ASUPRA COMPACITĂŢII UNOR OPERATORI INTEGRALI SINGULARI

Vasile NEAGU, dr. hab., prof. univ., USM
vasileneagu45@gmail.com

Abstract. The operators such as $aP - PaI$, $aQ - QaI$ and integral operators with weak singularities are studied in the work. It is proven that the operators $aP - PaI$ and $aQ - QaI$ are totally continuous (or compact) in spaces with weights in one and only one case, when the function $a(t)$ is continuous on the contour of integration. As a corollary, it is shown that the factor-algebra generated by singular operators with piecewise continuous coefficients is not comutative and the symbol on that algebra is a matrix-function.

Rezumat. În această lucrare sunt studiaţi operatorii de forma $aP - PaI$ şi $aQ - QaI$ precum şi operatorii integrali cu nuclee cu singularităţi slabe. Se demonstrează că operatorii $aP - PaI$ şi $aQ - QaI$ sunt compacţi în spaţii cu ponderi, dacă şi numai dacă funcţia $a(t)$ este continuă pe conturul de integrare. În consecinţă, algebra generată de operatorii integrali singulari cu coeficienţi continui pe porţiuni nu ecte comutativă şi simbolul lor reprezintă o matrice de funcţii.

Fie Γ un contur compus format din n curbe închise $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ de tip Liapunov pe porţiuni, care au un singur punct comun t_0. Notăm prin F_Γ^+ domeniul mărginit de conturul Γ. Vom presupun că domeniile $F_j^+ (= F_{\Gamma_j}^+)$ nu au puncte comune şi la mişcarea punctului t_0 pe coturul Γ în sens pozitiv domeniul F_{j+1}^+ urmează după domeniul F_j^+ $(j = 1,2,...,n-1)$. Conturul Γ este orientat astfel încât parcurgând curba Γ_j, domeniul F_j^+ rămâne la stânga.

În figura 1 este reprezentat un astfel de contur Γ pentru $n = 4$.

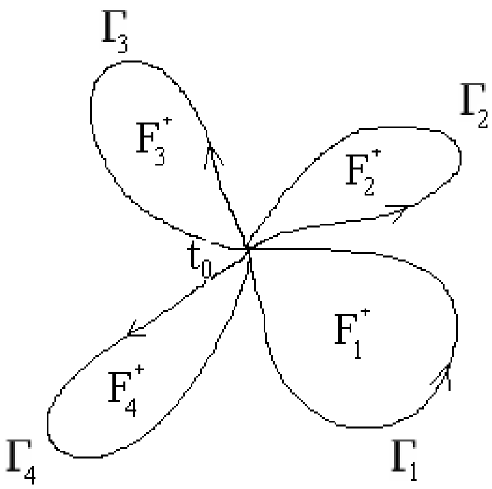

Fig. 1

Notăm prin $CP(\Gamma)$ mulţimea tuturor funcţiilor $a(t)$ continue în orice punct $t \in \Gamma$, cu excepţia punctului t_0, în care există limitele finite $a_j(t_0 + 0)$ şi $a_j(t_0 - 0)$ $(j = 1,2,...,n)$ atunci când t tinde către t_0 pe curba Γ_j dinspre şi, respectiv, spre puncul t_0. Prin $CP_+(\Gamma)$

notăm mulţimea funcţiilor $f(t)$ din $CP(\Gamma)$, pentru care $f_j(t_0+0)=f_j(t_0-0)\,(j=1,2,...n)$, iar prin $CP_{-}(\Gamma)$ mulţimea funcţiilor $f(t)$ din $CP(\Gamma)$, pentru care $f_j(t_0+0)=f_{j+1}(t_0-0)\,(j=1,2,...n-1)$ şi $f_n(t_0+0)=f_1(t_0-0)$. Intersecţia $C_+P(\Gamma)\cap C\_P(\Gamma)$ coincide cu mulţimea $C(\Gamma)$ de funcţii continue pe Γ.

