OMOLOGII ȘI STRUCTURI ABSTRACTE

Mitrofan CIOBANU, academician, dr. hab., prof. univ.
Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat: Fie R un inel și G și un R-modul. Notăm cu $S(X,G)$ R-modul cuvintelor cu alfabetul X și coeficienții din G. Sistemul $T = \{E_n, h_n: n \in N\}$ se numește șir de mulțimi orientate, dacă satisface condițiile: mulțimea E_0 este nevidă și $h_0: E_0 \to 0$ este o aplicație; dacă $n \geq 1$ și mulțimea E_n este vidă, atunci și mulțimea E_{n+1} este vidă; dacă $n \geq 1$ și mulțimea E_n este nevidă, atunci $h_n: E_n \to S(E_{n-1}, G)$ este o aplicație. dacă $n \geq 2$, $x \in E_n$ și $h_n(x) = a_1x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m$, atunci G-cuvântul $h_{n-1}(h_n(x)) = a_1h_{n-1}(x_1) + a_2h_{n-1}(x_2) + ... + a_m h_{n-1}(x_m)$ este echivalent cu cuvântul nul 0 din $S(E_{n-2}, G)$. În lucrare se propune o metodă de construire a grupurilor de omomologii și coomologii cu ajutorul conceptului de șir de mulțimi orientate.

Abstract: Let R be a ring and G be an R-modul. Denote by $S(X,G)$ the R-modul of all words with the alphabet X and coeficients from G. System $T = \{E_n, h_n: n \in N\}$it is called a sequence of oriented sets if: the set E_0 is non-empty and $h_0: E_0 \to 0$ is a mapping; if $n \geq 1$ and the set E_n is empty, then the set E_{n+1} is empty too; if $n \geq 1$ and the set E_n is non-empty, then $h_n: E_n \to S(E_{n-1}, G)$ is a mapping; if $n \geq 2$, $x \in E_n$ and $h_n(x) = a_1x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m$, then the G-word $h_{n-1}(h_n(x)) = a_1h_{n1}(x_1) + a_2h_{n-1}(x_2) + ... + a_m h_{n-1}(x_m)$ it is equivalent with the word 0 from $S(E_{n2}, G)$. We prepose a method of construction of homological groups and cohomological groups applying the concept of the sequence of oriented sets.

1. Introducere

Topologia face parte din categoria disciplinelor de bază în matematică. Topologia algebrică oferă metode eficiente de studiere a spațiilor topologice și a structurilor adiacente lor prin intermediul structurilor discrete de tip algebric: grupuri, module, spații vectoriale, grupuri gradate, algebre etc.

În lucrarea prezentă se introduce noțiunea de *șir de mulțimi orientate*, care este o generalizare a noțiunii de *complex de lanțuri* . Orice șir de mulțimi orientate generează un complex de lanțuri, care la rândul său generează un șir de omologii și un șir de coomologii. Acest fapt simplifică construirea șirurilor de omologii și de coomologii pentru complexul de cuburi abstracte și complexul de relații multi-are [4].

2. Un formalism de construire a grupurilor de omologii și coomologii

În acest paragraf se va descrie o metodă generală de construire a unui *complex*: *un șir de module și omomorfisme.* Examinăm numai grupuri abeliene. Notăm cu $\boldsymbol{Z}$ inelul numerelor întregi, iar $\boldsymbol{N} = \{0, 1, 2, ... \}$.

2.1.Module. Fie R un inel. Se numește R-modul sau simplu modul un grup abelian G astfel încât pentru orice $x \in G$ și orice $\lambda \in R$ este determinat produsul $\lambda x \in G$ și se satisfac următoarele restricții: $\lambda(x+y) = \lambda x+\lambda y$, $(\lambda+\mu)x = \lambda x+\mu x$, $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ pentru orice $x, y \in G$ și $\lambda, \mu \in R$. R-modulul G se numește unitar, dacă R este un inel cu unitate și $1x = x$ pentru orice $x \in G$. Orice grup abelian este un Z-modul unitar. Ideal al R-modulului G se numește un așa subgrup H al grupului G pentru care $R \cdot H = \{ \lambda x: x \in H, \lambda \in R\} \subset H$. Dacă H este un ideal al R-modulului G, atunci în mod univoc se construiește R-modulul-cât G/H și factor-omomorfismul p_H: $G \to G/H$ pentru care nucleul $Ker(p_H) = p_H^{-1}(0) = H$. R-modulul-cât

G/H este format din clase de echivalențe de forma $x+H$ la echivalența: $x \sim y$ dacă și numai dacă $x-y \in H$.

2.2. Ideale și omomorfisme. Fie A, B două R-module, L un ideal al modulului A, M un ideal al modulului B, $f: A \to B$ un omomorfism și $f(L) \subset M$. Atunci $f(x+H) \subset f(x)+M$ pentru orice $x \in G$. Obținem că f aplică o clasă de echivalență din A/L într-o clasă de echivalență din B/M. Deci f este și o aplicație al R-modulului A/L în R-modulul B/M. Aplicația f: $A/L \to B/M$ este un omomorfism și $f \bullet p_L = p_M \bullet f$, adică este comutativă diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \\ p_L \downarrow & & \downarrow p_M \\ A/L & \xrightarrow{\quad f \quad} & B/M. \end{array}$$

Omomorfismul f: $A/L \to B/M$ se numește omomorfism indus de omomorfismul f: $A \to B$. Dacă $B = f(A)$ și $L = f^{-1}(M)$, atunci f: $A/L \to B/M$ este un isomorfism.

2.3.Module de lanțuri. Fixăm un inel R și un R-modul G.

Fie E o mulțime nevidă. Expresia formală $c = a_1x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m$, unde $x_1, x_2, ..., x_m \in E$ și $a_1, a_2, ..., a_m \in G$ se numește G-cuvânt de lungimea $\leq n$. Simbolul 0 se consideră G-cuvânt de lungimea 0. Dacă σ: $\{1, 2, ..., m\} \to \{1, 2, ..., m\}$ este o permutare și $c = a_1x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$ este un G-cuvânt, atunci G-cuvintele $c = a_1x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m$ și $c_\sigma = a_{\sigma(1)}x_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)}x_{\sigma(2)} + ... + a_{\sigma(m)} x_{\sigma(m)}$ se consideră echivalente și se identifică. Clasele de G-cuvinte echivalente formează un modul notat prin $S(E,G)$. Fiecare element din $S(E,G)$ se numește E-lanț cu coeficienți din G. Modulul $S(E,G)$ este suma directă a E exemplare a modulului G. Modulul $S(E,G)$ poate fi identificat cu totalitatea aplicațiilor f: $E \to G$ cu proprietatea: mulțimea $\{x \in E : f(x) \neq 0\}$ este finită. Modulul $S(E,G)$ poate fi prezentat și ca un submodul al produsului cartezian G^E. Din acest punct de vedere, considerăm $S(\varnothing, G) = \{0\}$.

