SOUSCATÉGORIES $\mathcal{L}$-SEMI-REFLEXIVES

Dumitru BOTNARU, prof. univ., dr. hab.
Universitatea de Stat din Tiraspol

Résumé. Dans la catégorie des espaces localement convexes, on démontre que, si $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ est une paire de souscatégories conjuguées, alors les latices $\mathbb{R}(\mathcal{K})$, $\mathbb{R}(\mathcal{L})$ et $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ sont isomorphes, où $\mathbb{R}(\mathcal{K})$ et $\mathbb{R}(\mathcal{L})$ sont les classes des souscatégories reflectives des catégories $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$, et $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ est la classe des souscatégories $\mathcal{L}$-semi-reflexives.

Mots clés: souscatégories reflectives, coreflectives, $\mathcal{L}$-semi-reflexives, espaces semi-reflexifs, inductif semi-reflectif.

SUBCATEGORIILE $\mathcal{L}$-SEMI-REFLEXIVE

Rezumat. În categoria spaţiilor local convexe, s-a demonstrat că, dacă $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ este o pereche de subcategorii conjugate, atunci laticele $\mathbb{R}(\mathcal{K})$, $\mathbb{R}(\mathcal{L})$ şi $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ sunt isomorfe, unde $\mathbb{R}(\mathcal{K})$ şi $\mathbb{R}(\mathcal{L})$ sunt clase de subcategorii reflective de categorii $\mathcal{K}$ şi $\mathcal{L}$, şi $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ este clasa de subcategorii $\mathcal{L}$-semi-reflexive.

Cuvinte cheie: subcategorii reflective, coreflective, $\mathcal{L}$-semi-reflexive, spaţii semi-reflexive, inductiv semi-reflectiv.

200 Mathematics subject classification: 46 M 15; 18 B 30.

1. Introduction

Notons avec $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ la catégorie des espaces localement convexes topologiques vectoriels Hausdorff (voir [14, 20, 21]).

Dans cet article on va définir plusieurs notions. Nous utiliserons les notations suivantes.

Structures de factorisation:

$(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$ = (la classe des épimorphismes, la classe des noyaux) = (la classe des morphismes à image dense, les inclusions topologiques à image fermée);

$(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$ = (la classe des épimorphismes universels, la classe des monomorphismes précis)=(la classe des morphismes surjectifs, la classe des inclusions topologiques);

$(\mathcal{E}_p, \mathcal{M}_u)$ = (la classe des épimorphismes précis, la classe des monomorphismes universels) (voir [4, 6]);

$(\mathcal{E}_f, \mathcal{M}ono)$ =(la classe des conoyaux, la classe des monomorphismes)=(la classe des morphismes factoriels, la classe des morphismes injectifs).

Souscatégories coreflectives et reflectives:

Σ = la souscatégorie coreflective des espaces avec la plus fine topologie localement convexe [20];

$\widetilde{\mathcal{M}}$ = la souscatégorie coreflective des espaces avec la topologie Mackey [20];

$\mathcal{S}$ = la souscatégorie reflective des espaces avec la topologie faible [20];

Π = la souscatégorie reflective des espaces complets avec la topologie faible [14];

$u\mathcal{N}$ = la souscatégorie reflective des espaces ultranucléaires [8, 15];

$\mathcal{N}$ = la souscatégorie reflective des espaces nucléaires [16];

$\mathcal{S}h$ = la souscatégorie reflective des espaces Schwartz [14];

$i\mathcal{R}$ = la souscatégorie reflective des espaces inductifs semi-reflexifs [2];

$s\mathcal{R}$ = la souscatégorie reflective des espaces semi-reflexifs [14, 21];

Γ_0 = la souscatégorie reflective des espaces complets;

$l\Gamma_0$ = la souscatégorie reflective des espaces localement complets [19,24];

$p\Gamma_0$ = la souscatégorie reflective des espaces p-complets [12];

$q\Gamma_0$ = la souscatégorie reflective des espaces quasicomplets [21].

$\mathbb{K}$ la classe des souscatégories coreflectives non nulles;

$\mathbb{R}$ la classe des souscatégories reflectives non nulles;

$\mathbb{R}(\mathcal{A})$ la classe des souscatégories reflectives de la catégorie $\mathcal{A}$, où $\mathcal{A} \in \mathbb{K}$, ou $\mathcal{A} \in \mathbb{R}$;

$\mathbb{K}(\mathcal{A})$ la classe des souscatégories coreflectives de la catégorie $\mathcal{A}$;

$\mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$ la classe des souscatégories reflectives qui sont fermée par rapport aux $\mathcal{B}$-sousobjects et $\mathcal{B}$-facteurobjects (voir [5]), où $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$;

$\mathbb{K}(\mathcal{B})$ (respectivement $\mathbb{R}(\mathcal{B})$) la classe des souscatégories $\mathcal{B}$-coreflectives (respectivement $\mathcal{B}$-reflectives);

$\mathbb{R}_{ex}$ (respectivement $\mathbb{R}_{ex}(\mathcal{E}_u)$) la classe des souscatégories reflectives (respectivement $\mathcal{E}_u$-reflectives) fermée par rapport aux extensions: $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p)$-facteurobjets.

1.1. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux classes de morphismes. Alors:

1. $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \{a \cdot b | a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ et la composition $a \cdot b$ existe$\}$.

2. La classe $\mathcal{A}$ se nomme $\mathcal{B}$-héréditaire, si du fait que $f \cdot g \in \mathcal{A}$ et $f \in \mathcal{B}$, il résulte que $g \in \mathcal{A}$.

2^0. La classe $\mathcal{A}$ se nomme $\mathcal{B}$-cohéréditaire, si du fait que $f \cdot g \in \mathcal{A}$ et $f \in \mathcal{B}$, il résulte que $f \in \mathcal{A}$.

3. $\mathcal{A}^{\top}$ est la classe de tous les morphismes orthogonaux du dessus pour tout morphisme de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{A}^{\urcorner} = \mathcal{A}^{\top} \cap \mathcal{E}pi$ (voir [1,4,6]).

3^0. $\mathcal{A}^{\perp}$ est la classe de tous les morphismes orthogonaux du bas pour tout morphisme de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{A}^{\llcorner} = \mathcal{A}^{\top} \cap \mathcal{M}ono$.

4. La classe $\mathcal{A}$ se nomme stable à gauche, si pour tout carré cartésien

$$f \cdot g' = g \cdot f'$$

du fait que $f \in \mathcal{A}$, il résulte que $f' \in \mathcal{A}$ aussi.

4^0. La classe stable à droite.

Dans la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, les classes $\mathcal{E}_f$ et $\mathcal{E}_u$ sont stables à gauche, et les classes $\mathcal{M}_f$ et $\mathcal{M}_p$ et $\mathcal{M}_u$ sont stables à droite (voir [4]).

1.2. Pour $\mathcal{M}$ une classe de monomorphismes, et $\mathcal{A}$ une classe d'objets (une souscatégorie), notons par $\mathbf{S}_{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ la souscatégorie pleine de tous les $\mathcal{M}$-sousobjets des objets de $\mathcal{A}$.

Notation duale: $\mathbf{Q}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$, où $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}pi$.

1.3. Couples de souscatégories conjuguées, souscatégories c-coreflective et c-reflective (voir [3]).

Soit $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ et $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ un foncteur coreflecteur et un foncteur reflecteur.

Notons $\mu\mathcal{K} = \{m \in \mathcal{M}ono |\ k(m) \in \mathcal{I}so\}$, $\varepsilon\mathcal{L} = \{e \in \mathcal{E}pi |\ l(e) \in \mathcal{I}so\}$.

Sot $b : X \to Y$, $Z \in |\mathcal{K}|$ et $r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-replique de X. $b \in \varepsilon\mathcal{R}$, alors et seulement alors quand $b \in \mathcal{E}pi$ et

$$t^X = f \cdot b \tag{1}$$

pour un f (voir [4]).

Mentionons, si $b : X \to Y \in \mu\mathcal{K}$, $Z \in |\mathcal{K}|$, alors pour tout $f : Z \to Y$ a lieu

$$f = f \cdot b \tag{2}$$

pour un f (voir [4]).
Définition (voir [3,4]). Soit $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ se nomme un couple de souscatégories conjuguées de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, si $\mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$.

Soit $\mathbb{P}_c$ la classe des couples des souscatégories conjuguées. Chaque componente d'un couple de souscatégories conjuguées est unique déterminée. Si $(\mathcal{K}_1, \mathcal{L}_1)$ et $(\mathcal{K}_2, \mathcal{L}_2)$ appartiennent à la classe $\mathbb{P}_c$, alors

$$\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \Leftrightarrow \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2.$$

$(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S})$ est le plus petit élément, et $(\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \mathcal{C}_2\mathcal{V})$ le plus grand élément de la classe $\mathbb{P}_c$.

Si $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, alors $\mathcal{K}$ se nomme la souscatégorie c-coreflective, et $\mathcal{L}$ - la souscatégorie c-reflective. Soit $\mathbb{K}_c$ (respectivement $\mathbb{R}_c$) la classe des souscatégories c-coreflectives (respectivement souscatégories c-reflectives), et $\mathcal{B}ic = \{\varepsilon\mathcal{L} | \mathcal{L} \in \mathbb{R}_c\}$.

1.4. THÉORÈME ([4]). *Soit $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ un foncteur reflecteur. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1. $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$.
2. $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ *et le foncteur l est exactement à gauche.*
3. $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ *et* $l(\mathcal{M}_f) \subset \mathcal{M}_f$.
4. $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ *et* $l(\mathcal{M}_p) \subset \mathcal{M}_p$.
5. *La classe $\varepsilon\mathcal{L}$ est stable à gauche.*
6. *Le foncteur l admet un adjoint à gauche.*
7. *Il existe un foncteur coreflecteur $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ ainsi que:*

a) $l \cdot k \sim l$; b) $k \cdot l \sim k$.

1.5. La souscatégorie $\mathcal{S}h$ des espaces Schwartz (voir [14]) et la souscatégorie $u\mathcal{N}$ des espaces ultranucléaires (voir [8,15]) sont des souscatégories c-reflectives (voir [8]).

1.6. Pour $\mathcal{A}$ une classe d'objets injectifs ($\mathcal{M}_p$-injectifs), la souscatégorie $\mathbf{S}_{\mathcal{M}_p}(\mathcal{A})$ est c-reflective (voir [4]). Ces souscatégories forment une classe propre de souscatégories (voir [4]).