Fie

$$\rho(t)=\prod_{k=0}^{n}|t-t_k|^{\beta_k},$$

unde $t_0,t_1,t_2,...,t_m$ sunt puncte diferite pe Γ şi β_k sunt numere reale, care verifică condiţiile $-1<\beta_k<p-1,\ k=0,1,2,...,m.$ În monografia [1] s-a arătat că operatorii $aP-PaI$ şi $aQ-QaI$ sunt compacţi în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$ pentru orice funcţie continuă pe Γ. Amintim că operatorii (proectorii) P şi Q integrali singulari F.Riesz sunt definiţi de egalităţile

$$P=\frac{1}{2}(I+S),\quad Q=\frac{1}{2}(I-S), \tag{1}$$

unde S este operatorul integral cu nucleul Cauchy,

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,\ \ t\in\Gamma. \tag{2}$$

În studiul ecuaţiilor integrale singulare cu nucleu Cauchy, în special la determinarea regularizatorilor acestor ecuații, deseori apare necesitatea de a considera operatori de forma

$$(T_a\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{a(\tau)-a(t)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau\ (t\in\Gamma), \tag{3}$$

unde $a(t)$ este o funcţie cunoscută definită pe Γ. În acest context este important de cunoscut în ce condiții operatorul T_a este compact în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$.

Teorema 1. *Fie* Γ *un contur compus şi* $a\in CP(\Gamma)$. *Operatorul* $T_a=aS-SaI$ *este compact în spaţiul* $L_p(\Gamma,\rho)$, *dacă şi numai dacă* $a\in C(\Gamma)$.

Demonstraţie. Suficienţa. Dacă funcţia a este un polinom sau o funcţie raţională, atunci teorema este evidentă. În acest caz operatotul T_a este de rang finit.

Fie a orice funcţie continuă pe Γ. Atunci există un şir $\{a_n(t)\}$ de polinoame (dacă Γ este deschis) sau de funcţii raţionale (dacă Γ este închis) cu polurile în afara conturului Γ, care converge uniform către funcţia $a: \max_{t\in\Gamma}|a_n(t)-a(t)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Aşa cum

$$\left\|T_a-T_{a_n}\right\|_{L_p(\Gamma,\rho)}\leq\ 2\max_{t\in\Gamma}|a(t)-a_n(t)|\,\|S\|_{L_p(\Gamma,\rho)},$$

rezultă că operatorul T_a este compact în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$.

Demonstrația necesitatății teoremei se va baza pe următoarele două exemple. Anume, vom arăta mai întîi că operatorul $T_h = hS - ShI$ nu este compact în spatial $L_p(\Gamma,\rho)$ pentru funcțiile $h \in CP_+(\Gamma)$ și $h \in CP_-(\Gamma)$.

Exemplul 1. Fie conturul Γ reprezentat în figura 2

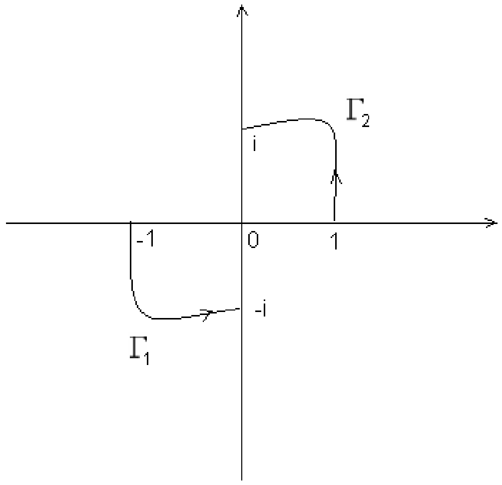

Fig. 2

În calitate de funcţie $h(t)$ considerăm funcţia caracteristică a curbei Γ_2 :

$$h(t) = \begin{cases} 0, \text{dacã t} \in \Gamma_1, \\ 1, \text{dacã t} \in \Gamma_2. \end{cases} \tag{4}$$

Evident funcţia $h(t)$ aparţine mulţimii $CP_+(\Gamma)$. Admitem că operatorul $T_h = hS - ShI$ este compact. Fie $\chi(t)$ funcţia caracteristică a segmentului $[-1,0]$ şi $A = \chi(t)T_h$. Vom demonstra că operatorul A nu este compact. Astfel, vom obţine o contradicţie.