Dacă H este o submulțime nevidă a mulțimii E, atunci $S(E,G)$ este un ideal al modulului $S(E,G)$. Construim aplicația multivocă Sup_E: $S(E,G) \to E$ la care $Sup_E(c) = \cap\{H \subset E: c \in S(H,G)\}$ pentru orice $c \in S(E,G)$. Mulțimea $Sup_E(c)$ se numește suportul elementului $c \in S(E,G)$. Mulțimile $Sup_E(c)$ sunt finite și numai pentru $c = 0$ mulțimea $Sup_E(c)$ este vidă. Dacă $c = a_1x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m$, unde $a_1, a_2, ... a_m \in G \setminus\{0\}$ și $x_1, x_2, ... x_m \in E$ sunt elemente diferite, atunci $Sup_E(c) = \{x_1, x_2, ... x_m\}$.

Orce aplicație $g: E \to Y$ generează un unic omomorfism $\bar{g}: S(E,G) \to S(Y,G)$ pentru care $\bar{g}(a_1x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m) = a_1g(x_1) + a_2g(x_2) + ... + a_mg(x_m)$. De asemenea, orice aplicație $g: E \to A$, unde A este un R-modul, generează un unic omomorfism $\bar{g}: S(E,G) \to A$ pentru care $\bar{g}(a_1x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m) = a_1g(x_1) + a_2g(x_2) + ... + a_mg(x_m)$.

2.4. Exemplu. Fie $R = G = Z$ și E o mulțime nevidă. Notăm $-E = \{-x: x \in E\}$ și $E^* = E \cup (-E)$. Atunci expresia formală $c = x_1 + x_2 + ... + x_m$, unde $x_1, x_2, ..., x_m \in E^*$ se numește Z-cuvânt de lungimea m. Simbolul 0 se consideră Z-cuvânt de lungimea 0. Dacă σ: $\{1, 2, ...,$

$m\}\to\{1, 2, ..., m\}$ este o permutare și $c = x_1 + x_2 + ... + x_m$ un Z-cuvânt, atunci Z-cuvintele $c = x_1 + x_2 + ... + x_m$ și $c_\sigma = x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)} + ... + x_{\sigma(n)}$ se consideră echivalente și se identifică. Clasele de Z-cuvinte echivalente formează Z-modulul liber (grupul abelian liber) $F(E)$ generat de mulțimea E. Vom avea $E \subset F(E) = S(E,Z)$. Orice aplicație $g: E \to Y$ generează un unic omomorfism $\overline{g}: F(E) \to F(Y)$ pentru care $g = \overline{g}|E$. De asemenea, orice aplicație $g: E \to A$, unde A este un Z-modul (grup abelian), generează un unic omomorfism $\overline{g}: F(E) \to A$ pentru care $g = \overline{g}|E$. Și în acest caz vom avea aplicația suport $Sup_E: F(E) \to E$. Fie $x \in E$ și $a \in G$. Atunci $-x \in E^*$ și considerăm că $a(-x) = (-a)x$. Prin urmare elementele $a \in G$ și $c = x_1 + x_2 + ... + x_m \in F(E)$ determină elementul $ac = ax_1 + a x_2 + ... + ax_m \in S(E,G)$.

2.5. Exemplu. Fie $R = G$ și E o mulțime nevidă. Notăm $-E = \{-x: x \in E\}$ și $E^* = E \cup (-E)$. Atunci expresia formală $c = a_1x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m$, unde $x_1, x_2, ..., x_m \in E$ și $a_1, a_2, ..., a_m \in R$, se numește R-cuvânt de lungimea $\le m$. Simbolul 0 se consideră R-cuvânt de lungimea 0. Dacă σ: $\{1, 2, ..., m\}\to\{1, 2, ..., m\}$ este o permutare și $c = a_1x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m$ un R-cuvânt, atunci R-cuvintele $c = a_1x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m$ și $c_\sigma = a_{\sigma(1)} x_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} x_{\sigma(2)} + ... + a_{\sigma(m)} x_{\sigma(m)}$ se consideră echivalente și se identifică. Considerăm $0 + c = c + 0 = c$ pentru orice R-cuvânt c. Dacă $c = a_1x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m$, elementele $x_1, x_2, ..., x_m \in E$ sunt diferite și $a_1, a_2, ..., a_m \in R\backslash\{0\}$, atunci cuvântul c se numește simplu. Cuvântul 0 se consideră simplu. Orice cuvânt este echivalent cu un cuvânt simplu. Clasele de R-cuvinte echivalente formează R-modulul liber $S(E, R)$ generat de mulțimea E. Identificăm $x \in E$ cu $1x$. Vom avea $E \subset S(E,R)$. Orice aplicație $g: E \to Y$ generează un unic omomorfism $\overline{g}: S(E,R) \to S(Y,R)$ pentru care $g = \overline{g}|E$. De asemenea, orice aplicație $g: E \to A$, unde A este un R-modul generează un unic omomorfism $\overline{g}: F(E) \to A$ pentru care $g = \overline{g}|E$.

2.6. Module de omomorfisme. Fixăm un inel R. Fie A și B R-module și $f: A \to B$ un omomorfism. Notăm cu $Hom(A,G)$ totalitatea omomorfismelor $g: A \to G$. Pentru orice două omomorfisme $g, h : A \to G$ se determină suma $g+h$: $(g+h)(x) = g(x)+h(x)$ pentru orice $x \in A$. Dacă $\lambda \in R$, atunci λf, unde $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$, este de asemenea un omomorfism. Prin urmare $Hom(A,G)$ față de aceste operații este un R-modul, numit modulul de omomorfisme. Omomorfismul $f : A \to B$ generează omomorfismul dual $\overline{f}: Hom(B,G) \to Hom(A,G)$, unde $\overline{f}(g) = g \bullet f$ pentru orice $g \in Hom(B, G)$.

Dacă $g \in Hom(A, G)$ și $x \in A$, atunci notăm $\langle g,x\rangle = g(x)$.Obținem operatorul de evaluare $\langle .,. \rangle : Hom(A, G)\times A \to G$ care pentru orice $x \in A$ generează omomorfismul $e_x : Hom(A, G) \to G$, unde $e_x(g) = \langle g,x\rangle = g(x)$. Putem considera că $e_x = \langle .,x\rangle|Hom(A, G)\times\{x\}$.

2.6. Complexe de lanțuri. Fixăm un inel R. Orice modul se consideră R-modul.

Se numește complex de lanțuri un șir C = $\{C_n, \partial_n: n \in N\}$ format din modulele C_n și omomorfismele $\partial_{n+1}: C_{n+1} \to C_n$ cu proprietățile:

- $\partial_0: C_0 \rightarrow 0$ este omomorfismul în modulul trivial format numai din elementul 0;
- $\partial_n \partial_{n+1} = 0$, adică $\partial_n (\partial_{n+1}(C_{n+1})) = \{0\} \subset C_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$.

Omomorfismele ∂_n se numesc operatori de frontieră sau diferențiali. Complexul de lanțuri poate fi scris sub forma

$\ldots \rightarrow C_{n+1} \rightarrow C_n \rightarrow \ldots \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0.$

Un șir $A \rightarrow B \rightarrow C$ format din trei module și două omomorfisme $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ se numește:

- *semiexact* în terminul B, dacă $Imf = f(A) \subset g^{-1}(0) = Ker\ g$;
- *exact* în terminul B, dacă $Imf = f(A) = g^{-1}(0) = Ker\ g$.

