PRINCIPIILE METODOLOGICE ALE CONCEPTULUI DE COORDONATE

Dorin AFANAS, conf. univ., dr.
Mitrofan CIOBAN, academician, prof. univ., dr. hab.
Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. În prezenta lucrare sunt cercetate principiile metodologice ale conceptului de coordonate şi este alcătuită din scurt istoric; principiile liniar, algebric şi funcțional; aplicații.

Cuvinte cheie: sistem de coordonate, principiu liniar, principiu algebric, principiu funcțional, metoda coordonatelor.

METHODOLOGICAL PRINCIPLES OF THE COORDINATE CONCEPT

Abstract. In the present paper are studied the methodological principles of the concept of coordinates and it is structured in: short history; linear, algebraic and functional principles; applications.

Keywords: coordinate system, linear principle, algebraic principle, functional principle, coordinate method.

1. Scurt istoric

Originile matematicii şi, în particular, ale geometriei sunt strâns legate de conceptele de număr, mărime şi formă, care au făcut parte din viața cotidiană a societăților preistorice. La baza cunoștințelor geometrice au fost anumite principii empirice, determinate de concepte: ca distanța, lungimea, unghiul, aria, volumul. Thales din Milet (624 - 546 î.H.) a adus geometria în Grecia antică şi a fost primul care a propus deducția matematică pentru a obține noi cunoştințe geometrice. Thales a contribuit la dezvoltarea matematicii, astronomiei, filozofiei și a geografiei, fiind considerat părintele ştiințelor. Geometria analitică reprezintă o modalitate de abordare a geometriei cu ajutorul algebrei. Pentru aceasta spațiul cercetat se dotează cu sisteme de coordonate carteziene [2, 3, 4, 6, 7].

Meritul principal în crearea conceptului metodei coordonatelor îi aparține matematicianului francez René Descartes (1596 – 1650). Până în zilele noastre a ajuns următoarea istorie care i-a sugerat descoperirea acestei metode. Ocupând în teatru un anumit loc, conform biletului cumpărat, noi nici nu bănuim cine şi când a propus această metodă de numerotație a fotoliilor după rânduri şi locuri. Idee i-a venit vestitului filosof şi matematician Descartes – în cinstea cui şi sunt numite coordonatele dreptunghiulare. Vizitând teatrele din Paris, el rămânea uimit de învălmăşeala ce avea loc în sală la ocuparea fotoliilor de către spectatori. Sistemul său de numerație, în care fiecare fotoliu primea numărul de rând şi de ordine de la margine, a înlăturat această învălmăşeală şi a produs furori în societatea de elită din Paris. Descartes a descris ştiințific pentru prima dată sistemul dreptunghiular de coordonate în lucrarea „Cugetări asupra metodei" (1637).

De aceea sistemul dreptunghiular/rectangular de coordonate se mai numeşte *Sistemul Cartezian de coordonate*. În lucrarea sa „Geometria” (1637), unde s-a descoperit legătura dintre algebră şi geometrie, Descartes a introdus primele noțiuni de *mărime variabilă* şi *funcţie*. Anume în sistemul cartezian de coordonate şi-au găsit interpretarea reală numerele negative. Un aport esențial la dezvoltarea metodei coordonatelor a fost adus şi de către Piere Fermat (1601-1665), ale cărui lucrări au fost publicate însă după moartea sa. Descartes şi Fermat aplicau metoda coordonatelor numai în plan. În spațiu, această metodă a fost aplicată pentru prima dată de Leonard Euler (1707 – 1783) în secolul al XVIII-lea. Aceste lucrări au avut influențe considerabile asupra dezvoltării geometriei analitice, a analizei matematice şi cartografiei. Ele au permis să „măsurăm armonia cu ajutorul algebrei”.