1.7. THÉORÈME ([4]). *1. Soit $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$. Alors $((\mathcal{M}_p \circ (\mu\mathcal{K}))^{\urcorner}, \mathcal{M}_p \circ (\mu\mathcal{K}))$ et $((\mathcal{M}_f \circ (\mu\mathcal{K}))^{\urcorner}, \mathcal{M}_f \circ (\mu\mathcal{K}))$ sont des structures de factorisation qu'on peut noter $(\mathcal{E}'(\mathcal{K}), \mathcal{M}'(\mathcal{K}))$ et $(\overline{\mathcal{E}}(\mathcal{K}), \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{K}))$.*

2. Le morphisme $p : X \to Y$ appartient à la classe $\mathcal{E}'(\mathcal{K})$ (respectivement: à la classe $\overline{\mathcal{E}}(\mathcal{K})$), alors et seulement alors quand $p \in \mathcal{E}_u$ (respectivement: $p \in \mathcal{E}pi$) et le carré

$$p \cdot k^X = k^Y \cdot k(p), \tag{1}$$

est cocartésien.

3. Le morphisme $p : X \to Y$ appartient à la classe $\mathcal{E}_p$, alors et seulement alors quand $p \in \mathcal{E}_u$ et le carré

$$p \cdot m^X = m^Y \cdot m(p), \tag{2}$$

est cocartésien, où $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \widetilde{\mathcal{M}}$ est le foncteur coreflecteur.

4. $\mathcal{M}_u = \mathcal{M}_p \circ (\varepsilon\mathcal{S}) = \mathcal{M}_p \circ (\mu\widetilde{\mathcal{M}})$.

5. Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Alors $((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p, ((\varepsilon\mathcal{R}) \circ \mathcal{E}_p)^{\llcorner})$ est une structure de factorisation que l'on va noter $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$.

6. Le morphisme $m : X \to Y$ appartient à la classe $\mathcal{I}''(\mathcal{R})$, alors et seulement alors quand $m \in \mathcal{M}_u$ et le carré

$$r(m) \cdot r^X = r^Y \cdot m, \tag{3}$$

est cartésien.

7. Soit $\mathcal{K} \in \mathbb{K}_c$, et $\mathcal{B} = \mu\mathcal{K}$. Alors $((\mathcal{M}_f \circ \mathcal{B})^{\urcorner}, \mathcal{M}_f \circ \mathcal{B})$ et $((\mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})^{\urcorner}, \mathcal{M}_p \circ \mathcal{B})$ sont des structures de factorisation avec les classes d'injections stables à droite.

8. $\mathbb{R}_c \subset \mathbb{R}_{ex}(\mathcal{E}_u)$.

1.8. THÉORÈME. *1. Pour toute souscatégorie $\mathcal{R}$ $\mathcal{E}_u$-reflective ($\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$) existe la plus grande souscatégorie c-reflective $c\mathcal{R}$ qui se contient en $\mathcal{R}$.*

2. La souscatégorie des espaces ultranucléaires $u\mathcal{N}$ est la plus grande souscatégorie c-reflective qui se contient dans la souscatégorie des espaces nucléaires $\mathcal{N}$.$\square$

1.9. *Le suprême de deux souscatégories reflectives de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

Soit $\mathcal{L}$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, et $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$. Examinons $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ et Π-répliques de l'objet X: $l^X : X \to lX$, $r^X : X \to rX$ et $\pi^X : X \to \pi X$. Aussi, soit $l^{rX} : rX \to lrX$ $\mathcal{L}$-réplique de rX. Alors

$$l^{rX} \cdot r^X = l(r^X) \cdot l^X \tag{1}$$

Π-répliques des objets lX, rX, et lrX nous permettent d'écrire les égalités suivantes:

$$\pi^{lX} = \pi^{lrX} \cdot l(r^X), \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "r^X"] \arrow[dr, dashed, "u^X"] \arrow[dd, "l^X"'] & & rX \arrow[dd, "l^{rX}"] \arrow[dddr, "\pi^{rX}"] & \\
& uX \arrow[ur, dashed, "w=r^{uX}"'] \arrow[dl, dashed, "v=l^{uX}"'] & & \\
lX \arrow[rr, "l(r^X)"] \arrow[drrr, "\pi^{lX}"'] & & lrX \arrow[dr, "\pi^{lrX}"] & \\
& & & \pi X
\end{tikzcd}$$

$$\pi^{rX} = \pi^{lrX} \cdot l^{rX}. \tag{3}$$

Soit

$$l(r^X) \cdot v = l^{rX} \cdot w \tag{4}$$

le carré cartésien construit sur les morphismes $l(r^X)$ et l^{rX}. Alors

$$l^X = v \cdot u^X, \tag{5}$$

$$r^X = w \cdot u^X, \tag{6}$$

pour un u^X. Puisque $l^{rX} \in \mathcal{M}_u$, il résulte aussi que $v \in \mathcal{M}_u$. En tenant compte que la classe $\mathcal{P}''(\mathcal{L})$ est $\mathcal{M}_u$-héréditaire de l'égalité (5), on déduit que $u^X \in \mathcal{P}''(\mathcal{L})$. Alors v est $\mathcal{L}$-réplique de uX: $v = l^{uX}$, et w est $\mathcal{R}$-réplique de uX: $w = r^{uX}$. On vérifie facilement que le caré

$$\pi^{lX} \cdot v = \pi^{rX} \cdot w \tag{7}$$

est cartésien. Ainsi $v \in \mathcal{I}''(\mathcal{R})$, $w \in \mathcal{I}''(\mathcal{L})$, et $u^X \in \mathcal{P}''(\mathcal{L}) \cap \mathcal{P}''(\mathcal{R})$. L'égalité (6) est $(\mathcal{P}''(\mathcal{L}), \mathcal{I}''(\mathcal{L}))$-factorisation, et l'égalité (5) est $(\mathcal{P}''(\mathcal{R}), \mathcal{I}''(\mathcal{R}))$-factorisation des morphismes respectifs.

On a $\pi^{lX} \in \mathcal{I}''(\mathcal{L})$, $l^{uX} \in \mathcal{I}''(\mathcal{R})$, donc $\pi^{lX} \cdot l^{uX} \in \mathcal{I}''(\mathcal{L}) \circ \mathcal{I}''(\mathcal{R}) \subset (\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \cap \mathcal{P}''(\mathcal{R}))^{\llcorner}$. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \cap \mathcal{P}''(\mathcal{R}), (\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \cap \mathcal{P}''(\mathcal{R}))^{\llcorner})$. Alors

$$\pi^X = (\pi^{lX} \cdot l^{uX}) \cdot u^X \tag{8}$$

est $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$-factorisation du morphisme π^X, et la souscatégorie $\mathcal{U} = \mathbf{S}_{\mathcal{I}}(\Pi)$ est $\mathcal{P}$-reflective et $u^X : X \to uX$ est $\mathcal{U}$-réplique de X. De l'égalité $\mathcal{P} = \mathcal{P}''(\mathcal{U})$, c'est-à-dire $\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \cap \mathcal{P}''(\mathcal{R}) = \mathcal{P}''(\mathcal{U})$, il résulte que $\mathcal{U}$ est le suprême des souscatégories $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$: $\mathcal{U} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$.

On a démontré le résultat suivant.

THÉORÈME. *Soit* $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *et* $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \cap \mathcal{P}''(\mathcal{R}), (\mathcal{P}''(\mathcal{L}) \cap \mathcal{P}''(\mathcal{R}))^{\llcorner})$. *Alors*

1. La souscatégorie $\mathcal{U} = \mathbf{S}_{\mathcal{I}}(\Pi)$ *est le suprême des éléments* $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{R}$ *dans la latice* $\mathbb{R}$*:* $\mathcal{U} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$.

2. $(\mathcal{P}, \mathcal{I}) = (\mathcal{P}''(\mathcal{U}), \mathcal{I}''(\mathcal{U}))$.

3. $u^X : X \to uX$ *est* $\mathcal{U}$*-réplique de l'objet* X.

Les résultats principaux de l'ouvrage

Dans le paragraphe deux, on introduit la notation de souscatégories $\mathcal{L}$-semi-reflexives (*Définition* 2.6), on indique les conditions nécessaires et suffisantes pour que le produit semi-reflexif nous mène à sa souscatégorie semi-reflexive donnée (THÉORÈME 2.8). Les THÉORÈMES 2.10 et 2.11 permettent de construire des exemples des souscatégories semi-reflexives.

Dans le paragraphe trois on démontre que les latices $\mathbb{R}(\mathcal{K})$, $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ et $\mathbb{R}(\mathcal{L})$ sont isomorphes si $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ est une paire de souscatégories conjuguées (THÉORÈME 3.1) et sa duale (THÉORÈME 3.2).

Dans le paragraphe quatre, si $\mathcal{T}$, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{H}$ sont trois éléments qui correspondent dans le THÉORÈME 3.1, alors conformément à un élément de ce trois, on construit les autres répliques de tout objet.

Dans le paragraphe cing, on démontre que si $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$ et $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, alors les foncteurs $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ et $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ commutent: $k \cdot r = r \cdot k$ (THÉORÈME 5.2).

Si de plus $r(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$, alors les foncteurs $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ et r commutent: $l \cdot r = r \cdot l$ (THÉORÈME 5.3).

Toutes les conditions énumérées plus haut sont vraies dans les cas suivants:

a) $(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S}) \in \mathbb{P}_c$ et $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ (COROLLAIRE 5.5 p.2);

b) $(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S}) \in \mathbb{P}_c$ et $s\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ (PROPOSITION 6.2 p.5-6);

c) $(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S}) \in \mathbb{P}_c$ et $l\Gamma_0 \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$ (PROPOSITION 6.3 p.5-6);

d) $(\mathcal{C}h, \mathcal{S}h) \in \mathbb{P}_c$ et $i\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S}h)$ (PROPOSITION 6.4).

2. Souscatégories semi-reflexives

Les souscatégories semi-reflexives et leurs diverses propriétés ont été étudiées dans les ouvrages [5, 7, 9-12, 17, 18, 22, 23].

Dans l'ouvrage [19], le professeur D. Raïkov a examiné des topologies localement convexes sur les espaces vectoriels de $\mathcal{L}(X, Y)$ et $Z \otimes X$ de manière que l'isomorphisme algébrique

$$\mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{L}(X, Y)) \to \mathcal{L}(\mathcal{Z} \otimes X, Y)$$

devienne isomorphisme de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ (la loi exponentielle). Se rapportant aux souscatégories semi-reflexives, M. M. Bouneaev a examiné autant la loi exponentielle [9] et les problèmes du graphe fermé [10, 11].

2.1. *Définition* [5]. Soit $\mathcal{A}$ une souscatégorie et $\mathcal{L}$ une souscatégorie reflective de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. L'objet X se nomme $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$-semi-reflexif, si sa $\mathcal{L}$-réplique appartient à la souscatégorie $\mathcal{A}$. La souscatégorie pleine de tous les objets $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$-semi-reflexifs se nomme produit semi-reflexif des souscatégories $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$, notée

$$\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}.$$

2.2. Mentionnons les propriétés suivantes du produit semi-reflexif (voir [5]).

THÉORÈME 1. $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A} = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \mathcal{A})$.

2. *Si* $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, *alors* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}_2$.