Șirul $A \rightarrow B \rightarrow C$ format din trei module și omomorfismele $f: A \rightarrow B,\ g: B \rightarrow C$ se numește *direct* sau *despicat* sau *scindat*, dacă modulul $B = A \oplus C$ este sumă directă a modulelor A și C, $f: A \rightarrow B$ este o scufundare isomorfică și $g: B \rightarrow C$ este proiecția naturală. Conform definiției, complexul de lanțuri

$\ldots \rightarrow C_{n+1} \rightarrow C_n \rightarrow \ldots \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$

întotdeauna este semiexact, adică semiexact în fiecare termin C_n. Fixăm un complex de lanțuri C = $\{C_n, \partial_n: n \in N\}$. Elementele din C_n se numesc lanțuri n-dimensionale. Lanțul $c \in C_n$ se numește ciclu n-dimensional, dacă $\partial_n c = 0$, adică $c \in Ker\ \partial_n$. Modulul format din cicluri n-dimensionale se notează cu Z_n(T). Lanțul $c \in C_n$ se numește lanț n-dimensional de frontieră, dacă $c = \partial_{n+1}(c')$ pentru un careva lanț $n+1$-dimensional $c' \in C_{n+1}$ adică $c \in \mathrm{Im}\ \partial_{n+1} = \partial_{n+1}(C_{n+1})$. Modulul format din lanțuri n-dimensionale de frontieră se notează cu B_n(T). Submodulele Z_n(T) și B_n(T) sunt ideale ale modulului C_n. Modulul H_n(T) = Z_n(T)/B_n(T) se numește modul sau grup n-dimensional de omologie al complexului de lanțuri T. Deoarece $\partial_{n+1}(Z_{n+1}(T)) \subset Z_n(T)$și $\partial_{n+1}(B_{n+1}(T)) \subset B_n(T) \subset Z_n(T)$, vom considera $\partial_{n+1} = \partial_{n+1}|Z_{n+1}(T)$. Fie p_n: $Z_n(T) \rightarrow H_n(T) = Z_n(T)/B_n(T)$ proiecția naturală. Atunci omomorfismull ∂_{n+1} induce omomorfismul $\partial_{n+1} : H_{n+1}(T) \rightarrow H_n(T)$ astfel încât $p_n \bullet \partial_{n+1} = \partial_{n+1} \bullet p_{n+1}$. În rezultat se obține șirul de omologii $H(T) = \{H_n(T), \partial_n: n \in N\}$ al complexului de lanțuri T\:

$\ldots \rightarrow H_{n+1}(T) \rightarrow H_n(T) \rightarrow \ldots \rightarrow H_2(T) \rightarrow H_1(T) \rightarrow H_0(T) \rightarrow 0.$

Este evident că șirul de omologii $H(T)$ este și un complex de lanțuri.

2.7. Complexe de co-lanțuri. Fixăm un inel R. Orice modul se consideră R-modul. Se numește complex de co-lanțuri un șir C = $\{C_n, \delta_n: n \in N\}$ format din modulele C_n și omomorfisme $\delta_{n+1}: C_n \rightarrow C_{n+1}$ cu proprietățile:

- $\delta_0: 0 \rightarrow C_0$ este omomorfismul modulului trivial;
- $\delta_{n+1} \delta_n = 0$, adică $\delta_{n+1} (\delta_n(C_{n-1})) = \{0\} \subset C_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$.

Omomorfismele δ_n se numesc operatori de frontieră sau diferențiali. Complexul de co-lanțuri poate fi scris sub forma

$0 \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \ldots \rightarrow C_{n-1} \rightarrow C_n \rightarrow C_{n+1} \rightarrow \ldots\ldots$.

Conform definiției, complexul de co-lanțuri întotdeauna este semiexact, adică semiexact în fiecare termin C_n.
Fixăm un complex de co-lanțuri C = $\{C_n, \delta_n: n \in N\}$. Elementele din C_n se numesc co-lanțuri n-dimensionale. Co-lanțul $c \in Ker\ \delta_{n+1}$ se numește co-ciclu n-dimensional. Idealul format din toate co-ciclurile n-dimensionale se notează cu $Z^n(\mathrm{T})$. Lanțul $c \in C_n$ se numește lanț n-dimensional de frontieră, dacă $c = \delta_{n-1}(c')$ pentru un careva co-lanț n-1-dimensional $c' \in C_{n-1}$ adică $c \in \mathrm{Im}\delta_n = \delta_n(C_{n-1})$. Modulul format din co-lanțuri n-dimensionale de frontieră se notează cu $B^n(\mathrm{T},G)$. Modulul $H^n(\mathrm{T}) = Z^n(\mathrm{T})/B^n(\mathrm{T})$ se numește modul sau grup n-dimensional de coomologie al complexului de co-lanțuri T. Deoarece $\delta_{n+1}(Z^n(\mathrm{T}))\subset Z^{n+1}(\mathrm{T})$și $\delta_{n+1}(B^n(\mathrm{T}))\subset B^{n+1}(\mathrm{T})\subset Z^{n+1}(\mathrm{T})$, vom considera $\delta_{n+1}= \delta_{n+1}|Z^n(\mathrm{T})$. Fie p_n: $Z^n(\mathrm{T})\rightarrow H^n(\mathrm{T}) = Z^n(\mathrm{T})/B^n(\mathrm{T})$proiecția naturală. Atunci omomorfismul δ_{n+1} induce omomorfismul $\delta_{n+1} : H^n(\mathrm{T}) \rightarrow H^{n+1}(\mathrm{T})$ astfel îcât $p_{n+1}\bullet\delta_{n+1} = \delta_{n+1}\bullet p_n$. În rezultat se obține șirul de coomologii $H^*(\mathrm{T}) = \{H^n(\mathrm{T}), \delta_n: n \in N\}$al complexului de co-lanțuri T :
$0\rightarrow H^0(\mathrm{T})\rightarrow H^1(\mathrm{T})\rightarrow H^2(\mathrm{T}) \rightarrow\ldots\rightarrow H^n(\mathrm{T}) \rightarrow H^{n+1}(\mathrm{T})\rightarrow\ldots$.
Este evident că șirul de coomologii $H^*(\mathrm{T})$ este și un complex de co-lanțuri.
2.8.Complexul *G*-dual. Fixăm un inel R și un R-modul G. Complexul de lanțuri C = $\{C_n, \partial_n: n \in N\}$ generează complexul de co-lanțuri $\mathrm{T}(G) = \{Hom(C_n,G),\ \bar{\partial}_n: n \in N\}$. Vom spune că complexul $\mathrm{T}(G)$ este G-dualul complexului T . Șirul de coomologii $H^*(\mathrm{T}(G)) = \{H^n(\mathrm{T}(G)),\ \bar{\partial}_n: n \in N\}$ se va numi șirul de coomologii cu coeficienți din G al complexului de lanțuri T .