Ideea de a reprezenta numerele sub formă de puncte, iar punctelor să le pună valori numerice a apărut încă în antichitate în legătură cu dezvoltarea astronomiei, geografiei și a picturii. Primele aplicații ale coordonatelor sunt legate de astronomie şi geografie, de necesitatea de a determina poziția corpurilor cereşti de pe bolta cerească şi a anumitor puncte de pe suprafața Pământului, de a întocmi calendarele și hărțile geografice. Urmele aplicației coordonatelor dreptunghiulare au fost găsite pe pereții uneia din camerele funerare din Egiptul Antic. În cartografie conceptul de sistem de coordonate a fost implementat de către Thales. Anaximandru (Anaximandros) din Milet (610 – 546 î.H.), matematician şi filozof grec din şcoala ionică, este considerat primul alcătuitor al hărții geografice. El a descris, destul de exact pentru acele timpuri, latitudinea şi longitudinea locului, utilizând proiecțiile ortogonale. Aceste idei au fost dezvoltate de Eratostene din Cyren (276 – 195 î.Hr.), matematician, poet, geograf şi astronom antic grec, fondatorul geografiei matematice. Mai mult cu 100 de ani î.H. Hipparh (sau Hipparchus, 190 – 120 î.H.) a propus paralelele şi meridianele pe harta globului Pământesc, care sunt cunoscute în zilele noastre drept coordonate geografice: latitudinea şi longitudinea notate cu numere. Faptul că $\sqrt{2}$ nu este număr rațional a adus la diferențierea algebrei de geometrie, care şi a împiedicat dezvoltarea conceptului geometric de sistem de coordonate până la lucrările lui Descartes.

2. Rolul teoretic al sistemului de coordonate

Din punct de vedere formal, sistemul cartezian de coordonate în spațiu permite ca fiecărui punct M să i se asocieze un triplet de numere (x, y, z), numite coordonatele punctului M, notate: $M = (x, y, z)$ sau $M(x, y, z)$. Această asociere satisface următoarele principii:

Principiul 1 (Unicitatea şi Existența). Coordonatele punctului se determină în mod unic.

Principul 2 (Reversibilitatea). Coordonatele determină în mod unic punctul, adică pentru orice triplet de numere (x, y, z) există un unic punct cu aceste coordonate.

Principiul 3 (Măsurabilitatea şi ordinea punctelor). Există o unitate de măsură a lungimii față de care numărul $d(A,B) = ((a - p)^2 + (b - q)^2 + (c - r)^2)^{1/2}$ este egal cu distanța dintre punctele $A = (a, b, c)$ şi $B = (p, q. r)$. Punctul M este situat între punctele A şi B, dacă şi numai dacă punctele M, A, B sunt diferite şi $d(A, M) + d(M, B) = d(A, B)$.

Principiul 4 (Coliniaritatea). Fie $A = (a, b, c)$ şi $B = (p, q, r)$ două puncte diferite. Dreapta (AB) ce trece prin punctele A şi B este formată din totalitatea punctelor $M(A, B, t) = (t(p - a) + a, t(q - b) + b, t(r - c) + c)$, $t \in \mathbf{R}$, unde $\mathbf{R}$ este totalitatea numerelor reale. Totalitatea punctelor $[A, B) = \{M(A, B, t)$: $t \in \mathbf{R}, t \geq 0\}$ este semidreapta cu originea A ce trece prin punctul B, iar $(A, B] = \{M(A, B, t)$: $t \in \mathbf{R}, t \leq 0\}$ este a doua semidreaptă cu originea A situată pe dreapta (AB). $[A, B] = [A, B) \cap (A, B] = \{M(A, B, t)$: $t \in \mathbf{R}, 0 \leq t \leq 1\}$ este segmentul cu extremitățile A şi B.

Principiul 5 (Coplanaritatea). Fie $A = (a, b, c)$, $B = (p, q, r)$ şi $C = (u, v, w)$ trei puncte necoliniare (care nu sunt situate pe o dreaptă). Atunci planul (ABC) este format din totalitatea punctelor $M = (x, y, z)$ coordonatele cărora satisfac ecuația:

$$\det \begin{bmatrix} x-a & y-b & z-c \\ p-a & q-b & r-c \\ u-a & v-b & w-c \end{bmatrix} = 0. \qquad (2.1)$$

Patru puncte A , B , C , D se numesc coplanare, dacă există un plan α ce le conține. În caz contrar, punctele sunt necoplanare.

Proprietățile numerelor reale permit să stabilim că spațiul coordonat conform principiilor enumerate mai sus satisface Axiomele lui Hibert ale spațiului Euclidian tridimensional şi viceversa: Axiomele lui Hibert ale spațiului Euclidian tridimensional permit să coordonăm spațiul Euclidian tridimensional [1, 4, 5].