3. *Si* $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$, *alors* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

4. *Si* $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$, *alors* $\mathcal{A} \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$.

5. *La souscatégorie* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$ *est fermée par rapport aux produits.*

6. *Soit* $\mathcal{L}$ *et* Γ *deux souscatégories reflectives,* $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ *et* $\Gamma_0 \subset \Gamma$. *Alors* $\mathcal{L} *_{sr} \Gamma \subset \Gamma$.

7. *Soit* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ *une structure de factorisation dans la catégorie* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, $\mathcal{A}$ *une souscatégorie* $\mathcal{E}$*-reflective et le foncteur reflecteur* $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ *possède la propriéte* $l(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. *Alors le produit semireflexif* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$ *est une souscatécorie reflective de la catégorie* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

2.3. PROPOSITION. *Le produit semi-reflexif* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$ *est fermé par rapport à* $(\varepsilon\mathcal{L})$*-sousobjets et* $(\varepsilon\mathcal{L})$*-facteurobjets.*

Démonstration. Soit $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$, $A \in |\mathcal{R}|$, $b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{L}$, et $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-réplique de A. Alors $l^A \cdot b$ est $\mathcal{L}$-réplique de A. Donc $lX \in |\mathcal{A}|$, et $X \in |\mathcal{R}|$.

Vérifions que $\mathcal{R}$ est fermée par rapport à $(\varepsilon\mathcal{L})$-facteurobjets. Soit $A \in |\mathcal{R}|$, $t : A \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}$, et $l^Y : Y \to lY$ $\mathcal{L}$-réplique de Y. Alors $l^Y \cdot t$ est $\mathcal{L}$-réplique de Y. Donc $lY \in |\mathcal{A}|$ et $Y \in |\mathcal{R}|$.□

2.4. PROPOSITION. *Soit* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$, *et* $\mathcal{A}$ *une souscatégorie de la catégorie* $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. *Alors* $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A} = \mathbf{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{A})$.

Démonstration. Soit $X \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}|$, et $l^X : X \to lX$ $\mathcal{L}$-réplique de X. Alors $lX \in |\mathcal{A}|$, c'est-à-dire $lX \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{A}|$, et $l^X \in \varepsilon\mathcal{L}$. Donc $X \in \mathbf{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}|\mathcal{L} \cap \mathcal{A}|$.

Maintenant soit que $X \in |\mathcal{S}_{\varepsilon\mathcal{L}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{A})|$. Alors il existe un objet $Z \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{A}|$ et un morphisme $b : X \to Z \in \varepsilon\mathcal{L}$. Il est clair que b est $\mathcal{L}$-réplique de X et $lX = Z \in |\mathcal{A}|$. Donc $X \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}|$.□

2.5. COROLLAIRE [5]. *Soit $\mathcal{L}$ une souscatégorie c-reflective, et $\mathcal{A}$ une souscatégorie reflective de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Alors $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$ est une souscatégorie reflective de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.*

Démonstration. Vraiment, $((\varepsilon\mathcal{L})^{\top}, \varepsilon\mathcal{L})$ est une structure de factorisation à gauche, et $\mathcal{L} \cap \mathcal{A}$ est une souscatégorie reflective de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Si $t^X : X \to tX$ est $(\mathcal{L} \cap \mathcal{A})$-réplique de X, et

$$t^X = i^X \cdot p^X \tag{1}$$

est $((\varepsilon\mathcal{L})^{\top}, \varepsilon\mathcal{L})$-factorisation de t^X, alors p^X est $(\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A})$-réplique de X.

Vraiment, $tX \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{A}|$, $\mathcal{L} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{L} *_{sr} A$ et $i^X \in \varepsilon\mathcal{L}$. Donc $pX \in |\mathcal{L} *_{sr} A|$. Soit $Z \in |\mathcal{L} *_{sr} A|$ et $f : X \to Z$. Si $l^Z : Z \to lZ$ est $\mathcal{L}$-réplique de Z, alors $lZ \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{A}|$. Ainsi

$$l^Z \cdot f = g \cdot t^X, \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "t^X"] \arrow[dr, dashed, "p^X"] \arrow[ddr, "f"'] & & tX \arrow[d, dashed, "g"] \\
& pX \arrow[ur, dashed, "i^X"] \arrow[d, dashed, "h"] & lZ \\
& Z \arrow[ur, "l^Z"'] &
\end{tikzcd}$$

pour un g. L'égalité (2) peut être écrit

$$(g \cdot i^X) \cdot p^X = l^Z \cdot f, \tag{3}$$

où $p^X \in (\varepsilon\mathcal{L})^{\top}$, et $l^Z \in \varepsilon\mathcal{L}$. Donc $p^X \perp l^Z$. Alors

$$f = h \cdot p^X, \tag{4}$$

$$(g \cdot i^X) = l^Z \cdot h, \tag{5}$$

pour un h. Ainsi f s'exteint par p^X. $t^X \in \mathcal{E}pi$ et $i^X \in \mathcal{M}_u$. Comme la classe $\mathcal{E}pi$ est $\mathcal{M}_u$-hérédidaire, de légalité (1) résulte que $p^X \in \mathcal{E}pi$.□

2.6. *Définition.* Soit $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ deux souscatégories reflectives de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. $\mathcal{R}$ se nomme une souscatégorie $\mathcal{L}$-semi-reflexive, si elle est fermée par rapport à $(\varepsilon\mathcal{L})$-sousobjets et $(\varepsilon\mathcal{L})$-facteurobjets. La classe de toutes les souscatégories $\mathcal{L}$-semi-reflexives est notée $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

2.7. *Exemple.* 1. Soit $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$. Alors $\varepsilon\mathcal{L}_2 \subset \varepsilon\mathcal{L}_1$, et $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}_1) \subset \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}_2)$.

2. $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{C}_2\mathcal{V}) = \mathbb{R}$.

3. Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$. Alors $\Pi \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

4. Si $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A} \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

5. Si $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, alors $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$.

2.8. THÉORÈME. *Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, et $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1. $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H} = \mathcal{R}$.

2. $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \mathcal{H}$.

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$. $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{H}$. Vraiment, soit $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Alors $lA = A \in |\mathcal{R}|$. Donc $lA \in |\mathcal{H}|$ c'est-à-dire $A \in |\mathcal{H}|$. Donc $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}|$.

$\mathcal{L} \cap \mathcal{H} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. Soit $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}|$. Alors $A \in |\mathcal{R}|$, c'est-à-dire $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$.

$2 \Rightarrow 1$. $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Soit $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}|$, et $l^A : A \to lA$ est $\mathcal{L}$-réplique de A. Alors $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Donc $lA \in |\mathcal{R}|$ et comme $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, il résulte que $A \in |\mathcal{R}|$.

$\mathcal{R} \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$. Soit $A \in |\mathcal{R}|$, et $l^A : A \to lA$ est $\mathcal{L}$-réplique de A. Comme $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, il résulte que $lA \in |\mathcal{R}|$. $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| = |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}|$ c'est-à-dire $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}|$.$\square$

2.9. COROLLAIRE. *Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1. $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$.

2. *Soit $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$. Alors $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$.*

3. *Soit $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$, $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{H}$. Alors $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{T}$.*

2.10. THÉORÈME. *Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ et $\mathcal{B} \subset \varepsilon\mathcal{R}$. Alors $\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{R})$.*

Démonstration. Soit $r^X : X \to rX$ est $\mathcal{R}$-réplique de l'objet X, et

$$r^X = b^X \cdot t^X, \tag{1}$$

la $(\mathcal{B}^\top, \mathcal{B})$-factorisation de r^X. Comme la classe $\mathcal{E}pi$ est $\mathcal{M}_u$-héréditaire ([4], LEMME 2.6), il résulte que $t^X \in \mathcal{E}pi$ et t^X est $\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$-réplique du X.

Vérifions que $\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$ est fermé par rapport aux $\mathcal{B}$-facteurobjets. Soit $A \in |\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})|$ et $b : A \longrightarrow X \in \mathcal{B}$. Si r^A est $\mathcal{R}$-réplique de l'objet A, alors $b \in \mathcal{B} \subset \varepsilon\mathcal{R}$ et

$$r^A = f \cdot b, \tag{2}$$

pour un f. Comme $A \in |\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})|$, il résulte que $r^A \in \mathcal{B}$. Donc $f \in \mathcal{B}$ aussi.

Mentionnons que la condition $\mathcal{B} \subset \varepsilon\mathcal{R}$ est équivalente avec la condition $\mathcal{R} \subset \lambda(\mathcal{B})$.$\square$

2.11. THÉORÈME. *Soit $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ et $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mathcal{B})$. Alors $\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$.*

Démonstration. Tout foncteur reflecteur de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ commute avec les produits ([5], THÉORÈME 1.12), et la classe $\mathcal{B}$ est fermée par rapport aux produits. Donc $\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$ est fermée par rapport aux produits.

Démontrons que $\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$ est fermé par rapport aux $\mathcal{M}_f$-sousobjets. Soit $A \in |\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})|$, et $m : X \to A \in \mathcal{M}_f$. Il existe un objet $Z \in |\mathcal{R}|$ et un morphisme $b : Z \longrightarrow A \in \mathcal{B}$. Soit

$$m \cdot b' = b \cdot m', \tag{1}$$

le carré cartésien construit sur les morphismes m et b, où $m' : P \longrightarrow Z$. Alors $m' \in \mathcal{M}_f$, et $b' \in \mathcal{B}$. Donc $P \in |\mathcal{R}|$, et $X \in |\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})|$.

Vérifions que $\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})$ est fermé par rapport aux $\mathcal{B}$-sousobjets. Soit $A \in |\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})|$, et $b : X \to A \in \mathcal{B}$. Il existe un objet $Z \in |\mathcal{R}|$ et un morphisme $t : Z \longrightarrow A \in \mathcal{B}$. Soit

$$t \cdot b' = b \cdot t', \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, dashed, "m'"] \arrow[d, dashed, "b'"'] & Z \arrow[d, "b"] \\
X \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, dashed, "b'"] \arrow[d, dashed, "t'"'] & Z \arrow[d, "t"] \\
X \arrow[r, "b"] & A
\end{tikzcd}$$

le carré cartésien construit sur les morphismes b et t. Alors b', $t' \in \mathcal{B}$, et $Z \in |\mathcal{R}|$. Donc $P \in |\mathcal{R}|$, et $X \in |\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R})|$.□

2.12. COROLLAIRE. *Soit $\mathcal{B} \in \mathbb{B}ic$ et $\mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{M}p)$. Alors $\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$.*

Démonstration. En vertu du LEMME 3.2 [5] $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u)$, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_p$.□

3. Les isomorphismes de latice $\mathbb{R}(\mathcal{K})$, $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ et $\mathbb{R}(\mathcal{L})$, $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$

3.1. THÉORÈME. *Soit $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, mais $\mathcal{B} = \varepsilon\mathcal{L}$.*

1. L'application $\mathcal{T} \longmapsto \varphi_1(\mathcal{T}) = \mathbb{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$ pour $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$ prend des valeurs dans la classe $\mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$.