În spaţiul $L_2(\Gamma)$ considerăm şirul normat de funcţii, definite de egalitatea

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, \text{dacã t} \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, \text{dacã t} \in \Gamma \setminus \left[0, \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Vom demonstra că din şirul $\psi_n(t) = A\varphi_n$ nu se poate extrage un subşir convergent. Pentru aceasta evaluăm normele $\|\psi_n\|$ în spaţiul $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < 2)$. Avem

$$\|\psi_n\|_{L_p}^p = \int_\Gamma |(A\varphi_n)(t)|^p |dt| = \int_{-1}^0 \left| \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{h(\tau)}{\tau - t}\varphi_n(\tau)d\tau - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{h(t)}{\tau - t}\varphi_n(\tau)d\tau \right|^p |dt| \le$$

$$\le \frac{2^p}{\pi^p}\left(\int_{-1}^0 \left| \int_\Gamma \frac{h(\tau)}{\tau - t}\varphi_n(\tau)d\tau \right|^p |dt| + \int_{-1}^0 \left| h(t)\int_\Gamma \frac{\varphi_n(\tau)}{\tau - t}d\tau \right|^p |dt| \right) = \frac{2^p}{\pi^p}\int_{-1}^0 \left| \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{n}}{\tau - t}d\tau \right|^p |dt| \le$$

$$\le n^{\frac{p-2}{2}} \int_{-\infty}^0 \left| \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| \right|^p dt. \tag{5}$$

Aşadar, pentru $1<p<2$ şirul de norme $\{\|\psi_n\|\}$ tinde la zero în spatiul $L_p(\Gamma)$. De aici rezultă, că dacă în spaţiul $L_2(\Gamma)$ şirul $\psi_n(t)=A\varphi_n$ ar conţine un subşir convergent $\psi_{n_k}(t)$, atunci el ar converge la zero: $\psi_{n_k}(t)\to 0$. Aceasta însă este cu neputinţă, deoarece

$$\|\psi_n\|_{L_2}^2=\int_{-1}^{0}\left|\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{h(\tau)}{\tau-t}\varphi_n(\tau)d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{h(t)}{\tau-t}\varphi_n(\tau)d\tau\right|^2|dt|=\int_{-1}^{0}\left|\frac{1}{\pi i}\int_{0}^{1/n}\frac{h(t)}{\tau-t}\sqrt{n}d\tau\right|^2|dt|=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{0}\left|\ln\left|\frac{1-t}{t}\right|\right|^2dt. \tag{6}$$

Exemplul 2. Fie Γ acelaşi contur de la exemplul 1. Prin $h(t)$ notăm o funcţie continuă în orice punct $t\in\Gamma\setminus\{0\}$, care mai verifică următoarele condiţii: $h(t)=0$ pentru $t\in[i,0]\subset\Gamma_2$, $h(t)=1$ pentru $t\in[0,1]\subset\Gamma$, există $h_1(0+0)=0$ şi $h_1(0-0)=1$.

Aşa cum $h_1(0-0)=h_2(0+0)=1$ şi $h_1(0+0)=h_2(0-0)=0$, rezultă că $h\in CP_-(\Gamma)$.

