig. 7

Problema 2.4. Aflaţi valoarea cea mai mică a funcţiei

$$f(x) = \sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-5x+25}.$$

Rezolvare. Cercetăm figura 7. Observăm că în acest caz *CD* este bisectoarea unghiului *ACB*. Vom avea:

$$AD = \sqrt{x^2-5x+25} \text{ şi } BD = \sqrt{x^2-2x+4}.$$

Aplicînd raţionamentele de mai sus, din triunghiul *ABC*, conform teoremei cosinusului obţinem:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 120^0} =$$
$$= \sqrt{5^2 + 2^2 + 5 \cdot 2} = \sqrt{39}.$$

Nota 2.5. În figurile 4 – 7 punctul D poate fi situat atît în interiorul triunghiului ABC cît şi în exteriorul lui. La rezultat aceasta nu influenţează, deoarece valoarea cea mai mică a funcţiei se obţine numai atunci cînd $D \in [AB]$.

Problema 2.6. Aflaţi valoarea cea mai mare a funcţiei $f(x) = \sqrt{x^2+49} - \sqrt{x^2-3x+9}$.

Rezolvare. Construim triunghiul dreptunghic ACB (fig. 8) în care $AC = x$, $BC = 7$, $m(\angle ACB) = 90^0$ şi triunghiul ACD, în care $CD = 3$, $m(\angle ACD) = 60^0$, $AC = x$. Atunci, conform teoremei lui Pitagora, din triunghiul dreptunghic ACB avem: $AB = \sqrt{x^2+49}$, iar din triunghiul ACD primim: $AD = \sqrt{x^2-3x+9}$. Deci $f(x) = AB - AD$ şi

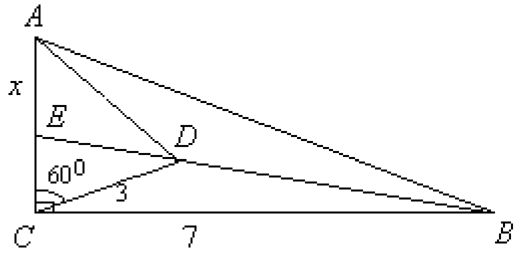

Fig. 8

$$\max f(x) = \max(AB - AD) = EB - ED = DB,$$

unde $E \in [AC]$, adică dacă $D \notin [AB]$.

Din triunghiul BCD, conform teoremei cosinusului primim:

$$DB = \sqrt{CD^2 + BC^2 - 2CD \cdot BC \cdot \cos 30^0} = \sqrt{3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} =$$
$$\sqrt{58 - 21\sqrt{3}}.$$

Nota 2.7. Spre deosebire de metodele tradiţionale, metoda prezentată aici ne permite să determinăm valoarea cea mai mică (mare) a funcţiei, fără a afla punctul în care ea primeşte această valoare.

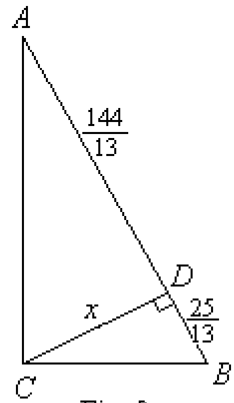

Fig. 9

Problema 2.8. Pentru ce valoare a lui x funcţia

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{625}{169}} + \sqrt{x^2 + \frac{20736}{169}}$$

primeşte valoarea cea mai mică.

Rezolvare. În acest caz din figura 9 observăm că funcţia va obţine valoarea cea mai mică pentru $x = 0$.

Problema 2.9. Pentru ce valoare a lui x funcţia

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 6x\sqrt{2} + 36}$$

primeşte valoarea cea mai mică.

Rezolvare. Cercetăm figura 10. Din triunghiul dreptunghic *ACD* avem $AD = \sqrt{x^2+16}$, iar din triunghiul *BCD* obţinem $DB = \sqrt{x^2-6x\sqrt{2}+36}$. Aria triunghiului *ACD* este $2x$, aria triunghiului *BCD* este $\frac{3x\sqrt{2}}{2}$, iar aria triunghiului *ACB* va fi $6\sqrt{2}$. Deoarece $A_{\Delta ACB} = A_{\Delta ACD} + A_{\Delta BCD}$, atunci