2. L'application $\mathcal{R} \longmapsto \psi_1(\mathcal{R}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{R}$ pour $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$ prend des valeurs dans la classe $\mathbb{R}(\mathcal{K})$.

3. Les applications φ_1 et ψ_1 sont réciproquement inverses.

4. L'application $\mathcal{H} \longmapsto \varphi(\mathcal{H}) = \mathbb{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})$ pour $\mathcal{H} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$ prend des valeurs dans la classe $\mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$.

5. L'application $\mathcal{R} \longmapsto \psi(\mathcal{R}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ pour $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$ prend des valeurs dans la classe $\mathbb{R}(\mathcal{L})$.

6. Les applications φ et ψ sont réciproquement inverses.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}(\mathcal{K}) \arrow[r, shift left, "\varphi_1"] & \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B}) \arrow[l, shift left, "\psi_1"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & \mathbb{R}(\mathcal{L}) \arrow[l, shift right, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On va indiquer, chaque fois, ce qu'on démontrera.

1. Soit $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{R} = \mathbb{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$. On construira $\mathcal{R}$-réplique pour tout objet $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$. Soit $k^X : kX \longrightarrow X$ $\mathcal{K}$-coréplique de X, $t^{kX} : kX \longrightarrow tkX$ $\mathcal{T}$-réplique de kX, et

$$u^X \cdot t^{kX} = \overline{v}^X \cdot k^X \tag{1}$$

le carré cocartésien construit sur les morphismes k^X et t^{kX}. Comme $k^X \in \mu\mathcal{K} = \mathcal{B}$, alors $u^X \in \mathcal{B}$, et $\overline{v}X \in |\mathcal{R}|$. Vérifions que $\overline{v}^X$ est $\mathcal{R}$-réplique de l'objet X. Vraiment, soit $Z \in |\mathcal{R}|$, mais $f : X \longrightarrow Z$. Il existe un objet $A \in |\mathcal{T}|$ et un morphisme $b : A \longrightarrow Z \in \mathcal{B}$. Comme $b \in \mathcal{B}$, il existe un morphisme $g : kX \longrightarrow A$ ainsi que

$$f \cdot k^X = b \cdot g. \tag{2}$$

Alors

$$g = h \cdot t^{kX} \tag{3}$$

pour un $h : tkX \longrightarrow A$. Des égalités écrites on a

$$b \cdot f \cdot k^X = b \cdot g = b \cdot h \cdot t^{kX},$$

i.e.

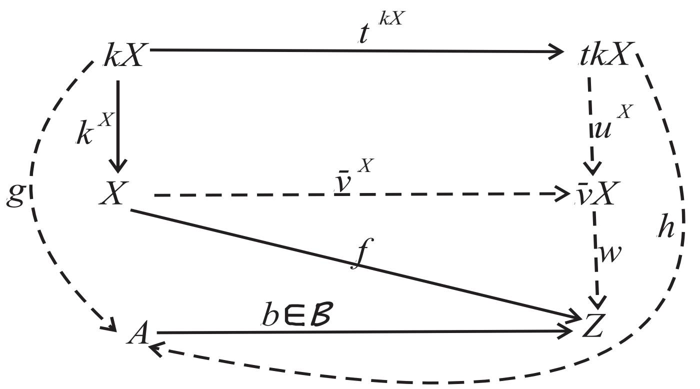
$$f \cdot k^X = h \cdot t^{kX} \tag{4}$$

et puisque (1) est un carré cocartésien, il résulte que

$$f = w \cdot \overline{v}^X, \tag{5}$$

$$b \cdot h = w \cdot u^X \tag{6}$$

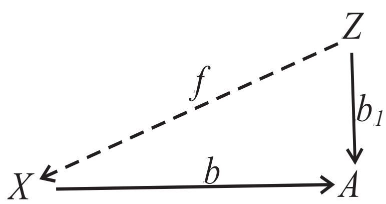
pour un w. L'égalité (5) montre que f s'existeint par $\overline{v}^X$. L'unisité de w résulte du fait que $\overline{v}^X$ est un epi.



$\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mathcal{B})$. Soit $A \in |\mathcal{T}|$, mais $b : X \longrightarrow A \in \mathcal{B}$. Il existe un objet $Z \in |\mathcal{T}|$ et un morphisme $b_1 : Z \longrightarrow A$. Puisque $Z \in |\mathcal{T}| \subset |\mathcal{K}|$ et $b \in \mathcal{B}$, il résulte que

$$b_1 = b \cdot f \tag{7}$$

pour un f. Alors $f \in \mathcal{B}$, et $X \in |\mathcal{R}|$.



$\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\mathcal{B})$. Evidemment. Ainsi on a démontré que $\varphi_1(\mathcal{T}) \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{R})$.

2. Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$ et on démontrera que $\mathcal{K} \cap \mathcal{R} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$. Il est suffisant de montrer que pour $X \in |\mathcal{K}|$, l'objet rX appartient aussi à la catégorie $\mathcal{K}$. Vraiment soit $r^X : X \longrightarrow rX$ $\mathcal{R}$-réplique de X, mais $k^{rX} : krX \longrightarrow rX$ $\mathcal{K}$-coréplique de rX. Alors

$$r^X = k^{rX} \cdot f \tag{8}$$

pour un f. Puisque $rX \in |\mathcal{R}|$, et $k^{rX} \in \mathcal{B}$, il résulte que $krX \in |\mathcal{R}|$. Alors

$$f = g \cdot r^X \tag{9}$$

pour un g. Dans l'égalité (8) $k^{rX} \in \mathcal{B} \subset \mathcal{M}_u$,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "r^X"'] & & krX \arrow[dl, shift left, "k^{rX}"'] \\
& rX \arrow[ur, dashed, shift left, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

et $r^X \in \mathcal{E}pi$. La classe $\mathcal{E}pi$ est $\mathcal{M}_u$-héréditaire. Ainsi $f \in \mathcal{E}pi$. On a

$$g \cdot k^{rX} \cdot f = g \cdot r^X = f,$$

ou

$$g \cdot k^{rX} = 1. \tag{10}$$

Donc $k^{rX} = g^{-1}$, et $rX \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{R}|$.

3. $\varphi_1 \cdot \psi_1 = 1$. Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{R})$. Alors $\varphi_1\psi_1(\mathcal{R}) = \varphi_1(\mathcal{K} \cap \mathcal{R}) = \mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})$.

$\mathcal{R} \subset \mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})$. Soit $A \in |\mathcal{R}|$. Alors $kA \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{R}|$, et $k^A \in \mathcal{B}$. Ainsi $A \in |\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})|$.

$\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$. Soit $A \in |\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{K} \cap \mathcal{R})$. Alors il existe un objet $Z \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{R}|$ et un morphisme $b : Z \longrightarrow A$. Puisque $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{R})$, il résulte que $A \in |\mathcal{R}|$.

$\psi_1 \cdot \varphi_1 = 1$. Soit $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$. Alors $\psi_1\varphi_1(\mathcal{T}) = \psi_1(\mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})) = \mathcal{K} \cap \mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$.

$\mathcal{T} \subset \mathcal{K} \cap \mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$. Evidemment.

$\mathcal{K} \cap \mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$. Soit $A \in |\mathcal{K} \cap \mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})|$. Alors $A \in |\mathcal{K}|$ et il existe un objet $Z \in |\mathcal{T}|$ et un morphisme $b : Z \longrightarrow A \in \mathcal{B}$. Alors $b \in \mathcal{I}so$ et $A \in |\mathcal{T}|$.

4. Soit $\mathcal{H} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$, et $\mathcal{R} = \mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})$. Examinons un objet arbitraire $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$: $h^X : X \to hX$, $k^X : kX \to X$ et $k^{hX} : khX \to hX$ $\mathcal{H}$-répliques $\mathcal{K}$-corépliques des objets correspondants. Alors

$$h^X \cdot k^X = k^{hX} \cdot k(h^X). \tag{11}$$

Soit

$$v^X \cdot k^X = f^X \cdot k(h^X), \tag{12}$$

le carré cocartésien construit sur les morphismes k^X et $k(h^X)$. Alors

$$h^X = u^X \cdot v^X, \tag{13}$$

$$k^{hX} = u^X \cdot f^X, \tag{14}$$

pour un morphisme $u^X : vX \to rX$. On a k^X, $k^{hX} \in \mathcal{B}$. Donc f^X, $u^X \in \mathcal{B}$, et $vX \in \mathbf{S}_B(\mathcal{R})$.

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, "k(h^X)"] \arrow[dd, "k^X"'] & & khX \arrow[dl, dashed, "f^X"'] \arrow[dd, "k^{hX}"] \arrow[dddl, dashed, bend left, "p_3"] \\
& vX \arrow[dr, dashed, "u^X"] \arrow[dd, "p_2"] \arrow[ddl, dashed, "w"'] & \\
X \arrow[ur, dashed, "v^X"] \arrow[rr, dashed, "h^X"'] \arrow[d, "p_1"'] & & hX \\
A \arrow[r, "b \in \mathcal{B}"] & B & \\
& kA=kB \arrow[ul, "k^A"] &
\end{tikzcd}$$

Démontrons que $v^X \perp \mathcal{B}$ (voir [4]). Vraiment soit $b : A \longrightarrow B \in \mathcal{B}$ et

$$b \cdot p_1 = p_2 \cdot v^X, \tag{15}$$

Si $k^A : kA \longrightarrow A$ est $\mathcal{K}$-coréplique de A, alors $b \cdot k^A : kA \longrightarrow B$ est $\mathcal{K}$-coréplique de B. Il existe un morphisme $p_3 : krX \longrightarrow kB$ ainsi que

$$p_2 \cdot f^X = b \cdot k^A \cdot p_3. \tag{16}$$

De telle manière

$$b \cdot p_1 \cdot k^X = p_2 \cdot v^X \cdot k^X = p_2 \cdot f^X \cdot k(h^X) = b \cdot k^A \cdot p_3 \cdot k(h^X),$$

i.e.

$$b \cdot p_1 \cdot k^X = b \cdot k^A \cdot p_3 \cdot k(h^X), \tag{17}$$

ou

$$p_1 \cdot k^X = k^A \cdot p_3 \cdot k(h^X), \tag{18}$$

Puisque (12) est carré cocartésien, il existe un morphisme $w : vX \longrightarrow A$, ainsi que

$$p_1 = w \cdot v^X, \tag{19}$$

$$p_2 = b \cdot w. \tag{20}$$

De l'égalité (13), en tenant compte que $u^X \in \mathcal{B}$, on déduit que $v^X \in \mathcal{E}pi$. Ainsi, de l'égalité (15) et (19), il résulte que

$$b \cdot w = p_2. \tag{21}$$

Ainsi $v^X \perp \mathcal{B}$, et l'égalité (13) est $(\mathcal{B}^{\top}, \mathcal{B})$ est une structure de factorisation de gauche.