În spaţiul $L_p(\Gamma)$ considerăm mulţimea funcţiilor $\{\varphi_n(t)\}$ definite în felul următor:

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}0, \ pentru \ t\in\Gamma\setminus\left[0,{}^1\!/_n\right]\\ n^{1/p}, \ pentru \ t\in\left[0,{}^1\!/_n\right]\end{cases}.$$

Este evident că $\|\varphi_n\|_{L_p}=1$. Fie $\chi(t)$ funcţia caracteristică a segmentului $[i,0]\subset\Gamma_2$ şi $A=\chi(t)T_a$. Vom demonstra că operatorul A nu este compact în $L_p(\Gamma)$. Pentru aceasta ne vom folosi de criteriul lui F.Riesz de compacitate în spaţiul L_p. Avem

$$\Phi_n(t)=(A\varphi_n)(t)=\frac{\chi(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{h(\tau)-h(t)}{\tau-t}\varphi_n(\tau)\,d\tau=\frac{\chi(t)}{\pi i}n^{1/p}\left(\int_0^{1/n}\frac{h(\tau)}{\tau-t}\,d\tau-h(t)\int_0^{1/n}\frac{d\tau}{\tau-t}\right)=$$

$$=\frac{\chi(t)}{\pi i}n^{1/p}\int_0^{1/n}\frac{1}{\tau-t}\,d\tau=\frac{n^{1/p}}{\pi i}\chi(t)Ln\frac{1-nt}{nt}.$$

Pentru orice $\sigma>0$ $(0<\sigma<1)$ obținem,

$$\int_{\Gamma}|\Phi_n(t+i\sigma)-\Phi_n(t)|^p|dt|=\int_{[i,0]}|\Phi_n(t+i\sigma)-\Phi_n(t)|^p|dt|=$$

$$=\int_0^1|\Phi_n(it+i\sigma)-\Phi_n(it)|^p dt\geq\int_{1-\sigma/2}^{1}|\Phi_n(it+i\sigma)-\Phi_n(it)|^p dt=$$

$$=\int_{1-\sigma/2}^{1}|\Phi_n(it)|^p dt\geq\frac{n}{\pi}\int_{1-\sigma/2}^{1}\left|\ln\frac{1+t^2}{t}\right|^p dt. \tag{7}$$

Aşa cum $\frac{1+t^2}{t}\geq 2$ pentru $t\in\left[1-\frac{\sigma}{2},1\right]$, atunci $\ln\frac{1+t^2}{t}\geq\ln 2$ şi din inegalitatea (7) rezultă

$$\int_{\Gamma} |\Phi_n(t+i\sigma)-\Phi_n(t)|^p |dt| \geq \frac{n\sigma}{2\pi}\ln 2. \qquad (8)$$

În inegalitatea (8) punem $\sigma=\frac{2\pi}{n}$, $n>4$, și ea devine

$$\int_{\Gamma} |\Phi_n(t+i\sigma)-\Phi_n(t)|^p |dt| \geq \ln 2. \qquad (9)$$

Aşadar, în baza criteriului M.Riess despre compacitatea mulţimilor de funcţii în L_p, rezultă că mulţimea de funcţii $\{\Phi_n(t)\}$ nu este compactă în $L_p(\Gamma)$, ceea ce înseamnă că operatorul $T_a = aS - SaI$ nu este compact în $L_p(\Gamma)$.

Folosind aceste exemple, vom demonstra necesitatea teoremei 1. Fie $a \in CP(\Gamma)$ şi admitem că operatorul T_a este compact în $L_p(\Gamma)$. Fără a diminua generalitatea vom presupune că conturul Γ este cel de la exemplul 1 şi $a_1(0+0) \neq a_1(0-0)$. Fie $\omega = a_1(0+0) - a_1(0-0)$ şi considerăm funcţia

$$b(t) = \begin{cases} a(t) - \omega h(t), \, pentru \;\; t \in \Gamma_1 \setminus \{0\}, \\ a_1(t_0+0), \;\; pentrut \quad t \in \Gamma_2\,, \end{cases}$$

unde h este funcţia definită de la exemplul 2. Avem

$$b_2(0+0) = b_2(0-0) = a_1(0+0)\,,\; b_1(0+0) = a_1(0+0) - \omega h_1(0+0) = a_1(0+0) \;\; \text{şi}$$