3. Principiile liniar, algebric şi funcțional

La cercetarea figurilor prin metoda coordonatelor se evidențiază următoarele două probleme (vezi [2, 3, 4, 6, 7]):

1) determinarea ecuației figurii după proprietățile ei;

2) după ecuația dată a figurii de cercetat proprietățile geometrice ale ei (problema inversă).

Problemele referitoare la determinarea punctelor planului realizează ambele scopuri de cercetare a metodei coordonatelor. În cursul preuniversitar de geometrie metoda coordonatelor permite să demonstrăm şi să rezolvăm probleme mai rațional decât prin metodele geometriei sintetice.

La rezolvarea problemelor prin metoda coordonatelor poate să apară numai un obstacol geometric. Una şi aceeaşi problemă se poate interpreta analitic în mod diferit, în funcție de sistemul de coordonate ales. Alegerea unui sistem de coordonate convenabil ne va permite numai experiență suficientă.

Pentru a rezolva probleme de tipul întâi şi doi prin metoda coordonatelor, este necesar de respectat următorul algoritm:

Pentru problemele de tipul întâi (probleme despre determinarea ecuației figurii date):

1. Evidențierea proprietății caracteristice a figurii date, adică evidențierea unei aşa proprietăți geometrice a ei, care satisfac numai acele puncte ale planului care îi aparțin figurii.

2. Alegerea pe plan a sistemului rectangular cartezian.

3. Scrierea proprietății caracteristice a figurii în limbajul coordonatelor.

Pentru problemele de tipul doi (probleme geometrice care se rezolvă prin metoda analitică):

1. Traducerea ecuației în limbajul analitic.

Pentru spațiul Euclidian n-dimensional E^n un sistem de coordonate cartezian rectangular generează o corespondență dintre punctele spațiului şi sistemele ordonate de n numere $(x_1; x_2; ...; x_n)$.

Această corespondență este în concordanță cu anumite principii: principiul liniar, principiul algebric şi cel funcțional.

Principiul liniar permite ca:

1. Planul $(n + 1)$-dimensional sau hiperplanul să se reprezinte printr-o ecuație liniară:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_{n+1} = 0. \tag{3.1}$$

2. Planul k-dimensional să se reprezinte printr-un sistem de $(n–k)$ ecuații liniare:

$$\begin{cases} a_{(1,1)}x_1 + a_{(1,2)}x_2 + \cdots + a_{(1,n)}x_n + a_{(1,n+1)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{(k,1)}x_1 + a_{(k,2)}x_2 + \cdots + a_{(k,n)}x_n + a_{(k,n+1)} = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

3. Dreapta ca plan unu-dimensional să se reprezinte parametric prin n-ecuații liniare:

$$\begin{cases} x_1 = a_1t + b_1, \\ x_2 = a_1t + b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n = a_nt + b_n. \end{cases} \tag{3.3}$$

Principiul algebric ne permite să reprezentăm suprafețele algebrice prin polinoame de n variabile:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_1^{m_{(1,i)}} x_2^{m_{(2,i)}} \dots x_n^{m_{(n,i)}} = 0. \tag{3.4}$$

Gradul ecuației (3.4) este numărul

$$sup\{m_{(1,i)} + m_{(2,i)} + \cdots + m_{(n,i)} : i \le k\}, \tag{3.5}$$

care reprezintă şi ordinul suprafeței algebrice. Hiperplanele sunt suprafețele de ordinul întâi cu ecuațiile (1).

Principiul funcțional ne permite să prezentăm orice suprafață printr-o ecuație implicită

$$F(x_1; x_2; ...; x_n) = 0. \qquad (3.6)$$

Curbele se prezintă prin n ecuații de un parametru:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t), \\ x_2 = f_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n = f_n(t). \end{cases} \qquad (3.7)$$

Aceste momente ne permit să studiem obiectele geometrice prin metoda vectorială, metode algebrice şi metode funcționale.

Reprezentările geometrice sunt un instrument favorabil în analiza diverselor probleme practice şi deci metoda coordonatelor împreună cu metoda reprezentărilor geometrice devin un instrument puternic în cercetarea şi rezolvarea problemelor teoretice şi practice. Prin urmare, teoria spațiilor vectoriale joacă un rol important la rezolvarea problemelor geometriei analitice.