Démontrons maintenant que v^X est $\mathcal{R}$-réplique de l'objet X. Soit $Y \in |\mathcal{R}|$, et $f : X \to Y$. Il existe un objet $Z \in |\mathcal{H}|$ et un morphisme $b : Y \to Z \in \mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "v^X"] \arrow[rr, bend left, "h^X"] \arrow[d, "f"'] & vX \arrow[r, "u^X"] \arrow[dl, dashed, "t"'] & hX \arrow[dl, dashed, "g"] \\
Y \arrow[r, dashed, "b \in \mathcal{B}"] & Z &
\end{tikzcd}$$

On a

$$b \cdot f = g \cdot h^X \tag{22}$$

pour un morphisme g. Alors

$$b \cdot f = (g \cdot u^X) \cdot v^X \tag{23}$$

avec $v^X \perp b$. Ainsi

$$f = t \cdot v^X, \tag{24}$$

$$g \cdot u^X = b \cdot t \tag{25}$$

pour un t. On a démontré que $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\mathcal{B})$. Evidemment.

$\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\mathcal{B})$. Soit $A \in |\mathcal{R}|$, et $b : A \to X \in \mathcal{B}$. Il existe un objet $Z \in |\mathcal{H}| \subset |\mathcal{L}|$ et un morphisme $b_1 : A \to Z$. Alors b_1 est $\mathcal{L}$-réplique de A. Ainsi

$$b_1 = f \cdot b \tag{26}$$

pour un f. Il est clair que $f \in \mathcal{B}$, est $X \in |\mathcal{R}|$.

5. Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{B})$. Alors $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ et $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ est une catégorie reflective de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, donc de la catégorie $\mathcal{L}$ aussi.

6. $\varphi \cdot \psi = 1$. Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\mathcal{R})$. Alors $\varphi\psi(\mathcal{R}) = \varphi(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) = \mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$.

$\mathcal{R} \subset \mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$. Soit $A \in |\mathcal{R}|$, et $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-réplique de A. Alors $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$, et $l^A \in \mathcal{B}$. Ainsi $A \in |\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})|$.

$\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$. Soit $A \in |\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$. Il existe un objet $Z \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$ et un morphisme $b : A \longrightarrow Z \in \mathcal{B}$. Ainsi $A \in |\mathcal{R}|$, puisque $\mathcal{R}$ est fermée par rapport à $\mathcal{B}$-sousobjets.

$\psi \cdot \varphi = 1$. Soit $\mathcal{H} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$. Alors $\psi\varphi(\mathcal{H}) = \psi(\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})) = \mathcal{L} \cap \mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})$.

$\mathcal{H} \subset \mathcal{L} \cap \mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})$. Soit $A \in |\mathcal{H}| \subset |\mathcal{L}|$. Donc $A \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{H}| \subset |\mathcal{L} \cap \mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})|$.

$\mathcal{L} \cap \mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$. Soit $A \in |\mathcal{L} \cap \mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})|$. Alors $A \in |\mathcal{L}|$ et $A \in |\mathbf{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{H})|$. Il existe un objet $Z \in |\mathcal{H}|$ et un morphisme $b : A \longrightarrow Z \in \mathcal{B}$. Puisque $A \in |\mathcal{L}|$, il résulte que $b \in \mathcal{I}so$ et $A \in |\mathcal{H}|$.$\square$

3.2. Le résultat dual est aussi juste.

THÉORÈME. *Soit* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *et* $\mathcal{B} = \varepsilon\mathcal{L}$.

1. *L'application* $\mathcal{T} \mapsto \overline{\varphi_1}(\mathcal{T}) = \mathbf{Q}_{\mathcal{B}}(\mathcal{T})$ *pour* $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\mathcal{K})$ *prend des valeurs dans la class* $\mathbb{K}^s_f(\mathcal{B})$.

2. *L'application* $\mathcal{U} \mapsto \overline{\psi_1}(\mathcal{U}) = \mathcal{K} \cap \mathcal{U}$ *pour* $\mathcal{U} \in \mathbb{K}^s_f(\mathcal{B})$ *prend des valeurs dans la class* $\mathbb{K}(\mathcal{K})$.

3. *Les applications* $\overline{\varphi_1}$ *et* $\overline{\psi_1}$ *sont réciproquement inverses.*

4. *L'application* $\mathcal{V} \longmapsto \overline{\varphi}(\mathcal{V}) = \mathbb{S}_{\mathcal{B}}(\mathcal{V})$ *pour* $\mathcal{V} \in \mathbb{K}(\mathcal{L})$ *prend des valeurs dans la classe* $\mathbb{K}^s_f(\mathcal{B})$.

5. *L'application* $\mathcal{H} \longmapsto \overline{\psi}(\mathcal{H}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{H}$ *pour* $\mathcal{H} \in \mathbb{K}^s_f(\mathcal{B})$ *prend des valeurs dans la classe* $\mathbb{K}(\mathcal{L})$.

6. *Les applications* $\overline{\varphi}$ *et* $\overline{\psi}$ *sont réciproquement inverses.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}(\mathcal{K}) \arrow[r, shift left, "\overline{\varphi}_1"] & \mathbb{K}^s_f(\mathcal{B}) \arrow[l, shift left, "\overline{\psi}_1"] \arrow[r, shift right, "\overline{\psi}"'] & \mathbb{K}(\mathcal{L}) \arrow[l, shift right, "\overline{\varphi}"']
\end{tikzcd}$$

4. Réconstruction des repliques et corepliques

4.1. Pour $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$ en vertu du THÉORÈME 3.1, chaque élément $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ et $\mathcal{H} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$ définit par un triplet.

1. $\mathcal{T} \longmapsto (\mathcal{T}, \varphi_1(\mathcal{T}), \psi\varphi_1(\mathcal{T}))$, $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$.
2. $\mathcal{R} \longmapsto (\psi_1(\mathcal{R}), \mathcal{R}, \psi(\mathcal{R}))$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.
3. $\mathcal{H} \longmapsto (\psi_1\varphi(\mathcal{H}), \varphi(\mathcal{H}), \mathcal{H})$, $\mathcal{H} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$.

Voyons, par exemple, dans chacun de ces cas comment peuvent être construites $\varphi_1(\mathcal{T})$- et $\psi\varphi_1(\mathcal{T})$-répliques d'un objet arbitraire.

4.2. Le cas $\mathcal{T} \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$. Soit $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $k^A : kA \to A$, $l^A : A \to lA$ et $t^{kA} : kA \to tkA$ coréplique et réplique des objet correspondants. Plus loin, soit

$$b_1^A \cdot t^{kA} = u_1^A \cdot k^A, \tag{1}$$

$$b_2^A \cdot u_1^A = u_2^A \cdot l^A \tag{2}$$

les carrés cocartésiens construit sur les morphismes t^{kA}, k^A et $k^A u_1^A$, l^A, et l^T $\mathcal{L}$-réplique de T.

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "k^A"] \arrow[d, "t^{kA}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{Carré cocartésien}"] & A \arrow[r, "l^A"] \arrow[d, dashed, "u_1^A"] \arrow[dr, phantom, "\text{Carré cocartésien}"] & lA \arrow[d, dashed, "u_2^A"] & \\
tkA \arrow[r, dashed, "b_1^A"'] & P \arrow[r, dashed, "b_2^A"'] & T \arrow[r, "l^T"'] & lT
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME. *Sont vraies les affirmations suivantes:*

1. $t^{kA} : kA \to tkA$ *est* $\varphi_1(\mathcal{T})$*-réplique de* kA.
2. $u_1^A : A \to P$ *est* $\varphi_1(\mathcal{T})$*-réplique de* A.
3. $b_1^A : tkA \to P$ *est* $\mathcal{K}$*-coréplique de* P.
4. $l^T \cdot b_2^A : P \to lT$ *est* $\mathcal{L}$*-réplique de* P.
5. $l^T \cdot u_2^A : lA \to lT$ *est* $\psi\varphi_1(\mathcal{T})$*-réplique de* lA.
6. $l^T \cdot u_2^A \cdot l^A : A \to lT$ *est* $\psi\varphi_1(\mathcal{T})$*-réplique de* A.

Démonstration. 1. Premièrement, mentionnons que $tkA \in |\mathcal{T}| \subset |\varphi_1(\mathcal{T})|$. Soit $Z \in |\varphi_1(\mathcal{T})|$, et $f : kA \to Z$. Il existe un objet $B \in |\mathcal{T}|$ et un morphisme $b : B \to Z \in \varepsilon\mathcal{L}$.

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "t^{kA}"] \arrow[d, dashed, "g"'] \arrow[dr, "f"] & tkA \arrow[dl, dashed, "h"'] \\
B \arrow[r, "b \in \mathcal{B}"] & Z
\end{tikzcd}$$

Puisque $\varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$, il existe un morphisme $g : kA \to B$ ainsi que .

$$f = b \cdot g. \tag{3}$$

Alors

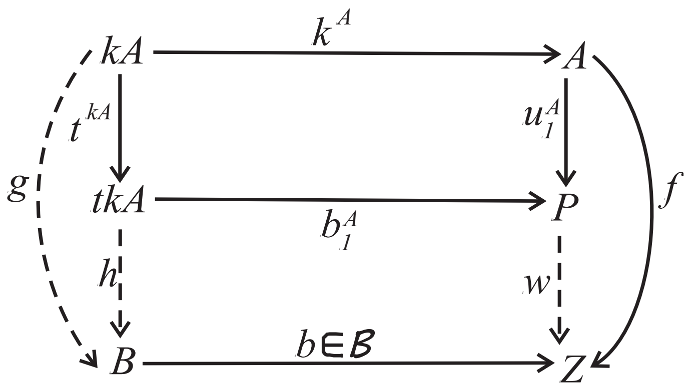
$$g = h \cdot t^{kA}, \tag{4}$$

et

$$f = (b \cdot h) \cdot t^{kA}. \tag{5}$$

Ainsi le morphisme f s'éxteint par t^{kA}.

2. Puisque $k^A \in \mathcal{B}$, il résulte que $b_1^A \in \mathcal{B}$ aussi. Ainsi $P \in |\mathcal{R}|$, où $\mathcal{R} = \varphi_1(\mathcal{T})$. Soit maintenent $Z \in |\mathcal{R}|$, et $f : A \to Z$. Il existe un objet $B \in |\mathcal{T}|$ et un morphisme $b : B \to Z \in \mathcal{B}$.



Puisque $\mathcal{B} = \mu\mathcal{K}$ pour le morpfisme $f \cdot k^A$, il existe un morphisme g ainsi que .

$$f \cdot k^A = b \cdot g, \tag{6}$$

qui, à son tour, s'éxteint par $\mathcal{T}$-réplique de kA:

$$g = h \cdot t^{kA}, \tag{7}$$

pour un h. On a

$$b \cdot h \cdot t^{kA} = f \cdot k^A. \tag{8}$$

Ainsi le morphisme f s'éxteint par t^{kA}.