Complexul de co-lanțuri C = $\{C_n, \delta_n: n \in N\}$ generează complexul de lanțuri $\mathrm{T}(G) = \{Hom(C_n,G),\ \bar{\delta}_n: n \in N\}$. Vom spune că complexul $\mathrm{T}(G)$ este G-dualul complexului T . Șirul de omologii $H(\mathrm{T}(G)) = \{H_n(\mathrm{T}(G)),\ \bar{\delta}_n: n \in N\}$ se va numi șirul de omologii cu coeficienți din G al complexului de co-lanțuri T .
2.9.Șiruri de mulțimi orientate. Fixăm un inel R și un R-modul G.
Sistemul T = $\{E_n, h_n: n \in N\}$ se numește *șir de mulțimi orientate*, dacă satisface condițiile:

(i) mulțimea E_0 este nevidă și $h_0: E_0\rightarrow 0$ este o aplicație;
(ii) dacă $n \geq 1$ și mulțimea E_n este vidă, atunci și mulțimea E_{n+1} este vidă;
(iii) dacă $n \geq 1$ și mulțimea E_n este nevidă, atunci $h_n: E_n\rightarrow S(E_{n-1}, G)$ este o aplicație.
(iv) dacă $n \geq 2$, $x \in E_n$ și $h_n(x) = a_1x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m$, atunci G-cuvântul $h_{n-1}(h_n(x)) = a_1h_{n-1}(x_1) + a_2h_{n-1}(x_2) + \ldots + a_m h_{n-1}(x_m)$ este echivalent cu cuvântul nul 0 din $S(E_{n-2}, G)$.

Fie T = $\{E_n, h_n: n \in N\}$ un șir de mulțimi orientate. Modulul $S(E_n,G)$ se numește modulul de lanțuri n-dimensionale al șirului T cu coeficienți din G și ce notează cu $S_n(\mathrm{T},G)$. Dacă mulțimea E_n este vidă, atunci $S_n(\mathrm{T},G) = \{0\}\subset G$. Dacă $n \geq 1$ și mulțimea E_n nu este vidă, atunci construim aplicația multivocă $\Gamma_n: E_n \rightarrow E_{n-1}$ la care $\Gamma_n(x) = \cap\{H \subset E_{n-1}: h_n(x) \in$

$F(H)\} = Sup_{E_{n-1}}(x)$. Dacă $h_n(x)= a_1x_1 +a_2 x_2 + ... +a_m x_m$, unde $a_1, a_2, ... a_m \in Z \setminus \{0\}$ și $x_1, x_2, ... x_m \in E_{n-1}$ sunt elemente diferite, atunci $\Gamma_n(x) =\{x_1, x_2, ... x_m\}$. Vom spune că Γ_n este aplicația suport a aplicației h_n, iar mulțimea $\Gamma_n(x)$ este frontiera elementului $x \in E_n$ in E_{n-1}. În cazul când mulțimea E_n este vidă aplicația Γ_n este trivială. Elementul $h_n(x)$ reprezintă ”o orientare” a frontierei.

Considerăm omomorfizmul trivial ∂_0: $S_0(\mathrm{T},G)\rightarrow S_{-1}(\mathrm{T},G) =0$. Dacă mulțimea E_{n+1} este vidă, atunci considerăm omomorfizmul trivial $\partial_{n+1}:S_{n+1}(\mathrm{T},G) \rightarrow \{0\} \subset S_n(\mathrm{T},G)$. Fie $n \geq 1$ și mulțimea E_{n+1} nu este vidă. Aplicația h_{n+1}: $E_{n+1}\rightarrow F(E_n)$ generează omomorfismul $\partial_{n+1}= \overline{h}_{n+1}$: $S_{n+1}(\mathrm{T},G) \rightarrow S_n(\mathrm{T},G)$, unde $\partial_{n+1}(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_n x_n) = a_1 h_{n+1}(x_1) +a_2h_{n+1}(x_2) + ... +a_mh_{n+1}(x_m)$ pentru orice G-cuvânt $a_1x_1 +a_2 x_2 + ... +a_m x_m \in S_{n+1}(\mathrm{T},G)$. Dacă $x \in E_{n+1}$, atunci considerăm că $h_{n+1}(-x) = -h_{n+1}(x)$. În acest caz omomorfismul de frontieră ∂_{n+1} este bine definit.

În rezultat se obține complexul de lanțuri $S(\mathrm{T},G) = \{S_n(\mathrm{T},G), \partial_n: n \in N\}$ și complexul de colanțuri G-dual $S^*(\mathrm{T},G) = \{S^n(\mathrm{T},G), \delta_n: n \in N\}$ al șirului de mulțimi orientate $\mathrm{T} = \{E_n, h_n: n \in N\}$:

Complexul de lanțuri $S(\mathrm{T},G) = \{S_n(\mathrm{T},G), \partial_n: n \in N\}$ induce șirul de omologii $H(\mathrm{T},G) = \{H_n(\mathrm{T},G), \partial_n: n \in N\}$ al șirului de mulțimi orientate $\mathrm{T} = \{E_n, h_n: n \in N\}$:

$...\rightarrow H_{n+1}(\mathrm{T},G) \rightarrow H_n(\mathrm{T},G)\rightarrow...\rightarrow H_2(\mathrm{T},G) \rightarrow H_1(\mathrm{T},G) \rightarrow H_0(\mathrm{T},G) \rightarrow 0.$

Complexul de co-lanțuri $S^*(\mathrm{T},G) = \{S^n(\mathrm{T},G), \delta_n: n \in N\}$ induce șirul de coomologii $H^*(\mathrm{T},G) = \{H^n(\mathrm{T},G), \delta_n: n \in N\}$ al șirului de mulțimi orientate $\mathrm{T} = \{E_n, h_n: n \in N\}$:

$0 \rightarrow H^0(\mathrm{T},G) \rightarrow H^1(\mathrm{T},G) \rightarrow H^2(\mathrm{T},G) \rightarrow ... \rightarrow H^n(\mathrm{T},G) \rightarrow H^{n+1}(\mathrm{T},G)\rightarrow...$.

Notă. Dacă $n\geq 1$, mulțimea E_n nu este vidă și mulțimea E_{n+1} este vidă, atunci:

- $H_n(\mathrm{T},G)=Z_n(\mathrm{T},G)$;
- $H_m(\mathrm{T},G)=0$ pentru orice $m \geq n+1$.

Notăm cu $v(\mathrm{T}) = max\{n: E_n$ *nu este vidă*$\}$.

Definiția 1. *Șirul de mulțimi orientate* $\mathrm{T} = \{E_n, h_n: n \in N\}$ *se numește singular, dacă mulțimea* $h_n(E_{2n})= \{h_{2n}(x): x \in E_{2n}\}$ *generează algebric modulul* $F(E_{2n-1})$ *pentru orice* $n\geq 1$.

Definiția 2 ([11], Definiția V.4.7). *Șirul de mulțimi orientate* $\mathrm{T} = \{E_n, h_n: n \in N\}$ *se numește similar cu un punct, dacă* $\partial_{2n} : S_{2n}(\mathrm{T},G)) \rightarrow S_{2n-1}(\mathrm{T},G)$ *este o bijecție pentru orice* $n\geq 1$.