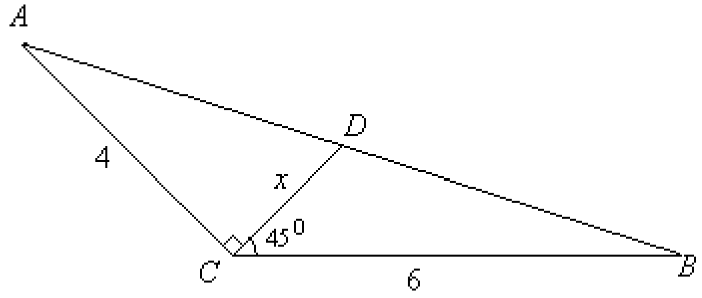

Fig. 10

$$2x + \frac{3x\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2},\ 4x + 3x\sqrt{2} = 12\sqrt{2},\ x = \frac{12\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} = 36-24\sqrt{2}.$$

Problema 2.10. Pentru ce valoare a lui x funcţia $f(x) = \sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-2x\sqrt{3}+4}$ primeşte valoarea cea mai mică.

Rezolvare. Utilizînd figura 11, aflăm ariile triunghiurilor *ACD, BCD* şi *ACB*, unde $AC = BC = 2$, $AD = \sqrt{x^2-2x+4}$, $DB = \sqrt{x^2-2x\sqrt{3}+4}$ şi $CD = x$. Vom obţine: $A_{\Delta ACD} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $A_{\Delta BCD} = \frac{x}{2}$ şi $A_{\Delta ACB} = 2$.

Deoarece $A_{\Delta ACB} = A_{\Delta ACD} + A_{\Delta BCD}$, atunci

$$2 = \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2},\ \frac{x\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = 2,\ x = 2\left(\sqrt{3}-1\right).$$

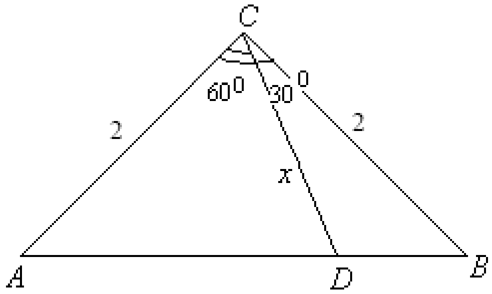

Fig. 11

Problema 2.11. Pentru ce valoare a lui x funcţia $f(x) = \sqrt{x^2-3x\sqrt{3}+9}+\sqrt{x^2-5x\sqrt{3}+25}$ primeşte valoarea cea mai mică.

Rezolvare. Din figura 12 observăm că:

$AD = \sqrt{x^2-3x\sqrt{3}+9}$, $DC = \sqrt{x^2-5x\sqrt{3}+25}$,

$AB = 3$, $BC = 5$, $BD = x$ şi $m(\angle ABD) = m(\angle CBD) = 30^0$. Ariile triunghiurilor *ABD, CBD* şi *ABC* vor fi respectiv:

$$A_{\Delta ABD} = \frac{3x}{4},\ A_{\Delta CBD} = \frac{5x}{4} \text{ şi } A_{\Delta ACB} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

Din egalitatea

$$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta ABD} + A_{\Delta CBD},$$

obţinem:

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{3x}{4} + \frac{5x}{4},\ 15\sqrt{3} = 8x,\ x = \frac{15\sqrt{3}}{8}.$$

Nota 2.12. În problemele 2.9 – 2.11 valoarea lui *x* se poate de determinat utilizînd formula din [2, Teorema 1.8, p. 15]. Conform acestei formule vom obţine respectiv:

$$x = \frac{6\cdot 4\left(\cos 90^0 \cdot \sqrt{1-\cos^2 45^0} + \cos 45^0 \cdot \sqrt{1-\cos^2 90^0}\right)}{6\cdot\sqrt{1-\cos^2 45^0} + 4\cdot\sqrt{1-\cos^2 90^0}} =$$

$$= \frac{24\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+4} = \frac{24\sqrt{2}}{6\sqrt{2}+8} = \frac{12\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+4} = 36 - 24\sqrt{2} \text{ (Problema 2.9);}$$

$$x = \frac{2\cdot 2\left(\cos 60^0 \cdot \sqrt{1-\cos^2 30^0} + \cos 30^0 \cdot \sqrt{1-\cos^2 60^0}\right)}{2\cdot\sqrt{1-\cos^2 30^0} + 2\cdot\sqrt{1-\cos^2 60^0}} =$$

$$= \frac{4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1+3}{\sqrt{3}+1} = 2\left(\sqrt{3}-1\right) \text{ (Problema 2.10).}$$

Pentru Problema 2.11 de asemenea este valabilă formula utilizată din [2, Teorema 1.8, p. 15]. Însă în acest caz observăm că *x* = *BD* este bisectoarea interioară a triunghiului *ABC* şi utilizînd formula din [2, Corolarul 1.9, p. 16] vom obţine:

$$x = \frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3+5} = \frac{15\sqrt{3}}{8} \text{ (Problema 2.11).}$$

Cercetăm în continuare la extrem funcţii de mai multe variabile.