Puisque (1) est un carré cocartésien, il résulte que

$$b \cdot h = w \cdot b_1^A, \tag{9}$$

$$f = w \cdot u_1^A, \tag{10}$$

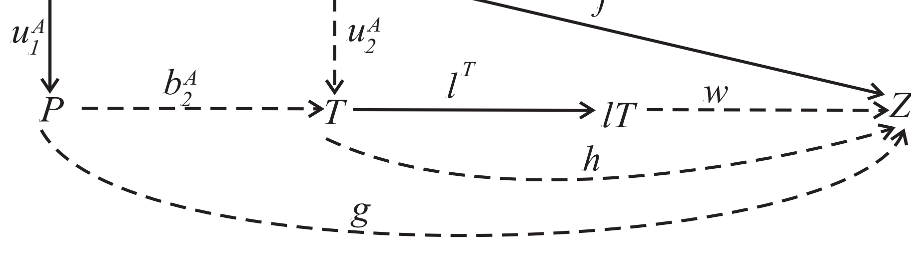
pour un w. L'unicité de w qui exteint le morphisme f par u_1^A résulte du fait que u_1^A est un epi.

3. Premièrement, $t^{kA} \in |\mathcal{T}| \subset |\mathcal{K}|$. Deuxièmement, $b_1^A \in \varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$.

4. En vertu du fait que $lT \in |\mathcal{L}|$, et $l^T \cdot b_2^A \in \varepsilon\mathcal{L}$.

5. Puisque $P \in |\varphi_1(\mathcal{T})|$, et $lT = lP$, il résulte que $lT \in |\mathcal{L} \cap \varphi_1(\mathcal{T})|$. Soit $Z \in |\psi\varphi_1(\mathcal{T})|$, et $f : lA \to Z$. Ayant en vue que u_1^A est $\varphi_1(\mathcal{T})$-réplique de A, on a

$$f \cdot l^A = g \cdot u_1^A, \tag{11}$$



pour un g. Le carré (2) est cocartésien. Il résulte que

$$g = h \cdot b_2^A, \tag{12}$$

$$f = h \cdot u_2^A \tag{13}$$

pour un h. Mais $Z \in |\psi\varphi_1(\mathcal{T})| \subset |\mathcal{L}|$, donc

$$h = w \cdot l^T. \tag{14}$$

pour un w.

6. Cela résulte de p.6.□

4.2^0. Examinons la situation duale.

Le cas $\mathcal{V} \in \mathbb{K}(\mathcal{L})$.

Soit $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $k^A : kA \to A$, $l^A : A \to lA$ et $v^{lA} : vlA \to lA$ corépliques et répliques des objets correspondants. Plus loin,

$$l^A \cdot u_1^A = v^{lA} \cdot b_1^A, \tag{1}$$

$$k^A \cdot u_2^A = u_1^A \cdot b_2^A \tag{2}$$

les carrés cocartésiens construits sur les morphismes l^A, v^{lA} et k^A, u_1^A, et k^T $\mathcal{K}$-coréplique de T.

$$\begin{tikzcd}
kT \arrow[r, "k^T"] & T \arrow[r, dashed, "b_2^A"] \arrow[d, dashed, "u_2^A"] & P \arrow[r, "b_1^A"] \arrow[d, dashed, "u_1^A"] & vlA \arrow[d, dashed, "v^{lA}"] \\
 & kA \arrow[r, dashed, "k^A"] & A \arrow[r, dashed, "l^A"] & lA
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME. *Sont vraies les affirmations suivantes:*

1. $v^{lA} : vlA \to lA$ *est* $\overline{\varphi}(\mathcal{V})$*-coréplique de* lA.
2. $u_1^A : P \to A$ *est* $\overline{\varphi}(\mathcal{V})$*-coréplique de* A.
3. $b_1^A : P \to vlA$ *est* $\mathcal{L}$*-réplique de* P.
4. $b_2^A \cdot k^T : kT \to P$ *est* $\mathcal{K}$*-coréplique de* P.
5. $u_2^A \cdot k^T : kT \to kA$ *est* $\overline{\psi_1}\overline{\varphi}(\mathcal{V})$*-coréplique de* kA.
6. $k^A \cdot u_2^A \cdot k^T : kT \to A$ *est* $\overline{\psi_1}\overline{\varphi}(\mathcal{V})$*-coréplique de* lA.

4.3. Le cas $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Soit $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $k^A : kA \to A$, $l^A : A \to lA$ $\mathcal{K}$-coréplique et $\mathcal{L}$-réplique de A, mais $r^A : A \to rA$, $k^{rA} : krA \to rA$ et $l^{rA} : rA \to lrA$ $\mathcal{R}$-réplique, $\mathcal{L}$-réplique et $\mathcal{K}$-coréplique des objets correspondants. Alors

$$r^A \cdot k^A = k^{rA} \cdot k(r^A), \tag{1}$$

$$l^{rA} \cdot r^A = l(r^A) \cdot l^A \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "k^A"] \arrow[d, "k(r^A)"] & A \arrow[r, "l^A"] \arrow[d, "r^A"] & lA \arrow[d, "l(r^A)"] \\
krA \arrow[r, "k^{rA}"] & rA \arrow[r, "l^{rA}"] & lrA
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME. *Sont vraies les affirmations suivantes:*

1. $k(r^A) : kA \to krA$ *est* $\psi_1(\mathcal{R})$*-réplique de* kA.
2. $l(r^A) : lA \to lrA$ *est* $\psi(\mathcal{R})$*-réplique de* lA.
3. $l(r^A) \cdot l^A : A \to lrA$ *est* $\psi(\mathcal{R})$*-réplique de* A.

Démonstration. 1. Puisque $k^{rA} \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$, et $rA \in |\mathcal{R}|$, il résulte que $krA \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{R}| = |\psi_1(\mathcal{R})|$. Vérifions que $k(r^A) : kA \to krA$ est $\psi_1(\mathcal{R})$-réplique de kA. Soit $Z \in |\mathcal{K} \cap \mathcal{R}| = |\psi_1(\mathcal{R})|$ et $f : kA \to Z$. Alors $lZ \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$. Donc

$$l^Z \cdot f = g \cdot l^A \cdot k^A \tag{3}$$

pour un g, et

$$g \cdot l^A = u \cdot r^A \tag{4}$$

pour un u. Plus loin, $l^Z \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$, donc

$$u \cdot k^{rA} = l^Z \cdot v \tag{5}$$

pour un v. On vérifie facilement que

$$f = v \cdot k(r^A), \tag{6}$$

et de l'égalité (1) il résulte que $k(r^A) \in \mathcal{E}pi$, puisque $r^A \cdot k^A \in \mathcal{E}pi$ et $k^{rA} \in \mathcal{M}_u$.

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "k^A"] \arrow[d, "k(r^A)"] \arrow[dd, dashed, bend right, "f"'] & A \arrow[r, "l^A"] \arrow[d, "r^A"] & lA \arrow[d, "l(r^A)"'] \arrow[ddl, dashed, bend left, "g"] \\
krA \arrow[r, "k^{rA}"] \arrow[d, dashed, "v"] & rA \arrow[r, "l^{rA}"] \arrow[d, dashed, "u"] & lrA \\
Z \arrow[r, "l^Z"] & lZ &
\end{tikzcd}$$

2. Premièrement, $lrA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| = |\varphi(\mathcal{R})|$, et de l'égalité (2) il résulte que $l(r^A) \in \mathcal{E}pi$. On vérifie facilement que $\varphi(\mathcal{R})$-réplique de lA.

3. Il résulte de p.2.□

4.3^0. **Le cas $\mathcal{H} \in \mathbb{K}_f^s(\mu\mathcal{K})$.**

Soit $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $k^A : kA \to A$, $l^A : A \to lA$ $\mathcal{K}$-coréplique et $\mathcal{L}$-réplique de A, et $h^A : hA \to A$, $k^{hA} : khA \to hA$ et $l^{hA} : lA \to lhA$ sont les répliques et les corépliques des objets correspondants. Alors

$$l^A \cdot h^A = l(h^A) \cdot l^{hA}, \tag{1}$$

$$h^A \cdot k^{hA} = k^A \cdot k(h^A). \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
khA \arrow[r, "k^{hA}"] \arrow[d, "k(h^A)"] & hA \arrow[r, "l^{hA}"] \arrow[d, "h^A"] & lhA \arrow[d, "l(h^A)"] \\
kA \arrow[r, "k^A"] & A \arrow[r, "l^A"] & lA
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME. *Sont vraies les affirmations suivantes:*

1. $l(h^A) : lhA \to lA$ *est* $\varphi(\mathcal{H})$*-coréplique de* lA.
2. $k(h^A) : khA \to kA$ *est* $\overline{\psi_1}(\mathcal{H})$*-coréplique de* kA.
3. $k^A \cdot k(h^A) : khA \to A$ *est* $\overline{\psi_1}(\mathcal{H})$*-coréplique de* A.

4.4. Le cas $\mathcal{H} \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$. Soit $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $l^A : A \to lA$ et $h^{lA} : lA \to hlA$ $\mathcal{L}$- et $\mathcal{H}$-répliques, et $k^A : kA \to A$, et $k^{hlA} : khlA \to hlA$ $\mathcal{K}$-corépliques des objet correspondants. Alors

$$h^{lA} \cdot l^A \cdot k^A = k^{hlA} \cdot k(h^{lA}). \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "k^A"] \arrow[d, dashed, "k(h^{lA})"'] & A \arrow[r, "l^A"] \arrow[d, dashed, "u^A"] & lA \arrow[d, "h^{lA}"] \\
khlA \arrow[r, dashed, "b_1^A"] \arrow[rr, bend right, "k^{hlA}"'] & P \arrow[r, dashed, "b_2^A"] & hlA
\end{tikzcd}$$

Plus loin, soit

$$b_1^A \cdot k(h^{lA}) = u^A \cdot k^A \tag{2}$$

le carré cocartésien construit sur les morphismes k^A et $k(h^{lA})$. Alors

$$k^{hlA} = b_2^A \cdot b_1^A, \tag{3}$$

$$h^{lA} \cdot l^A = b_2^A \cdot u^A. \tag{4}$$

pour un b_2^A.

THÉORÈME. *Sont vraies les affirmations suivantes:*

1. $k(h^{lA}) : kA \to khlA$ *est* $\psi_1\varphi(\mathcal{H})$*-réplique de* kA.
2. $u^A : A \to P$ *est* $\varphi(\mathcal{H})$*-réplique de* A.