Orice șir de mulțimi orientate similar cu un punct este și un șir singular de mulțimi orientate.

Teorema 1. *Fie* $\mathrm{T} = \{E_n, h_n: n \in N\}$ *un șir singular de mulțimi orientate. Atunci:*

1. $v(\mathrm{T})$ *este număr par sau* $v(\mathrm{T}) =\infty$.
2. $H_{2n-1}(\mathrm{T},G)= 0$ *pentru orice* $n\geq 1$.
3. $\partial_{2n} (S_{2n}(\mathrm{T},G)) = S_{2n-1}(\mathrm{T},G)$ *pentru orice* $n\geq 1$.
4. $H_0(\mathrm{T},G) = S(E_0, G)$ *și* $H_{2n}(\mathrm{T},G) = Z_{2n}(\mathrm{T},G)$ *pentru orice* $n \geq 1$.

5. *Dacă complexul de omologii este exact, atunci $H_n(\mathrm{T},G)= 0$ pentru orice $n\geq 1$.*

Demonstrație. Observăm că $Z(E_0, G) = S(E_0, G)$. Fixăm $n \geq 1$. Din faptul că mulțimea $h_n(E_{2n}) = \{h_{2n}(x): x\in E_{2n}\}$ generează algebric modulul $F(E_{2n-1})$ rezultă că $E_{2n-1} = \cup\{\Gamma_{2n}(x): x\in E_{2n}\}$ și $\partial_{2n}(S_{2n}(\mathrm{T},G)) = S_{2n-1}(\mathrm{T},G)$. Dacă E_{2n} este mulțime vidă, atunci și E_{2n-1} este mulțime vidă. Deci $v(\mathrm{T})$ p este număr par sau $v(\mathrm{T}) =\infty$, $B_{2n}(\mathrm{T},G)) = 0$, $Z_{2n-1}(\mathrm{T},G) = B_{2n-1}(\mathrm{T},G) = S_{2n-1}(\mathrm{T},G),B_{2n}(\mathrm{T},G) = 0$, iar $Z_{2n}(\mathrm{T},G) \subset S_{2n}(\mathrm{T},G)$. Dacă aplicația $\partial_{2n} : S_{2n}(\mathrm{T},G)) \rightarrow S_{2n-1}(\mathrm{T},G)$ este o biecție, atunci $Z_{2n}(\mathrm{T},G) = 0$. Afirmațiile 1-4 sunt demonstrate. Afirmația 5 este o consecință a afirmației 2.

Următoarea afirmație este evidentă și a fost demonstrată în ([11], Teorema V.4.8).

Teorema 2. *Fie* $\mathrm{T} = \{E_n, h_n: n\in N\}$ *un șir de mulțimi orientate similar cu un punct. Atunci* $H_0(\mathrm{T},G) = C(E_0, G)$, *iar* $H_n(\mathrm{T},G)= 0$ *pentru orice* $n\geq 1$.

Admitem că este dată o clasă de obiecte Ω, numite spații, cu proprietățile:

K1. Pentru orice obiect $A\in\Omega$ sunt determinate subobiectele, subobiecte admisibile, subobiecte deschise și complementările lor.

K2. Pentru orice obiecte $A, B\in\Omega$ sunt determinate morfismele și scufundările $A \rightarrow B$.

K3. Pentru orice obiect $A\in \Omega$, inelul dat R și orice R-modul G în careva mod se construiesc șirul de omologii $H(A,G) = \{H_n(A,,G), \partial_n: n\in N\}$ și șirul de coomologii $H^*(A,G) = \{H^n(A,G),\delta_n: n\in N\}$.

Eilenberg și Steenrod (vezi [11]) au propus următoarele axiome ale teoriilor de omologii.

Axioma 1. *Axioma comutativității.*

Orice morfism $A \rightarrow B$ și orice omomorfism $G_1\rightarrow G_2$ generează diagrame comutative

$H_{n+1}(A,G_1) \rightarrow H_{n+1}(B,G_2)$

↓ ↓

$H_n(A,G_1) \rightarrow H_n(B,G_2)$

pentru orice n.

Axioma 2. *Axioma exactității.*

Această axiomă presupune exactitatea șirului de omologii.

Axioma 3. *Axioma omotopiei.*

Pentru a formula această axiomă este necesar de definit noțiunea de ”omotopie” pentru obiectele (spațiile) din Ω. Apoi se definesc spații omotopic echivalente. Axioma omotopiei presupune că la obiectele ”omotopic” echivalente grupurile de omologii coincid.

În legătură cu această axiomă este bine venită noțiunea de ”retract”, care este un morfism special al obiectului pe un subobiect.

Axioma 4. *Axioma exciziei.*

Pentru a formula această axiomă este necesar de definit pentru perechea (X, Y), unde Y este subspațiu admisibil al spațiului X, grupurile de omologii $H_n(X,Y)$. Dacă U este o mulțime deschisă în X și $U \subset Y$, iar perechea $(X \setminus U, Y \setminus U)$ este admisibilă, atunci incluziunea $(X \setminus U, Y \setminus U) \to (X,Y)$ generează scufundări isomorfe $H_n(X \setminus U, Y \setminus U) \to H_n(X,Y)$.

Axioma 5. *Axioma dimensiunii.*

Această axiomă presupune: dacă obiectul A este format dintr-un singur "element", atunci grupurile H_0 și G sunt isomorfe, iar $H_n = \{0\}$ pentru $n \geq 1$.

Din teoria generală a omologiilor [11, 17, 20] se obține:

1. Dacă șirul de omologii $H(\mathrm{T},G) = \{ H_n(\mathrm{T},G), \partial_n: n \in N\}$ este exact, atunci și șirul de coomologii $H^*(\mathrm{T},G) = \{H^n(\mathrm{T},G), \delta_n: n \in N\}\}$ este exact.
2. Dacă șirul de omologii $H(\mathrm{T},G) = \{H_n(\mathrm{T},G), \partial_n: n \in N\}$ este exact și direct, atunci și șirul de coomologii $H^*(\mathrm{T},G) = \{H^n(\mathrm{T},G), \delta_n: n \in N\}\}$ este exact și direct.

2.10. Referitor la omologii poliedrale. Se numește complex poliedral o familie γ de poliedre simple cu proprietățile: dacă $P \in \gamma$ și H este o fațetă a poliedrului P, atunci $H \in \gamma$; dacă $P, Q \in \gamma$, atunci P și Q sau nu se intersectează, sau ele au o fațetă comună de o anumită dimensiune.

Fixăm un complex poliedral γ. Notăm cu E_n totalitatea poliedrelor de dimensiunea n din γ. Pentru a construi șirul omological de mulțimi $\mathrm{T} = \{E_n, h_n: n \in N\}$ trebuie să determinăm și aplicațiile h_n. Cu acest scop, este necesar să orientăm poliedrele din γ.

Vom spune că pe poliedrul n-dimensional P este dată o orientare coerentă, dacă fiecărei fațete H i se pune in corespondență un număr $o(H) \in \{-1,1\}$ astfel încât pentru orice $m \leq n$ și orice fațetă m-dimensională H vom avea $\Sigma\{ o(F)$: *F este o față m-2-dimensional pentru H*$\} = 0$.