Problema 2.12. Aflaţi valoarea cea mai mică a funcţiei:

$$f(x;y;z) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{y^2+16} + \sqrt{z^2+36}, \text{ dacă } x+y+z=5.$$

Rezolvare. Metoda standardă. Aplicarea metodei standarde ne conduce la calcule destul de voluminoase, care sunt arătate mai jos.

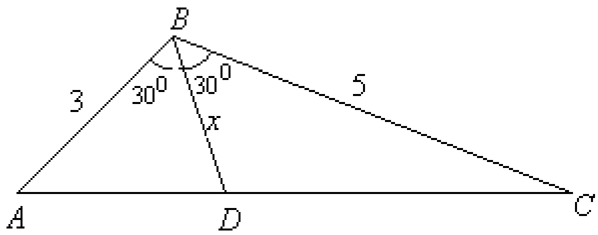

Fig. 12

Deoarece $z = 5 - x - y$, atunci obţinem funcţia de două variabile:

$$f(x;y) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{y^2+16} + \sqrt{(5-x-y)^2+36}.$$

Derivatele parţiale de ordinul întîi ale acestei funcţii sunt:

$$f_x^{/}(x;y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{5-x-y}{\sqrt{(5-x-y)^2+36}},$$

$$f_y^{/}(x;y) = \frac{y}{\sqrt{y^2+16}} - \frac{5-x-y}{\sqrt{(5-x-y)^2+36}}.$$

Egalăm aceste derivate cu zero:

$$f_x^{/}(x;y)=0,\ f_y^{/}(x;y)=0,$$

de unde

$x\sqrt{y^2+16}=y\sqrt{x^2+4}$, $x^2y^2+16x^2=x^2y^2+4y^2$,

$$y^2=4x^2,\ y=\pm 2x.$$

Atunci $z = 5 - 3x$ şi $z = 5 + x$.

Admitem că $y = 2x$. Atunci obţinem:

$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}-\dfrac{5-3x}{\sqrt{(5-3x)^2+36}}=0.$ Această ecuaţie admite unica soluţie $x=\dfrac{5}{6}$. Prin urmare,

$$y=\frac{5}{3},\ \text{iar } z=\frac{5}{2}.$$

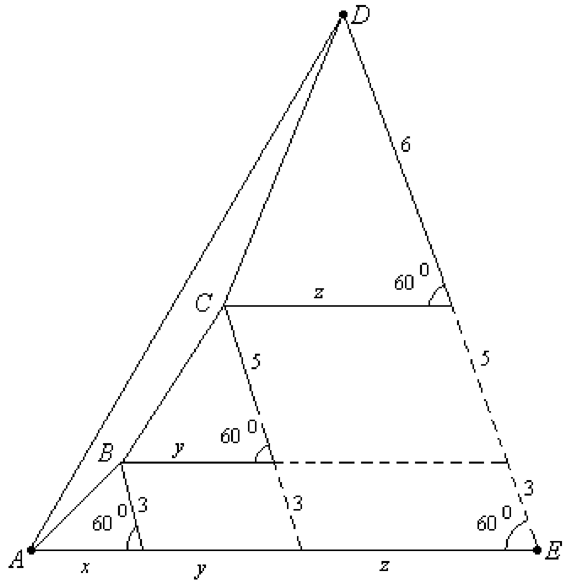

Fig. 14

Admitem acum că $y = -2x$. Atunci primim ecuaţia:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{5-3x}{\sqrt{(5-3x)^2+36}}=0,$$

de unde rezultă ecuaţia pătrată:

$$8x^2-10x-25=0,$$

care admite soluţiile: $x_1=-\dfrac{5}{4}$ şi $x_2=-\dfrac{5}{2}$. Dar atunci

$$y_1=\frac{5}{2} \text{ şi } y_2=-5, \text{ iar } z_1=\frac{15}{4} \text{ şi } z_2=\frac{15}{2}.$$

Astfel am obţinut trei puncte:

$$\left(\frac{5}{6};\frac{5}{3};\frac{5}{2}\right),\ \left(-\frac{5}{4};\frac{5}{2};\frac{15}{4}\right) \text{ şi } \left(-\frac{5}{2};-5;\frac{15}{2}\right).$$