Démonstration. 1. Puisque $k^{hlA} \in \mu\mathcal{K}$, et $hlA \in |\mathcal{H}|$, il résulte que $khlA \in |\mathcal{K} \cap \varphi(\mathcal{H})| = |\psi_1\varphi(\mathcal{H})|$. Soit $B \in |\psi_1\varphi(\mathcal{H})|$ et $f : kA \to B$. Démontrons que f s'exteint par $k(h^{lA})$. Soit $l^B : B \to lB$ $\mathcal{L}$-réplique de B. Puisque $l^A \cdot k^A$ est $\mathcal{L}$-réplique de l'objet kA, on a

$$l^B \cdot f = g \cdot l^A \cdot k^A \tag{5}$$

pour un g. On a $B \in |\varphi(\mathcal{H})|$, donc $lB \in |\mathcal{L} \cap \varphi(\mathcal{H})| = |\mathcal{H}|$. Ainsi le morphisme g s'exteint par h^{lA}:

$$g = v \cdot h^{lA} \tag{6}$$

pour un v. Donc, $l^B \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$, et $khlA \in |\mathcal{K}|$. Donc

$$v \cdot b_2 \cdot b_1 = l^B \cdot w \tag{7}$$

pour un w. Des formules (7), (2), (4), (6), (5) nous avons

$$l^B \cdot w \cdot k(h^{lA}) = v \cdot b_2 \cdot b_1 \cdot k(h^{lA}) = v \cdot b_2 \cdot u^A \cdot k^A = v \cdot h^{lA} \cdot l^A \cdot k^A = g \cdot l^A \cdot k^A = l^B \cdot f,$$

i.e

$$l^B \cdot w \cdot k(h^{lA}) = l^B \cdot f, \tag{8}$$

qui nous mène à l'égalité

$$w \cdot k(h^{lA}) = f. \tag{9}$$

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "k^A"] \arrow[d, dashed, "k(h^{lA})"'] \arrow[dd, bend right, "f"'] & A \arrow[r, "l^A"] \arrow[d, dashed, "u^A"] & lA \arrow[d, "h^{lA}"] \arrow[ddl, dashed, bend left, "g"] \\
khlA \arrow[r, dashed, "b_1"] \arrow[d, dashed, "w"] & uA \arrow[r, dashed, "b_2"] & hlA \arrow[dl, dashed, "v"] \\
B \arrow[r, "l^B"] & lB &
\end{tikzcd}$$

Vérifions que $k(h^{lA})$ est un epi. De l'égalité (1) $k^{hlA} \cdot k(h^{lA}) \in \mathcal{E}pi$, et $k^{hlA} \in \mathcal{M}_u$. Puisque la classe $\mathcal{E}pi$, est $\mathcal{M}_u$-héréditaire ([4], LEMME 2.6), il résulte que $k(h^{lA}) \in \mathcal{E}pi$.

2. De l'égalité (3) il résulte que $b_2^A \in \varepsilon\mathcal{L}$. Donc $P \in |\varphi(\mathcal{H})|$. De l'égalité (2) déduisons que $u^A \in \mathcal{E}pi$. Soit maintenant $B \in |\varphi(\mathcal{H})|$, et $f : A \to B$.

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[r, "k^A"] \arrow[d, "k(h^{lA})"'] & A \arrow[r, "l^A"] \arrow[d, dashed, "u^A"] \arrow[dd, dashed, bend right, "f"'] & lA \arrow[d, "h^{lA}"] \arrow[dd, dashed, bend left, "l(f)"] \\
khlA \arrow[r, "b_1^A"] \arrow[dr, dashed, "v"'] & P \arrow[r, "b_2^A"] \arrow[d, dashed, "w"] & hlA \arrow[d, dashed, "g"] \\
 & B \arrow[r, "l^B"] & lB
\end{tikzcd}$$

Alors

$$l^B \cdot f = l(f) \cdot l^A. \tag{10}$$

Puisque $B \in |\varphi(\mathcal{H})|$, il résulte que $lB \in |\varphi(\mathcal{H})|$. Donc

$$l(f) = g \cdot h^{lA} \tag{11}$$

pour un g. Plus loin, $l^B \in \varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$, et $khlA \in |\mathcal{K}|$. Ainsi

$$g \cdot b_2^A \cdot b_1^A = l^B \cdot v \tag{12}$$

pour un v. On vérifie facilement l'égalité

$$l^B \cdot v \cdot k(h^{lA}) = l^B \cdot f \cdot k^A, \tag{13}$$

i.e.

$$v \cdot k(h^{lA}) = f \cdot k^A. \tag{14}$$

En tenant compte que (2) est un carré cocartésien, concluons que

$$v = w \cdot b_1^A, \tag{15}$$

$$f = w \cdot u^A \tag{16}$$

pour un w. L'égalité (16) démontre l'affirmation.$\square$

4.4^0. **Le cas $\mathcal{T} \in \mathbb{K}(\mathcal{K})$.** Soit $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $k^A : kA \to A$ et $t^{kA} : tkA \to kA$ $\mathcal{K}$ et $\mathcal{T}$-corépliques, et $l^A : A \to lA$, et $l^{tkA} : tkA \to ltkA$ $\mathcal{L}$-répliques des objets correspondants. Alors

$$l^A \cdot k^A \cdot t^{kA} = l(t^{kA}) \cdot l^{tkA}. \tag{1}$$

Plus loin, soit

$$l^A \cdot u^A = l(t^{kA}) \cdot b_1^A \tag{2}$$

le carré cocartésien construit sur les morphismes l^A et $l(t^{kA})$. Alors

$$l^{tkA} = b_1^A \cdot b_2^A, \tag{3}$$

$$k^A \cdot t^{kA} = u^A \cdot b_2^A \tag{4}$$

pour un b_2^A.

$$\begin{tikzcd}
tkA \arrow[r, dashed, "b_2^A"] \arrow[rr, bend left, "l^{tkA}"] \arrow[d, "t^{kA}"'] & P \arrow[r, dashed, "b_1^A"] \arrow[d, dashed, "u^A"] & ltkA \arrow[d, "l(t^{kA})"] \\
kA \arrow[r, "k^A"] & A \arrow[r, "l^A"] & lA
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME. *Sont vraies les affirmations suivantes:*

1. $l(t^{kA}) : ltkA \to lA$ *est* $\overline{\psi}\overline{\varphi_1}(\mathcal{T})$*-coréplique de* lA.
2. $u^A : P \to A$ *est* $\overline{\varphi_1}(\mathcal{T})$*-coréplique de* A.

4.5. COROLLAIRE. 1. *Soit* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *et* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$, *mais* $\mathcal{T} = \mathcal{K} \cap \mathcal{R}$ *et* $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. *Alors:*

1. $r \cdot k = t \cdot k$.
2. $l \cdot r = h$.
3. $h \cdot l = h$.

5. Foncteurs commutatifs

5.1. On examinera deux foncteurs t_1, t_2 tous les deux coreflecteurs, tous les deux reflecteurs, ou l'un coreflecteur et l'autre reflecteur. Dans la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ $t_1t_2A \sim t_2t_1A$ pour tout $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, alors on peut facilement vérifier que les foncteurs $t_1 \cdot t_2$ et $t_2 \cdot t_1$ sont isomorphes.

5.2. THÉORÈME. *Soit* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *et* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. *Alors les foncteurs coreflecteur* $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ *et celui reflecteur* $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *commutent:* $k \cdot r = r \cdot k$.

Démonstration. Revenons au THÉORÈME 4.2. On a $rA = P$ et $kP = tkA$, et $rkA = tkA$. Ainsi pour tout $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ $rkA = krA = tkA$. $\square$

5.3. THÉORÈME. *Soit* $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$ *et* $r(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$. *Alors les foncteurs* l *et* r *commutent:* $l \cdot r = r \cdot l$.

Démonstration. Soit $A \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$, $l^A : A \to lA$ et $r^A : A \to rA$ $\mathcal{L}$- et $\mathcal{R}$-réplique de A. Examinons le carré cocartésien

$$b \cdot r^A = u \cdot l^A \tag{1}$$

construit sur les morphismes r^A et l^A. Alors $b \in \varepsilon\mathcal{L}$. Donc $T \in |\mathcal{R}|$. Ainsi $u \in \varepsilon\mathcal{R}$, mais $T \in |\mathcal{R}|$, il résulte que u est $\mathcal{R}$-réplique de lA. Ainsi $T \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}|$ et $b \in \varepsilon\mathcal{L}$. Donc b est $\mathcal{L}$-réplique de rA et $lrA = rlA$. $\square$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "l^A"] \arrow[d, "r^A"'] & lA \arrow[d, dashed, "u"] \\
rA & T=rlA=lrA \arrow[l, dashed, "b"']
\end{tikzcd}$$

5.4. THÉORÈME. *Soit $\mathcal{L}$ souscatégorie fermée par rapport aux extensions: $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p)$-facteurobjets et $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Examinons les conditions suivantes:*

1. $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{R} \vee \Gamma_0)$, *où $\mathcal{R} \vee \Gamma_0$ est le suprême dans la latice $\mathbb{R}$ des éléments $\mathcal{R}$ et Γ_0-souscatégorie des espaces complets.*

2. $\mathcal{L} \cap \Gamma_0 \subset \mathcal{R}$.

3. $r(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$.

Alors $1 \Leftrightarrow 2 \Rightarrow 3$.

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$. En vertu du THÉORÈME 2.8. $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L} \cap (\mathcal{R} \vee \Gamma_0)$. Ainsi $\mathcal{L} \cap \Gamma_0 \subset \mathcal{L} \cap (\mathcal{R} \vee \Gamma_0) = \mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$.

$2 \Rightarrow 1$. $\mathcal{R} \subset \mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{R} \vee \Gamma_0)$. Evidemment.