Admitem că pentru fiecare poliedru $P \in \gamma$ este fixată o orientare coerentă. Atunci notăm $h_n(P) = \Sigma\{ o(F)F$: *F este o fațetă n-1-dimensional pentru P*$\}$ pentru orice poliedru n-dimensional $P \in \gamma$. În aceste condiții șirul de mulțimi orientate $\mathrm{T} = \{E_n, h_n: n \in N\}$ este construit. Apoi se construiesc și se cercetează grupurile sau modulele de omologii și coomologii. De asemenea se demonstrează că aceste obiecte nu depind de orientarea coerentă fixată.

2.11. Exemplu. Simplexul n-dimensional este un tetraedru n-dimensional. El este determinat de $n+1$ vârfuri ale lui. Din această simplexul n-dimensional abstract este o mulțime din $n+1$ elemente diferite. Simplexul abstract cu vârfurile $a_0, a_1, ..., a_n$ se notează $[a_0, a_1, ..., a_n]$. Dacă σ: $\{0, 1, 2, ..., n\} \to \{0, 1, 2, ..., n\}$ este o permutare și $sgn\ \sigma = 1$, atunci $[a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)}] = [a_0, a_1, ..., a_n]$.

Pe fiecare simplex $[a_0, a_1, ..., a_n]$ există o orientare admisibilă. Considerăm că ordinea elementelor $a_0, a_1, ..., a_n$ este fixată. O față n-1-dimensională are forma = $[a_0, a_1, ..., a_{i-1},$

$a_{i+1},...,a_n]$ și orientarea $o([a_0, a_1, ...,a_{i-1}, a_{i+1},...,a_n]) = (-1)^i$. Fără obstacole se determină că această orientare este coerentă. Vom considera că pe fiecare simplex este fixată o orientare construită în modul indicat. Nu se cere ca orientările la diferite simplexe să fie acordate.

Un complex simplicial abstract este o pereche ordonată de mulțimi $K = (V, F)$, unde V este o mulțime nevidă de elemente numite vârfurile complexului, iar F este o familie de submulțimi finite a mulțimii V, numite simplexe, cu proprietățile: dacă $v \in K$, atunci $\{v\} \in F$; dacă $f \in F$ și g este submulțime nevidă a mulțimii F, atunci $g \in F$; dacă $f \in F$ conține $k+1$ elemente din V, atunci k se numește dimensiunea simplexului f.

Fixăm un complex simplicial abstract $K = (V, F)$. Vom considera că pe mulțimea V este fixată o ordine liniară sau o bine ordonare. Notăm cu E_n totalitatea simplexelor n-dimensionale din K. Atunci $E_0 =\{\{v\}: v \in V\}$. Dacă $f \in E_n$, atunci $f = [a_0, a_1, ...,a_n]$ și ordinea elementelor $a_0, a_1, ...,a_n$ coincide cu ordinea din V. Conform acestei ordonări orientăm toate simplexele din K. Fie $f = [a_0, a_1, ...,a_n]$și $f_i = [a_0, a_1, ...,a_{i-1}, a_{i+1},...,a_n]$. Atunci notăm $h_n(f) = \Sigma\{(-1)^i f_i: i \leq n\}$. În aceste condiții șirul de mulțimi orientate $\mathrm{T}(K) = \{E_n, h_n: n \in N\}$ este construit. În rezultat se obține complexul de lanțuri $S(K,G)= \{S_n(K,G), \partial_n: n \in N\}$ și complexul de colanțuri G-dual $S^*(K,G)= \{S^n(K,G), \delta_n: n \in N\}$ al șirului de mulțimi orientate $\mathrm{T}(K)= \{E_n, h_n: n \in N\}$. Complexul de lanțuri $S(K,G)$ și complexul de colanțuri $S^*(K,G)$ nu depind de ordonarea și orientările simplexelor. Deci pentru orice complex simplicial abstract K se determină șirul de omologii $H(K,G) = \{H_n(K,G), \partial_n: n \in N\}$ și șirul de coomologii $H^*(K,) = \{H^n(K,G), \delta_n: n \in N\}$. Aceste șiruri sunt exacte [5, 10,11, 17, 19, 20, 9].

2.12. Exemplu. Complexele cubice abstracte permit construirea omologiilor și coomologiilor cubice. Este suficient să construim orientări coerente pe cubul abstract n-dimensional I^n. Vom efectua aceasta inductiv. Cubul $I^0 = \{0\}$ și se va considera orientat pozitiv. Cubul $I^1 = \{0, 1\}$ și are o pereche de fețe $F^1{}_1 = \{I^1{}_{10} = \{0\}, I^1{}_{11} = \{1\}\}$. Admitem că pentru cubul n-dimensional I^n coerent sunt definite n perechi de fețe n-1-dimensionale $\{F^n{}_i = \{I^n{}_{i0}, I^n{}_{i1}\} : 1 \leq i \leq n \}$. Notăm $I^{n+1} = I^n \times\{0, 1\}$, $F^{n+1}{}_i = \{I^{n+1}{}_{i0} = I^n{}_{i0}\times\{0, 1\}, I^{n+1}{}_{i1} = I^n{}_{i1}\times\{0, 1\}\}$ pentru orice $i \leq n$ și $F^{n+1}{}_{n+1} = \{I^{n+1}{}_{(n+1)0} = I^n\times\{0\}, I^{n+1}{}_{(n+1)1} = I^n\times\{1\}\}$. Considerăm că $o(I^{n+1}{}_{ij}) = (-1)^{i+j}$.

2.13.Referitor la morfismele șirurilor de mulțimi orientate.

Definiția 1. *Fie* $\mathrm{T}_1 = \{E_{(1,n)}, h_{(1,n)}: n \in N\}$și $\mathrm{T}_2 = \{E_{(2,n)}, h_{(2,n)}: n \in N\}$ *două șiruri de mulțimi orientate. Șirul de aplicații* $\Psi = \{ \psi_n : E_{(1,n)}\rightarrow E_{(2,n)} : n \in N\}$ *se numește morfism al șirului de mulțimi orientate* T_1 *în șirul de mulțimi orientate* T_2 *și notăm* Ψ: $\mathrm{T}_{1)}\rightarrow \mathrm{T}_2$, *dacă* $\bar{\psi}_{n-1} \bullet h_{(1,n)} = h_{(2,n)} \bullet \psi_n$ *pentru orice* $n \geq 1$, *unde* $\bar{\psi}_{n-1}: F(E_{(1,n-1)}) \rightarrow F(E_{(2,n-1)})$ *este omomorfismul generat de aplicația* ψ_{n-1}.