4. Aplicații

Ne punem scopul să indicăm cum se aplică metoda coordonatelor la rezolvarea problemelor şi demonstrația teoremelor. Rezolvarea pur geometrică a acestor probleme necesită deseori construcții foarte complicate, iar metoda coordonatelor ne permite de a face acest lucru mai simplu.

Problema 1. Demonstrați teorema lui Stewart: *dacă este dat un triunghi ABC şi un punct D, situat între punctele B şi C, atunci este justă egalitatea*:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD. \qquad (4.1)$$

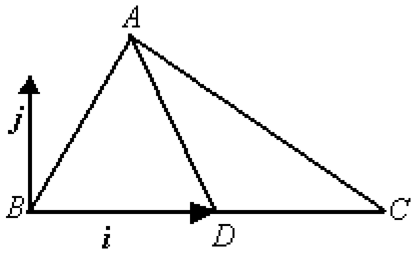

Figura 1.

Demonstrație. Considerăm un sistem rectangular cartezian de coordonate (vezi figura 1). Să notăm coordonatele punctelor A, C şi D: $A(a;\ b)$, $C(c;\ 0)$, $D(d;\ 0)$. Atunci $BC = c$ şi $BD = c - d$. Calculăm toate mărimile din egalitatea (4.1). Se obține:

$$AB^2 = a^2 + b^2,\ BC = c,\ AC^2 = (a - c)^2 + b^2,\ BD = d,$$
$$AD^2 = (a - d)^2 + b^2,\ DC = c - d.$$

Substituind aceste expresii în formula (1), obținem:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = (a^2 + $$
$$+b^2)(c - d) + ((a - c)^2 + b^2)d - ((a - d)^2 + b^2)c =$$
$$= a^2c - a^2d + b^2c - b^2d + a^2d - 2acd + c^2d +$$
$$+ b^2d - a^2c + 2adc - d^2c - b^2c =$$
$$= c^2d - d^2c = cd(c - d) = BC \cdot DC \cdot BD.$$

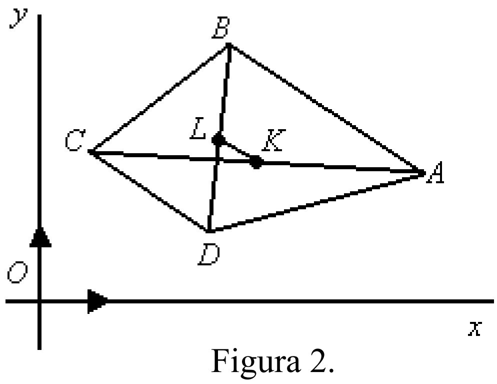

Figura 2.

Problema 2. Fie $ABCD$ un patrulater arbitrar, iar K şi L corespunzător mijlocurile diagonalelor AC şi BD. Demonstraţi teorema lui Euler:

$$(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2) -$$
$$- (AC^2 + BD^2) = 4KL^2.$$

Demonstraţie. Să considerăm patrulaterul $ABCD$ într-un sistem rectangular cartezian de coordonate (vezi figura 2).

Admitem că vârfurile patrulaterului au coordonatele: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, $D(x_4; y_4)$. Deoarece punctele K şi L sunt mijlocurile segmentelor AC şi BD, respectiv, atunci:

$$K\left(\frac{x_1+x_3}{2}; \frac{y_1+y_3}{2}\right),\ L\left(\frac{x_2+x_4}{2}; \frac{y_2+y_4}{2}\right).$$

Utilizând formula distanţei dintre două puncte, obţinem:

$$(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2) - (AC^2 + BD^2) =$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 +$$
$$+ (x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 - (x_3 - x_1)^2 - (y_3 - y_1)^2 - (x_4 - x_2)^2 - (y_4 - y_2)^2 =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 - x_1x_3 - x_2x_4) +$$
$$+ y_1^2 + + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 2(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_4 + y_4y_1 - y_1y_3 - y_2y_4).$$

Aceeaşi expresie se obţine şi pentru $4KL^2$.

Problema 3. Aflaţi mulţimea tuturor punctelor, pentru fiecare dintre care diferenţa pătratelor distanţelor până la două puncte A şi B este o mărime constantă α.