$\mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{R} \vee \Gamma_0) \subset \mathcal{R}$. Soit $A \in |\mathcal{L} *_{sr} (\mathcal{R} \vee \Gamma_0)|$. Alors $lA \in |\mathcal{R} \vee \Gamma_0|$. Examinons $r^{lA} : lA \to rlA$ et $g_0^{lA} : lA \to g_0 lA$ $\mathcal{R}$- et Γ_0-réplique de lA, mais $\pi^{rlA} : rlA \to \pi A$ et $\pi^{g_0 lA} : g_0 lA \to \pi A$ Γ_0-réplique des objets correspondants. Alors

$$\pi^{g_0 lA} \cdot g_0^{lA} = \pi^{rlA} \cdot r^{lA}. \tag{1}$$

Soit

$$\pi^{g_0 lA} \cdot v = \pi^{rlA} \cdot w. \tag{2}$$

le carré cartésien construit sur les morphismes $\pi^{g_0 lA}$ et π^{rlA}. Alors

$$g_0^{lA} = v \cdot g_1^{lA}, \tag{3}$$

$$r^{lA} = w \cdot g_1^{lA}, \tag{4}$$

pour un $g_1^{lA} : lA \to g_1 lA$. On vérifie facilement que $g_1 lA$ est $(\mathcal{R} \vee \Gamma_0)$-réplique des lA, mais v est Γ_0-réplique de g_1^{lA}. Puisque $lA \in |\mathcal{R} \vee \Gamma_0|$, il résulte que $g_1^{lA} \in \mathcal{I}so$. Plus loin, $g_0 lA \in |\mathcal{L} \cap \Gamma_0| \subset |\mathcal{R}|$. Donc $w \in \mathcal{I}so$. Ainsi $g_1 lA \in |\mathcal{R}|$, c'est-à-dire $lA \in |\mathcal{R}|$. En vertu de l'hipothèse que $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, on déduit que $A \in |\mathcal{R}|$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "l^A"] & lA \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, dashed, "g_1^{lA}"] \arrow[dd, "g_0^{lA}"'] & & rlA \arrow[dd, "\pi^{rlA}"] \\
& & g_1 lA \arrow[ur, dashed, "w"] \arrow[dl, dashed, "v"'] & \\
& g_0 lA \arrow[rr, "\pi^{g_0 lA}"] & & \pi A
\end{tikzcd}$$

$2 \Rightarrow 3$. Soit $A \in |\mathcal{L}|$, mais $r^A : A \to rA$ et $g_0^A : A \to g_0 A$ $\mathcal{R}$- et Γ_0-réplique de A. Alors $g_0 A \in |\mathcal{L} \cap \Gamma_0| \subset |\mathcal{R}|$. Donc

$$g_0^A = f \cdot r^A \tag{5}$$

pour un f. De l'égalité écrite il résulte que $r^A \in \mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p$. Donc $rA \in |\mathcal{L}|$ aussi.□

5.5. Une souscatégorie $\mathcal{L}$ est c-reflective, si et seulement si elle est $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ et $l(\mathcal{M}_p) \subset \mathcal{M}_p$. Ainsi toute catégorie c-reflective est fermée par rapport aux extensions: $(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_p)$-facteurobjets. La souscatégorie $\mathcal{N}$ des espaces nucléaires n'est pas c-reflective, mais elle est fermée par rapport aux extensions.

Si $\mathcal{L}$ est une souscatégorie $\mathcal{E}_u$-reflective ($\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$), alors $\Pi \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Ainsi $\mathcal{S}$ est l'unique souscatégorie c-reflective pour laquelle $\Pi = \mathcal{S} \cap \Gamma_0$.

COROLLAIRE. 1. *Soit* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *et* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. *Sont vraies les affirmations suivantes:*

a) *Les foncteurs* $k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$ *et* $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *commutent:* $k \cdot r = r \cdot k$.

b)*Si* $\mathcal{L} \cap \Gamma_0 \subset \mathcal{R}$, *alors les foncteurs* $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ *et* r *commutent:* $l \cdot r = r \cdot l$.

2. *Soit* $\widetilde{\mathcal{M}}$ *la souscatégorie des espaces à topologie Mackey et* $\mathcal{S}$ *des espaces à topologie faible, mais* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$. *Alors*

a)*Les foncteurs* $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \widetilde{\mathcal{M}}$ *et* $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ *commutent:* $m \cdot r = r \cdot m$.

b)*Les foncteurs* $s : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}$ *et* r *commutent:* $s \cdot r = r \cdot s$.

6. Exemples

6.1. Examinons la souscatégorie Π des espaces complets à topologie faible, et $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$.

PROPOSITION. 1. $\Pi \in \mathbb{R}(\mathcal{L})$.

2. $\Pi \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

3. $\Pi \in \mathbb{R}(\mathcal{K})$.

4. Les applications φ, ψ, φ_1 et ψ_1 transforment l'élément Π en lui-même.

Démonstration. 1. La souscatégorie Π est fermée par rapport aux produits et aux sousespaces fermés (voir [14]).

2. Puisque $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$, il résulte que $\varepsilon\mathcal{L} \subset \varepsilon\mathcal{S} = \mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}_u$. En vertu de la description de la classe $\mathcal{M}_u$ (voir [4]), $\Pi \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

3. On a $\Pi \subset \widetilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$.

4. Evidemment.

6.2. La souscatégorie $s\mathcal{R}$ des espaces semi-reflexifs est une souscatégorie S-semi-reflexive, où S est une souscatégorie des espaces à topologie faible (voir [21], cap. IV, Proposition 5.5).

PROPOSITION. Sont vraies les affirmations suivantes:

1. $s\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{S})$.

2. $s\mathcal{R} = \mathcal{S} *_{sr} q\Gamma_0$, où $q\Gamma_0$ est une souscatégorie des espaces quasicomplets.

3. $\psi(s\mathcal{R}) = \widetilde{\mathcal{M}} \cap s\mathcal{R}$ est une souscatégorie des espaces quasicomplets à topologie Mackey.

4. $\psi(s\mathcal{R}) = \mathcal{S} \cap \mathcal{R}$ est une souscatégorie des espaces quasicomplets à topologie faible.

5. Les foncteurs $m : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \widetilde{\mathcal{M}}$ et $s_r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to s\mathcal{R}$ commutent: $m \cdot s_r = s_r \cdot m$.

6. Les foncteurs $s : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}$ et s_r commutent: $s \cdot s_r = s_r \cdot s$.

6.3. Dans les ouvrages [24] et [19], on a examiné les espaces localement complets, dont la souscatégorie sera notée par $l\Gamma_0$. Avec les notations ci-dessus, on a

PROPOSITION. 1. $l\Gamma_0 \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$.

2. $l\Gamma_0 = \mathcal{S} *_{sr} l\Gamma_0 = \mathcal{S} *_{sr} (\mathcal{S} \cap l\Gamma_0)$.

3. $\psi_1(l\Gamma_0) = \widetilde{\mathcal{M}} \cap l\Gamma_0$ est la souscatégorie des espaces localement complets à topologie Mackey.

4. $\psi(l\Gamma_0) = \mathcal{S} \cap l\Gamma_0$ est la souscatégorie des espaces localement complets à topologie faible.

5. Les foncteurs m et $g_l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to l\Gamma_0$ commutent: $m \cdot g_l = g_l \cdot m$.

6. Les foncteurs s et g_l commutent: $s \cdot g_l = g_l \cdot s$.

6.4. La souscatégorie $\mathcal{S}h$ des espaces Schwartz (voir [14]) est c-reflective (voir [2]). Notons par $\mathcal{C}h$ la souscatégorie conjuguée de la souscatégorie $\mathcal{S}h$ et les foncteurs correspondents $c_h : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{C}h$ et $s_h : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{S}h$. Concernant la souscatégorie $\mathcal{C}h$(voir [13]). Dans le même ouvrage [2] sont définis les espaces inductivement semi-reflexifs dont la souscatégorie sera notée par $i\mathcal{R}$ avec le foncteurs reflecteur $i_r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to i\mathcal{R}$. A partir des résultats exposés dans cet-ouvrage-là, on peut écrire

$$i\mathcal{R} = \mathcal{S}h *_{sr} \Gamma_0.$$

PROPOSITION. 1. Les foncteurs c_h et i_r commutent: $c_h \cdot i_r = i_r \cdot c_h$.

2. Les foncteurs s_h et i_r commutent: $s_h \cdot i_r = i_r \cdot s_h$.

Références

1. Adàmek J., Herrlich H., Strecker G. S. Abstract and concrete categories. Boston, 2005.
2. Berezansky J.A. Les espaces inductivment reflexifs localement convexes. Doklady Ak. Nauk. SSSR, 182-1, 1966. p. 20-22 (en russe).
3. Botnaru D. Couples des souscatégories conjugées. Uspehi Math. Nauk., XXXI-3(189), 1976. p. 203-204 (en russe).
4. Botnaru D. Structures bicatégorielles complementaires. ROMAI J. 5-2(2009), p. 5-27.
5. Botnaru D., Cerbu O. Semireflexif product of two subcategories. Proc. Sixth Congress of Romanian Math. Bucharest, 1(2007). p. 5-19.
6. Botnaru D., Gysin V.B. Monomorphismes stables de la catégorie des espaces localement convexes. Bulletin. Acad. Sc. R.S.S.Moldova., 1(1973). p. 3-7 (en russe).
7. Brudovsky B.S. Sur k- et c-reflexivité des espaces localement convexes. Lietuvos Math. Bulletin, VII-1(1967). p. 17-21 (en russe).
8. Brudovsky B.S. Applications du type s des espaces localement convexes. Dokl. Ak. Nauk SSSR, 180-1(1968). p. 15-17 (en russe).
9. Bouneaev M.M. Loi exponentielle pour quelques souscatégories de la catégorie des espaces localement convexes. Func. an. Mejvouz. sb., Oulianovsk, 8(1977). p. 40-44 (en russe).
10. Bouneaev M.M. Sur le théorème des graphes fermés, Func. an. Mejvouz. sb., Oulianovsk, 19(1982). p. 26-34 (en russe).

11. Bouneaev M.M. C-ferméture dans les espaces localement convexes et le théorème du graphe fermé. Izvestia VUZ, Seria Matematica, 10(1990). p. 58-61 (en russe).
12. Dazord J., Jourlin U. Sur quelques classes des espaces localement convexes. Publ. Dep. Math., Lyon, 8-2(1971). p. 39-69.
13. Gheyler V.A., Ghisin V.B. Dualité généralisée pour les espaces localement convexes. Func. an., Mejvouz. sb., Oulianovsk, 11(1978). p. 41-50 (en russe).
14. Grothendieck A. Topological vector spaces. Gordon and Breach, New York London Paris, 1973.
15. Martineau A. Sur une propriété universelle de l'espace de distributions de M. Schwartz. C. R. Acad. Sci. Paris, 259 (1964). p. 3162-3164.
16. Pietsch A. Nukleare local konvex räume. Academie-Verlad, Berlin, 1965.
17. Radenović S. Some properties of c-reflexive locally convex spaces. Univ. Belgrad Publ. Electrotehn. Fak. Ser. Mat., 18 (2007). p. 52-58.
18. Radenović S., Kadelburg Z. Three-spaces-problem for inductively (semi)-reflexive locally convex spaces. Pub. de l'Institut Math., 77(91), 2005. p. 1-6.
19. Raïkov D.A. Loi exponentielle pour les espaces des applications linéaires continues Mat.sb.,7(109), 2(1965). p. 279-302 (en russe).
20. Robertson A. P., Robertson W. J. Topological vector spaces. Cambridge University Press, 1964.
21. Schaefer H.H. Topological vector spaces. Macmillan Company, New York, 1966.
22. Sekevanov V.S. Espaces localement convexes $\mathcal{B}$-inductifs reflexifs. Func. an. Mejvouz. sb., Oulianovsk, 14(1980). p. 128-131 (en russe).
23. Sekevanov V.S. Sur les deux généralités de le reflexivité des espaces localement convexes. Math. Zametki, 35-3(1984). p. 415-424 (en russe).
24. Slawikowski W. On continuity of invers operators. Bull. Amer. Math. Soc., 67-5(1961). p. 467-470.