Teorema 1. *Fie* $\mathrm{T}_1 = \{E_{(1,n)}, h_{(1,n)}: n \in N\}$ și $\mathrm{T}_2 = \{E_{(2,n)}, h_{(2,n)}: n \in N\}$ *două șiruri de mulțimi orientate, iar* $\psi = \{ \psi_n : E_{(1,n)}\rightarrow E_{(2,n)} : n \in N\}$ *un morfism al șirului* T_1 *în șirul* T_2. *Atunci* *morfismul* Ψ *induce un șir de omomorfisme* $\mu = \{\mu_n : C_n(\mathrm{T}_1,G) \to C_n(\mathrm{T}_2,G) : n \in N\}$ *cu proprietățile:*

1. *Pentru orice* $c = a_1x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m \in S_n(T_1,G)$ *vom avea* $\mu_n(c) = a_1\psi_n(x_1) + a_2\psi_n(x_2) + ... + a_m\psi_n(x_m)$.
2. $\partial_{(1,n)} \bullet \mu_{nn-1} = \mu_n \bullet \partial_{(2,n)}$ *pentru orice* $n \geq 1$.
3. $\mu_n(Z_n(\mathrm{T}_1,G)) \subset Z_n(\mathrm{T}_2,G)$ *și* $\mu_n(B_n(\mathrm{T}_1,G)) \subset B_n(\mathrm{T}_2,G)$ *pentru orice* $n \geq 1$.
4. *Dacă* $\psi_n(E_{(1,n)}) = E_{(2,n)}$ *pentru orice* $n \geq 1$, *atunci și* $\mu_n(B_n(\mathrm{T}_1,G)) = B_n(\mathrm{T}_2,G)$ *pentru orice* $n \geq 1$.

Demonstrare. Fie $n \geq 1$ și mulțimea $E_{(1,n)}$ nu este vidă. Pentru $c = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_m x_m \in S_n(T_1,G)$ notăm $\mu_n(c) = a_1\psi_n(x_1) + a_2\psi_n(x_2) + ... + a_m\psi_n(x_m)$. Obținem un omomorfism μ_n: $S_n(\mathrm{T}_1,G) \to S_n(\mathrm{T}_2,G)$. Vom avea $\mu_n(S_n(\mathrm{T}_1,G)) = S_n(\mathrm{T}_2,G)$ dacă $\psi_n(E_{(1,n)}) = E_{(2,n)}$. In particular, λ_n este un omomorfism injectiv, o scufundare. Observăm că omomorfismul $\mu_n = \overline{\psi}_n$ este indus de aplicația ψ_n. Omomorfismul μ_n este surjectiv dacă și numai dacă aplicația ψ_n este surjectivă.

Considerăm complexele de lanțuri $S(\mathrm{T}_1,G) = \{S_n(\mathrm{T}_1,G), \partial_{(1,n)}: n \in N\}$ *și* $S(\mathrm{T}_2,G) = \{S_n(\mathrm{T}_2,G), \partial_{(2,n)}: n \in N\}$. Obținem diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_n(\mathrm{T}_1,G) & \xrightarrow{\ \mu_n\ } & S_n(\mathrm{T}_2,G) \\ \partial_{(1,n)}\downarrow & & \downarrow\partial_{(2,n)} \\ S_{n-1}(\mathrm{T}_1,G) & \xrightarrow{\ \mu_{n-1}\ } & S_{n-1}(\mathrm{T}_2,G). \end{array}$$

Din egalitatea $\overline{\psi}_{n-1} \bullet h_{(1,n)} = h_{(2,n)} \bullet \psi_n$ obținem că diagrama este comutativă: $\partial_{(2,n)} \bullet \mu_n = \mu_{n-1} \bullet \partial_{(1,n)}$. Deci $\mu_n(Z_n(\mathrm{T}_1,G)) \subset Z_n(\mathrm{T}_2,G)$ și $\mu_{n-1}(B_{n-1}(\mathrm{T}_1,G)) \subset B_{n-1}(\mathrm{T}_2,G)$. Prin urmare μ_n: $Z_n(\mathrm{T}_1,G) \to Z_n(\mathrm{T}_2,G)$ este un omomorfism surjectiv. Din comutativitatea diagramei și din faptul că μ_n și μ_{n-1} vor fi omomorfisme surjective vom avea $\mu_{n-1}(B_{n-1}(\mathrm{T}_1,G)) = B_{n-1}(\mathrm{T}_2,G)$.

Notă. Șirul de omomorfisme $\mu = \{\mu_n : S_n(\mathrm{T}_1,G) \to S_n(\mathrm{T}_2,G): n \in N\}$ cu proprietatea $\partial_{(1,n)} \bullet \mu_{nn-1} = \mu_n \bullet \partial_{(2,n)}$ pentru orice $n \geq 1$ se numește morfism al unui complex de lanțuri în altul.

2.14. Referitor la omotopia morfismelor șirurilor de mulțimi orientate.

Noțiunea de omotopie a complexelor de lanțuri a fost definită de S. Eilenberg și N. Steenrod ([11], Definiția V.4.1): *Fie* $\mathrm{T}_1 = \{S_{(1,n)}, \partial_{(1,n)}: n \in N\}$ și $\mathrm{T}_2 = \{S_{(2,n)}, \partial_{(2,n)} : n \in N\}$ *două complexe de lanțuri. Morfismele* ψ, $\varphi = \{\psi_n, \varphi_n : S_{(1,n)} \to S_{(2,n)} : n \in N\}$ *ale complexului* T_1 *în complexul* T_2 *se numesc omotopice, dacă există un șir de omomorfisme* $D = \{D_n: S_{(1,n)} \to S_{(2,n+1)} : n \in N\}$ *astfel încât* $\partial_{(2,n+1)} \bullet D_n + D_{n-1} \bullet \partial_{(1,n)} = \varphi_n - \psi_n$ *pentru orice* $n \geq 1$ *și se spune că D este o omotopie de transfer* ψ *în* φ *(se notează* $D: \psi \approx \varphi$*).*

Se demonstrează că relația $\psi \approx \varphi$ este o relație binară de echivalență ([10], Lema V.4.2). Dacă $\psi \approx \varphi$, atunci morfismele ψ, φ induc același morfism al complexelor de omologii ([11], Teorema V.4.4).

Aceste noțiuni în mod identic se extind pentru șiruri de mulțimi orientate.

Definiția 1. *Fie* $T_1 = \{E_{(1,n)}, h_{(1,n)}: n \in N\}$ și $T_2 = \{E_{(2,n)}, h_{(2,n)}: n \in N\}$ *două șiruri de mulțimi orientate. Morfismele* ψ, $\varphi = \{\psi_n, \varphi_n : E_{(1,n)} \to E_{(2,n)} : n \in N\}$ *ale șirului* T_1 *în șirul* T_2 *se numesc omotopice, dacă există un șir de aplicații* $D = \{D_n: E_{(1,n)} \to F(E_{(2,n+1)}) : n \in N\}$ *astfel încât* $\partial_{(2,n+1)} \bullet D_n + \overline{D}_{n-1} \bullet h_{(1,n)} = \varphi_n - \psi_n$ *pentru orice* $n \geq 1$ *și se spune că D este o omotopie de transfer* ψ *în* φ *(se notează* $D: \psi \approx \varphi$*).*

Următoarea teoremă permite să extindem proprietățile omotopiilor complexelor de lanțuri pentru șiruri de mulțimi orientate.