$$b_1(0-0) = a_1(0-0) - \omega h_1(0-0) = a_1(0-0)\,.$$

Aşadar, funcţia $b(t)$ este continuă pe Γ şi, în virtutea celor deja demonstrate, operatorul T_b este compact în $L_p(\Gamma)$. Din egalitatea $\chi_1 T_b \chi_1 = \chi_1 T_a \chi_1 - \omega \chi_1 T_h \chi_1$, unde χ_1 este funcţia caracteristică a curbei Γ_1, şi din faptul că operatorul T_a este compact, rezultă că operatorul $\chi_1 T_h \chi_1$ este compact în $L_p(\Gamma_1)$. Atunci operatorul $H_\lambda = \chi_1 T_h \chi_1 - \lambda I$ este noetherien în $L_p(\Gamma_1)$ pentru orice $\lambda \neq 0$, adică simbolul lui, $H_\lambda(t,\mu)$, trebuie să fie nedegenerat pentru orice $\lambda \neq 0, \mu \in [0,1]$ şi orice $t \in \Gamma_1$. Scriem simbolul acestui operator (a se vedea [1, 2]) în punctul t_0.

$$H_\lambda(t_0,\mu) = \begin{Vmatrix} -\lambda & 2\xi(\mu) \\ -2\xi(\mu) & -\lambda \end{Vmatrix},$$

unde $\xi(\mu) = \sqrt{f(\mu)(1-f(\mu))}$ şi $f(\mu) = \begin{cases} \frac{\sin\theta\mu}{\sin\theta} e^{i\theta(\mu-1)} & ,\text{pentru } p \neq 2 \\ \mu, & \text{pentru } \; p=2 \end{cases}.$

Observăm că

$$\det H_\lambda(t_0,\mu) = \lambda^2 - 4f(\mu)(1-f(\mu))$$

şi $\det H_\lambda(t_0,\mu) = 0$ pentru $\lambda = 2\sqrt{f(\mu)(1-f(\mu))}$. Contrazicerea obţinută demonstrează că operatorul T_a nu este compact în $L_p(\Gamma)$. Teorema este demonstrată.

Afirmațiile teoremei 1 rămîn adevărate şi în spaţiul L_p cu ponderea $\rho(t)$. Demonstraţia se face în mod similar.

Astfel, dacă funcția $a(t)$ aparține mulțimilor $CP(\Gamma), CP_+(\Gamma)$ sau mulțimii $CP_-(\Gamma)$, atunci operatorii $PaI - aP$ și $QaI - aQ$ nu sînt compacți în spatiul $L_p(\Gamma,\rho)$. În cazul funcțiilor $a \in CP_\pm(\Gamma)$ au loc următoarele două teoreme.

Teorema 2. *Fie $a \in CP_+(\Gamma)$, atunci operatorul $PaP - aP$ este compact în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$.*

Demonstrație. Funcia $a(t)$ poate fi reprezentată sub forma $a(t) = b(t)g(t)$, unde $b(t) \in C(\Gamma)$, iar funcția $g(t)$ este constantă pe fiecare curbă $\Gamma_k\ (k = 1,2,...,n)$. Vom arăta că $PgP = g$. Fie $\varphi(t)$ orice funcție care verifică condițiile lui Holder pe fiecare curbă $\Gamma_k\ (k = 1,2,...,n)$. Atunci funcția $\psi(t) = (P\varphi)(t)$ verifică condițiile lui Holder pe orice arc al conturului Γ, care nu conține punctul t_0, ea admite o prelungire analitică în fiecare domeniu $F_k^+\ (k = 1,2,...,n)$, iar în vecinătatea punctului t_0 are o singularitate integrabilă. Aceleași proprietăți le are și funcția $g(t)\psi(t)$. Folosind aceste proprietăți ale funcției $g(t)\psi(t)$, ușor se demonstrează că pentru orice punct $t \in \Gamma$, diferit de t_0, are loc egalitatea

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t}d\tau = g(t)\psi(t).$$

Din această egalitate rezultă că $gP\varphi = PgP\varphi$ și, prin urmare, $PgP = gP$. Așa cum $b(t)$ este continua pe Γ, atunci, în baza teoremei 1, operatorul $bP - PbI$ este compact. De aici și din egalitatea $PgP = gP$ rezultă că operatorul $PaP - aP$ este compact. Teorema este demonstrată.