În fine obţinem:

$$f\left(\frac{5}{6};\frac{5}{3};\frac{5}{2}\right)=\sqrt{\frac{25}{36}+4}+\sqrt{\frac{25}{9}+16}+\sqrt{\frac{25}{4}+36}=$$

$$=\frac{13}{6}+\frac{13}{3}+\frac{13}{2}=\frac{78}{6}=13;$$

$$f\left(-\frac{5}{4};\frac{5}{2};\frac{15}{4}\right)=\sqrt{\frac{25}{16}+4}+\sqrt{\frac{25}{4}+16}+\sqrt{\frac{225}{16}+36}=$$

$$=\frac{\sqrt{89}}{4}+\frac{\sqrt{89}}{2}+\frac{3\sqrt{89}}{4}=\frac{3\sqrt{89}}{2};$$

$$f\left(-\frac{5}{2};-5;\frac{15}{2}\right)=\sqrt{\frac{25}{4}+4}+\sqrt{25+16}+\sqrt{\frac{225}{4}+36}=$$

$$=\frac{\sqrt{41}}{2}+\sqrt{41}+\frac{3\sqrt{41}}{2}=3\sqrt{41}.$$

Prin urmare, valoarea cea mai mică a funcţiei date este 13.

Metoda nestandardă. Cercetăm figura 13. Funcţia dată va obţine valoarea cea mai mică atunci cînd lungimea liniei frînte *ABCD* va avea lungimea cea mai mică. Aceasta este posibil numai atunci cînd punctele *A*, *B*, *C* şi *D* vor fi situate pe una şi aceeaşi dreaptă, adică valoarea cea mai mică a funcţiei date trebuie să fie lungimea segmentului *AD*, care este ipotenuza triunghiului dreptunghic. Deoarece catetele triunghiului dreptunghic sunt 5 şi 12, rezultă că *AD* = 13. Deci valoarea cea mai mică a funcţiei este 13.

În continuare mai cercetăm încă două probleme pe care le vom rezolva prin metoda nestandardă.

Problema 2.13. Aflaţi valoarea cea mai mică a funcţiei

$$f(x;y;z)=\sqrt{x^2-3x+9}+\sqrt{y^2-5y+25}+\sqrt{z^2-6z+36},$$

dacă $x+y+z=7$.

Rezolvare. Din figura 14 observăm că

$$AB=\sqrt{x^2-3x+9},\ BC=\sqrt{y^2-5y+25}\ \text{şi}$$

$$CD=\sqrt{z^2-6z+36}.$$

Deci $f(x;y;z)=AB+BC+CD$.

Valoarea cea mai mică a funcţiei va fi lungimea segmentului *AD*. Dar atunci, din triunghiul *ADE*, conform teoremei cosinusului, vom obţine:

$$AD=\sqrt{AE^2+DE^2-2AE\cdot DE\cdot\cos 60^0}=$$

$$=\sqrt{7^2+14^2-2\cdot 7\cdot 14\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{245-98}=7\sqrt{3}.$$

Prin urmare, valoarea cea mai mică a funcţiei date este $7\sqrt{3}$, dacă $x+y+z=7$.

Metoda nestandardă propusă poate fi utilizată şi la rezolvarea problemelor mai dificile.

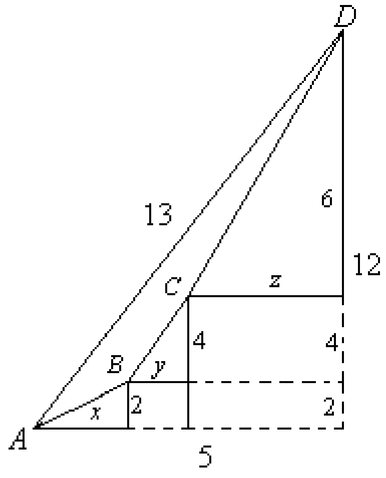

Fig. 13

Problema 2.14. Aflaţi valoarea cea mai mică a funcţiei

$$f(x;y;z)=\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}+\sqrt{y^2-2y\sqrt{2}+4}+\sqrt{z^2-3z+9},$$

$$\text{dacă } x + y + z = \frac{2\sqrt{2}+3+\sqrt{3}}{2}.$$

Rezolvare. Cercetăm figura 15, în care $AF = x$, $FD = 1$, $m(\angle AFD) = 30^0$, $DT = y$, $ET = 2$, $m(\angle DTE) = 45^0$, $ES = z$, $SB = 3$, $m(\angle ESB) = 60^0$. Din triunghiul AFD, conform teoremei cosinusului obţinem:

$$AD = \sqrt{x^2 - x\sqrt{3}+1};$$

din triunghiul DTE obţinem

$$DE = \sqrt{y^2 - 2y\sqrt{2}+4},$$

iar din triunghiul ESB primim:

$$EB = \sqrt{z^2 - 3z + 9}.$$

În triunghiul dreptunghic FKD avem:

$$KF = \frac{1}{2},\ DK = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dar atunci $FP = KT = y - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Triunghiul dreptunghic TPQ este isoscel, deoarece $m(\angle PQT) = m(\angle DTE) = 45^0$ (conform construcţiei) şi deci $PQ = PT = KF = \frac{1}{2}$, $TQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Atunci

$$FQ = FP + PQ = y - \frac{\sqrt{3}-1}{2},\ EQ = ET + TQ = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

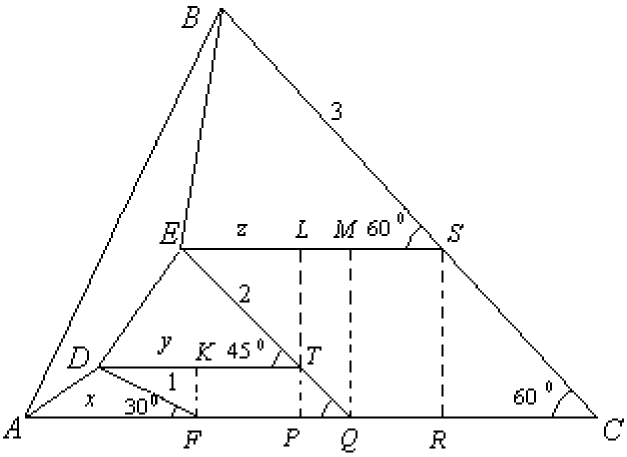

Fig. 15

Triunghiul dreptunghic ELT este isoscel şi deci $EL = LT = \sqrt{2}$.

Din triunghiul dreptunghic isoscel EMQ avem $EM = MQ = \sqrt{2}+\frac{1}{2}$. Atunci

$$QR = MS = z - \sqrt{2} - \frac{1}{2};\ SR = MQ = \sqrt{2}+\frac{1}{2}.$$

Din triunghiul dreptunghic SRC vom obţine:

$$SC = \frac{2\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3};\ RC = \frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Atunci

$$QC = QR + RC = z - \sqrt{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$BC = BS + SC = 3 + \frac{2\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3} = \frac{9+2\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3};$$

$$AC = AF + FQ + QC = x + y - \frac{\sqrt{3}-1}{2} + z - \sqrt{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+3+\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$AC^2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12} + \sqrt{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} =$$

$$= \frac{27+8+1+12\sqrt{6}+6\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{12} = \frac{18+6\sqrt{6}+3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6};$$

$$BC^2 = \left(\frac{9+2\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{81+24+3+36\sqrt{6}+18\sqrt{3}+12\sqrt{2}}{9} =$$

$$= \frac{27+8+1+12\sqrt{6}+6\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{3} = \frac{36+12\sqrt{6}+6\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{3};$$

$$AC \cdot BC = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \cdot \left(\frac{9+2\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{18} \cdot \left(9+2\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \left(81+24+3+36\sqrt{6}+18\sqrt{3}+12\sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{18+6\sqrt{6}+3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3}.$$

Atunci din triunghiul *ABC*, conform teoremei cosinusului, obţinem:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 60^0} =$$

$$= \sqrt{\frac{18+6\sqrt{6}+3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6} + \frac{36+12\sqrt{6}+6\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{3} - \frac{18+6\sqrt{6}+3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3}} =$$

$$= \sqrt{9+3\sqrt{6}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}+\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1}{2}.$$

Prin urmare, valoarea cea mai mică a funcţiei este

$$\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1}{2}, \text{ dacă } x + y + z = \frac{2\sqrt{2}+3+\sqrt{3}}{2}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. Ion Achiri ş. a. *Matematică. Manual pentru clasa a XI-a*. Chişinău: Prut Internaţional, 2003, 304 p.

2. Dorin Afanas. *Generalizarea unei metode geometrice de rezolvare a ecuațiilor iraționale*. Didactica Matematicii şi Informaticii. Prima Conferinţă a Societăţii Matematice a Republicii Moldova, Chişinău, 2002, p. 10 – 16.

3. Şipaciov V. S. *Matematica superioară*. Chişinău: Lumina, 1992, 494 pag.

4. Дюбюк П. Е. *Сборник задач по высшей математике*. Москва, Высшая школа, 1964, 664 стр.