Teorema 1. *Fie* $T_1 = \{E_{(1,n)}, h_{(1,n)}: n \in N\}$ și $T_2 = \{E_{(2,n)}, h_{(2,n)}: n \in N\}$ *două șiruri de mulțimi orientate, iar* ψ, φ *a complexelor:*$T_1 \to T_2$ *două morfisme ale șirului* T_1 *în șirul* T_2*. Dacă* $\overline{\psi}$, $\overline{\varphi} = \{\overline{\psi}_n, \overline{\varphi}_n : S_n(T_1,G) \to S_n(T_2,G): n \in N\}$ *sunt șirurile de omomorfisme induse de morfismele* ψ, φ*, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. ψ, φ *sunt omotopic echivalente.*

2 $\overline{\psi}$, $\overline{\varphi}$ *sunt omotopic echivalente pentru orice grup de coeficienți G.*

Demonstrare. Fie $D: \psi \approx \varphi$. Examinăm șirul de omomorfisme $\overline{D} = \{\overline{D}_n: S(E_{(1,n)}, G) \to S(E_{(2,n+1)}, G) : n \in N\}$, unde $\overline{D}_n(ax) = aD_n(x)$ pentru orice $n \geq 0$, $x \in E_{(1,n)}$ *și* $a \in G$. Din $D: \psi \approx \varphi$ obținem $\overline{D}: \overline{\psi} \approx \overline{\varphi}$.

Dacă $G = Z$, atunci $E_{(1,n)}$ $C(E_{(1,n)}, G) = F(E_{(1,n)})$ și $D = \overline{D}|E_{(1,n)}$. Prin urmare și din $\overline{D}: \overline{\psi} \approx \overline{\varphi}$ obținem $D: \psi \approx \varphi$. Teorema este demonstrată.

Corolarul 1. *Relația de omotopie a morfismelor șirurilor de mulțimi orientate este o relație de echivalență.*

Corolarul 2. *Morfismele omotopice ale unui șir de mulțimi orientate pe alt șir de mulțimi orientate induc același morfism al complexelor de omologii și același morfism al complexelor de coomologii.*

Notă. Se poate spune că Teoria Omologiilor începe de la formula lui Euler, sau caracteristica Euler a poliedrelor. In anul 1857 Riemann a introdus noțiunea de varietate și unele caracteristici omologice ca noțiunile de gen și *n*-conexiune. Apoi în 1871 Betti [2] demonstrează independența ”numerelor omologicale” de modul cum a fost aleasă baza. În faimoasa sa lucrare "*Analysis situs*" Henri Poincaré [18] a introdus pentru prima dată noțiunile de complex de lanțuri simpliciale și de omologie simplicială a varietății triangulabile. Studiul claselor omologice ca grupuri abeliene a fost inițiat de Emmy Noether, Leopold Vietoris și Walther Mayer în perioada 1925-1928 [23, 5, 17]. Cărțile [1, 3, 10, 13, 18, 23] conțin diverse momente din istoria apariției noțiunilor topologice.

Conexiuni cu diverse domenii sunt reflectate în lucrările [1, 4, 6, 10, 13, 16, 22, 24, 25, 26, 27].

Teorii omologice sunt construite în lucrările [4, 5, 11, 12, 18, 20]. Rolul poliedrelor în natură și diverse teorii este oglindit în lucrările [1, 3, 4, 7, 8, 9, 15, 16, 17].

Bibliografie

1. P. Alexandroff, *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, Springer Verlag, Berlin, 1932 (English translation: *Elementary concepts of topology*, Dover Publications, Inc., New York, 1961).
2. E. Betti, Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni, Ann. Mat. Pura Appl. 2/4, 1871, 140-158.
3. D. W. Brisson, *Visual Comprehension in n-Dimensions,* in: D. Brisson (editor), *Hypergraphics: Visualizing Complex Relationships in Art, Science and Technology*, AAAS Selected Symposium **24**, Washington, D.C.: AAAS, 1978, 109–145.
4. S. Cataranciuc, *Topologia algebrică a relațiilor multi-are,* Ed. USM, Chișinău, 2015.
5. H. P. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra,* Princeton University Press, Princeton, 1956.
6. M. CIOBANU, R. MIRON, *O cercetare originală în topologia modernă. Reflecții asupra corelațiilor dintre real și abstract*, Academos. 2015, 1, 68-77.
7. H. S. M. Coxeter, Regular Polytopes (third edition), New York, Dover Publications, 1973.
8. H. S. M. Coxeter, *The Beauty of Geometry: Twelve Essays*, Dover Publications, 1999,
9. P. R. Cromwell,. *Polyhedra*. Cambridge University Press. , 1997.
10. B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern Geometry - Methods and Application*, Springer: Part 1, 1992, Part 2, 199**2,** Part 3,1993.
11. S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton U. Press,Princeton, 1952 (In rusă: Н. С т и н р о д, С. Э й л е н б е р г, Основания алгебраической топологии, М.: ГИФМЛ, 1958).
12. J. G. Hocking, G. S. Young, *Topology,* Addison-Weiley Publ. Co., 1961.
13. A. T. Fomenco, *Visual and hidden symmetry in geometrty,* Computers Math. Applic. 17, no. 1-3, 1989, 301-320.
14. J. E. Goodman and J. O'Rourke(Editors), *Handbook of discrete and computational geometry*, Chapman & Hall, 2004
15. B. Grünbaum, *Polyhedra with hollow faces*, Proc of NATO-ASI Conference on Polytopes (Toronto 1993), ed T. Bisztriczky et al., Kluwer Academic pp. 43–70.
16. R. B. King (editor), *Chemical applications of topology and graph theory,* Elsevier, 1983.
17. P. McMullen and S. Schulte, *Abstract Regular Polytopes*, Cambridge University Press, 2002.

18. R. Miron, I. Pop, *Topologie Algebrică: Omologie.Omotopie. Spații de acoperire*, București, 1974.
19. Henri Poincaré, *Analysis situs*, J. Ecole polytech. (2) **1**, 1895, 1–121.
20. L.S. Pontryagin. Foundations of Combinatorial Topology. Graylock Press. 1952.
21. E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer, 1982.
22. M. Tegmark, *The Mathematical Universe,* Foundations of Physics **38** (2), 2008, 101–150(arxiv:0704.0646. Bibcode:2008FoPh.38.101T. doi:10.1007/s10701-007-9186-9)
23. C. A. Weibel, *History of Homological Algebra*, chapter 28 in the book: *History of Topology* by I.M. James, Elsevier, 1999.
24. Э. Зиман, О. Бьюнеман,*Толерантные пространства и мозг,* Сборник: *На пути к теоретической биологии*, М.: Мир, 1970
25. А. А. Хусаинов, В. Е. Лопаткин, И.А. Трещев, *Исследование математической модели параллельных вычислительных процессов методами алгебраической топологии,* Сибирский журнал индустриальной математики 11:1, 2008, 141-151.
26. А. А. Хусаинов, В. В. Ткаченко,*О группах гомологий асинхронных систем переходов, Дальневосточный* математический журнал. 2005. Т.6. №1-2. С.23-38.
27. А. А. Хусаинов, *Кубические гомологии и размерность Лича свободных частично коммутативных моноидов,* Математический сборник, 2008, 199:12, 129–154.