Teorema 3. *Fie $a \in CP_-(\Gamma)$, atunci operatorul $QaQ - aQ$ este compact în spatial $L_p(\Gamma,\rho)$.*

Demonstrație. În fiecare domeniu $F_k^+\ (k = 1,2,...,n)$ considerăm căte un punct z_k și formăm funcțiile $f_j(t)$, definite prin egalitățile

$$f_j(t) = \alpha_j\left(\frac{t - z_j}{t - z_{j+1}}\right)^{\delta_j}\ (j = 1,2,...,n; z_{n+1} = z_1).$$

Fiecare funcție $f_j(t)$ este analitică în planul complex extins cu tăietura, care unește punctele z_j și z_{j+1} și această tăietură se află în $F_j^+ \cup F_{j+1}^+ \cup \{t_0\}$. Fără a diminua generalitatea putem considera că valorile limită a funcției $a(t)$ în punctul t_0 sînt diferite de zero. Numerele α_j și δ_j le alegem așa, încît valorile limită ale funcției $f_j(t)$, atunci când t tinde către t_0 pe curba Γ_j dinspre şi spre puncul t_0 să fie egale respectiv cu a_{2j-1} și 1. Notăm prin $f(t)$ produsul funcțiilor $f_j(t)$: $f(t) = f_1(t)f_2(t)...f_n(t)$. Funcția $f(t)$ este analitică în domeniul $\overline{\mathbb{C}} \setminus F_1^+ \cup F_2^+ \cup ... \cup F_n^+ \cup \Gamma$. Nemijlocit se arată că $QfQ = fQ$. În baza alegerii funcției $f(t)$, produsul

$g(t) = a(t)f^{-1}(t)$ este o funcție continua pe Γ. Așa cum operatorul $QgI - gQ$ este compact și are loc egalitatea $QfQ = fQ$, obținem că operatorul $QaQ - aQ$ este compact și teorema este demonstrată.

Fie $k(\tau,t)$ o funcţie măsurbilă pe $\Gamma \times \Gamma$ cu singularitate slabă, adică ea admite o evaluare de forma

$$|k(\tau,t)| \le c|\tau - t|^{-\mu},\ c = const,\ 0 < \mu < 1.$$

În aceste condiții, așa cum se cunoaște, operatorul integral, definit de relaţia

$$(T\varphi)(t) = \int_{\Gamma} k(\tau,t)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{10}$$

este compact în spaţiul $L_p(\Gamma)$. Vom demonstra că o afirmaţie similară are loc şi în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$, unde $\rho(t) = \prod_{k=0}^{n} |t - t_k|^{\beta_k}$. Are loc următoarea teoremă.

Teorema 4. *Fie numerele* $p, \beta_0, \beta_1, ..., \beta_m$ *verifică condiţiile:*

$$1 < p < +\infty,\ \ -1 < \beta_k < p - 1,\quad k = 0,1,2,...,m,$$

atunci operatorul integral (10) este compact în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$.

Demonstraţie. Se verifică uşor (a se vedea [1] că operatorul T este compact în $L_p(\Gamma,\rho)$ dacă şi numai dacă operatorul $K = h^{-1}ThI$, unde

$$h(t) = \prod_{k=0}^{n} |t - t_k|^{\alpha_k},\ \alpha_k = \beta_k / p,$$

este compact în spaţiul $L_p(\Gamma)$. Fie

$$k_n(\tau,t) = \begin{cases} k(\tau,t),\ pentru\ \ |\tau - t| \ge 1/n, \\ 0\ \ ,\ \ pentru\ \ |\tau - t| < 1/n. \end{cases}$$