Rezolvare. Alegem sistemul dreptunghiular de coordonate, cum este indicat în figura 3. Dacă $AB = a$, atunci în sistemul dat $A(0; 0)$ şi $B(a; 0)$.

Fie $M(x; y)$ un punct arbitrar al planului. Atunci

$$AM^2 = x^2 + y^2 \text{ şi } MB^2 = (x - a)^2 + y^2.$$

Pentru ca punctul $M(x; y)$ să aparţină locului geometric de puncte căutat este necesar şi suficient ca

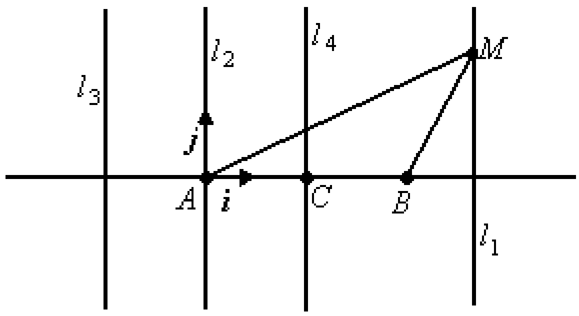

Figura 3.

$$x^2 + y^2 - ((x - a)^2 + y^2) = \alpha,$$
$$x^2 + y^2 - x^2 + 2ax - a^2 - y^2 = \alpha,$$
$$2ax = \alpha + a^2,\ x = \frac{\alpha + a^2}{2a}.$$

Această ecuaţie determină o dreaptă paralelă la axa (Oy) (perpendiculară pe AB) la distanţa $\frac{|\alpha + a^2|}{2a}$. Această dreaptă intersectă semidreapta AB, dacă $\alpha + a^2 > 0$, trece prin A, dacă $\alpha + a^2 = 0$ şi intersectează semi-dreapta complementară, dacă $\alpha + a^2 < 0$ (dreptele l_1, l_2 şi l_3).

Observație. Dacă $\alpha = 0$, atunci locul geometric de puncte constă din acele şi numai acele puncte M pentru care $AM^2 - BM^2 = 0$ sau $AM = BM$. Am obținut cunoscuta teoremă: *mulțimea tuturor punctelor egal depărtate de la două puncte A şi B este mediatoarea segmentului AB* (dreapta l_4).

Problema 4. Pe dreapta AB, ce trece prin centrul O a unui cerc, sunt depuse în ambele părți de la centru segmentele $OA = OB = 2R$, unde R este raza cercului (vezi figura 4). De demonstrat că suma pătratelor distanțelor de la orice punct al cercului până la punctele A, B este de cinci ori mai mare decât aria pătratului înscris în acest cerc.

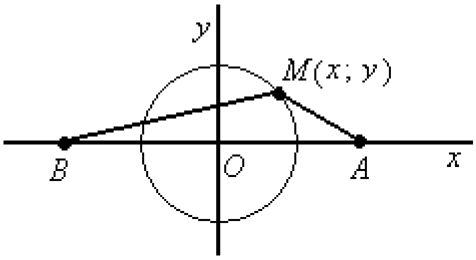

Figura 4.

Demonstrație. Introducem un sistem rectangular cartezian de coordonate, aşa cum este indicat în figura 4. Atunci: $A(2R; 0)$, $B(-2R; 0)$. Fie $M(x; y)$ un punct arbitrar al cercului, atunci

$$AM^2 = (x - 2R)^2 + y^2 \text{ şi } BM^2 = (x + 2R)^2 + y^2.$$

Prin urmare,

$$AM^2 + BM^2 = (x - 2R)^2 + y^2 + (x + 2R)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2) + 8R^2.$$

Deoarece punctul M aparține cercului, atunci $x^2 + y^2 = R^2$. Aria pătratului înscris în cerc este egală cu $2R^2$. Aşa dar,

$$AM^2 + BM^2 = 2(x^2 + y^2) + 8R^2 = 2R^2 + 8R^2 =$$
$$= 10R^2 = 5 \cdot 2R^2.$$

Problema 5. Funcția $f(t)$ este reprezentată grafic pe intervalul $t \in [0; 9]$ (vezi figura 5). Alcătuiți expresiile analitice ale ei.