Notăm prin A, A_n şi K_n următorii operatori integrali

$$(A\varphi)(t) = \int_{\Gamma} \left(h^{-1}(t)k(\tau,t)h(\tau) - k(\tau,t)\right)\varphi(\tau)\,d\tau,$$

$$(A_n\varphi)(t) = \int_{\Gamma} \left(h^{-1}(t)k_n(\tau,t)h(\tau) - k_n(\tau,t)\right)\varphi(\tau)\,d\tau,$$

$$(K_n\varphi)(t) = \int_{\Gamma} \left(h^{-1}(t)k_n(\tau,t)h(\tau)\right)\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Aşa cum $h \in L_q(\Gamma), h^{-1} \in L_p(\Gamma)$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ şi funcţia $k_n(\tau,t)$ este mărginită, atunci

$$\int_{\Gamma} |dt| \left(\int_{\Gamma} |h^{-1}(t)k_n(\tau,t)h(\tau)|^q |d\tau| \right)^{p-1} < +\infty,$$

şi prin urmare operatorul K_n este compact în $L_p(\Gamma)$. De aici rezultă continuitatea completă a operatorului A_n în $L_p(\Gamma)$. Vom demonstra că $\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0$. Fie $M_n = A - A_n$ şi $m_n(\tau,t)$ nucleul operatorului M_n. Din teorema lui B.Hvedelidze (a se vedea [3]), despre continuitate operatorului integral singular cu nucleul Cauchy în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$, rezultă continuitatea operatorului

$$(B\varphi)(t)=\int_{\Gamma}\left|\frac{h^{-1}(\tau)h(t)}{\tau-t}-\frac{1}{\tau-t}\right||\varphi(\tau)||d\tau|.$$

Notăm prin $b(\tau,t)$ nucleul acestui operator. Aşa cum $|m_n(\tau,t)\leq cn^{\mu-1}b(\tau,t)|$, rezultă

$$\|M_n\|\leq c\,n^{\mu-1}\|B\| \text{ şi } \|M_n\|\to 0 \text{ pentru } n\to\infty.$$

Aşadar, am demonstrat că operatorul A este compact în spaţiul $L_p(\Gamma)$. Prin urmare, şi operatorul K este compact în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$. Teorema este demonstrată.

Teorema 5. *Fie Γ un contur simplu şi închis de tip Liapunov, iar $t=\beta(z)$ o funcţie care transformă în mod conform discul unitate în domeniul D^+ mărginit de conturul Γ, atunci funcţia*

$$k(\xi,z)=\frac{\beta'(z)}{\beta(z)-\beta(\xi)}-\frac{1}{\xi-z}\,(|\xi|=1,\ |z|\leq 1)$$

are singularitate slabă pe conturul $\Gamma_0=\{\xi\,|\,|\xi|=1\}$.

Demonstraţie. Fie $z,\xi\in\Gamma_0$; $z=e^{i\theta_1}$, $\xi=e^{i\theta_0}$ şi, de exemplu, $\theta_0<\theta_1$. Putem considera că $\theta_1-\theta_0\leq\frac{\pi}{2}$. Fie $u=e^{i\theta}\ (\theta_0\leq\theta\leq\theta_1)$ şi $r=|u-\xi|$, atunci $|du|=d\theta=(\cos\theta/2)^{-1}dr\leq\sqrt{2}\,dr$.

Aşa cum conturul Γ este de tip Liapunov, derivata $\beta'(z)$ verifică condiţiile lui Holder cu un exponent $\alpha\,(0<\alpha<1)$, adică

$$|\beta'(u)-\beta'(\xi)|\leq c\,|u-\xi|^{\alpha}=c\,r^{\alpha},\ c=const.$$

Prin urmare,

$$|\beta(z)-\beta(\xi)-\beta'(\xi)(z-\xi)|=\left|\int_{\gamma}(\beta'(u)-\beta'(\xi))du\right|\leq c\int_{0}^{|z-\xi|}r^{\alpha}\sqrt{2}\,dr=c_1|z-\xi|^{\alpha+1}, \tag{11}$$

unde γ este arcul de cerc, ce uneşte punctele z şi ξ. O evaluare similară de forma (11) se obţine şi pentru punctele z, $|z|<1$, dacă punem $u=\lambda z+(1-\lambda)\xi\ \ (0\leq\lambda\leq 1)$ şi în calitate de γ se ia segmentul de dreaptă, care uneşte punctele z şi ξ. Deoarece transformarea β este conformă, atunci este îndeplinită condiţia $\beta'(\xi)\neq 0\ (\xi\in\Gamma_0)$ şi în consecinţă

$$\left|\frac{\beta(\xi)-\beta(z)}{\xi-z}\right|\geq c_2>0\ . \tag{12}$$

Din inegalităţile (11) şi (12) obţinem

$$|k(\xi,z)|=\left|\frac{\beta'(z)}{\beta(z)-\beta(\xi)}-\frac{1}{\xi-z}\right|=\frac{|\beta'(z)(\xi-z)-\beta(z)-\beta(\xi)|}{|(\beta(z)-\beta(\xi))(\xi-z)|}\leq\frac{c_1|\xi-z|^{\alpha+1}}{c_2|\xi-z|^{2}}=c_3|\xi-z|^{\alpha-1}. \tag{13}$$

Teorema este demonstrată.

Fie Γ_1 şi Γ_2 două curbe închise sau deschise fără puncte de autointersecţie şi $\beta:\Gamma_1 \to \Gamma_2, z=\beta(t)$, o funcţie bijectivă. Notăm prin S_1 şi S_2 operatorii integrali singulari Cauchy pe aceste curbe:

$$(S_1\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau, t\in\Gamma_1, \quad (S_2\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau, t\in\Gamma_2,$$

care acţionează în spaţiile $L_p(\Gamma_1,\rho_1)$ şi, respectiv în $L_p(\Gamma_2,\rho_2)$, unde

$$\rho_1(t)=\prod_{k=0}^{n}|t-t_k|^{\beta_k} \text{ şi } \rho_2(z)=\prod_{k=0}^{n}|z-z_k|^{\beta_k}, \ z_k=\beta(t_k),$$

iar prin B notăm operatorul liniar, inversabil şi mărginit din $L_p(\Gamma_1,\rho_1)$ în $L_p(\Gamma_2,\rho_2)$, definit de relaţia $(B\varphi)(z)=\varphi(\beta^{-1}(z))$.

Teorema 6. *Fie funcţia* $\alpha, \alpha=\beta^{-1}$, *posedă derivată* α' *diferită de zero și verifică condiţiile lui Holder pe* Γ_2:

$$|\alpha'(z_1)-\alpha'(z_1)|\le c|z_1-z_2|^{\mu}, c=const, \ 0<\mu<1,$$

atunci operatorul S_2 *poate fi exprimat sub forma*

$$S_2=BS_1B^{-1}+T,$$

unde T *este un operator compact în* $L_p(\Gamma_2,\rho_2)$, *iar* $(B\psi)(z)=\psi(\beta(z))$.

Demonstraţie. Fie r o funcţie raţională pe Γ_2, $\varphi=B^{-1}r$ şi $T=S_2-BS_1B^{-1}$, atunci

$$(Tr)(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{r(\xi)d\xi}{\xi-z}-\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\alpha(z)}.$$

În ultima integrală este justificat schimbul de variabilă $\tau=\alpha(z)$ (a se vedea [4]) şi în rezultat se obţine

$$(Tr)(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_2}\left(\frac{1}{\xi-z}-\frac{\alpha'(\xi)}{\alpha(\xi)-\alpha(z)}\right)r(\xi)d\xi.$$

Din teorema 5 rezultă că nucleul acestui operator are singularitate slabă pe Γ_2 şi, în baza teoremei 2, este compact. Teorema este demonstrată.

Referinţe:

1. Gohberg,I., Krupnik N. *Introduction to the theory of one-dimensional singular integral operators*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992, 426p.
2. Neagu V. *Operatori noetherieni cu aplicații,* Chişinău, UST, 2015, 200p.
3. Хведелидзе Б.В. *Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной*. Москва: Наука, 1975, 262с.
4. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения*. Москва: Наука, 1968, 511с.