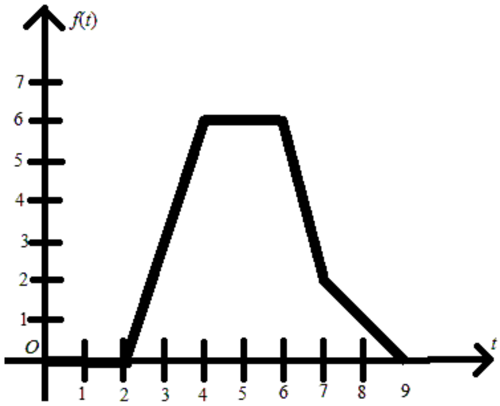

Figura 5.

Rezolvare. Graficul funcției $f(t)$ reprezentată în figura 5 poate fi notat cu segmentele de drepte $[OA]$, $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ şi $[DE]$ (vezi figura 6). Pentru a alcătui expresiile analitice ale funcției $f(t)$ este necesar de alcătuit ecuațiile segmentelor acestor drepte, utilizând formula:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Fiecare segment se va cerceta aparte.

1) Segmentul OA este dat pe intervalul $t \in [0; 2)$ şi el coincide cu axa absciselor (Ox). Deoarece axa absciselor are ecuația $y = 0$, atunci pentru segmentul OA putem scrie:

$$f(t) = 0, \text{ dacă } 0 \le t < 2.$$

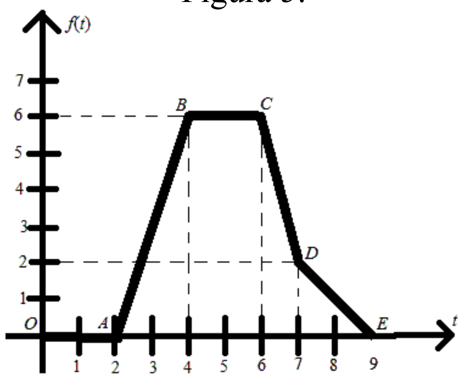

Figura 6.

2) Segmentul AB este dat pe intervalul $t \in [2; 4)$ şi, conform graficului, el trece prin punctele $A(2; 0)$ şi $B(4; 6)$. Scriem ecuaţia dreptei AB:

$$\frac{f-f_A}{f_B-f_A}=\frac{t-t_A}{t_B-t_A};\quad \frac{f-0}{6-0}=\frac{t-2}{4-2};$$

$$\frac{f}{6}=\frac{t-2}{2} \text{ sau } f=3(t-2), \text{ de unde } f=3t-6.$$

Astfel, ecuaţia segmentului AB ia forma:

$$f(t) = 3t - 6, \text{ dacă } 2 \le t < 4.$$

3) Segmentul BC este dat pe intervalul $t \in [4; 6)$ şi, conform graficului, el este paralel cu axa absciselor. Ecuaţia dreptei paralele cu axa absciselor este un caz particular al ecuaţiei dreptei cu coeficient unghiular şi are forma: $y = b$. Din figura 6 rezultă că el trece prin punctele $B(4; 6)$ şi $C(6; 6)$. De aceea ecuaţia segmentului BC are forma:

$$f(t) = 6, \text{ dacă } 4 \le t < 6.$$

4) Segmentul CD este dat pe intervalul $t \in [6; 7)$ şi trece prin punctele $C(6; 6)$ şi $D(7; 2)$. Scriem ecuaţia dreptei CD:

$$\frac{f-f_C}{f_D-f_C}=\frac{t-t_C}{t_D-t_C};\quad \frac{f-6}{2-6}=\frac{t-6}{7-6};$$

$$\frac{f-6}{-4}=\frac{t-6}{1};\ f-6=-4(t-6);$$

$$f-6=-4t+24;\ f=30-4t.$$

Prin urmare, ecuaţia segmentului CD are forma:

$$f(t) = 30 - 4t, \text{ dacă } 6 \le t < 7.$$

5) Segmentul DE este dat pe intervalul $t \in [7; 9]$ şi trece prin punctele $D(7; 2)$ şi $E(9; 0)$. Scriem ecuaţia dreptei DE:

$$\frac{f-f_D}{f_E-f_D}=\frac{t-t_D}{t_E-t_D};\quad \frac{f-2}{0-2}=\frac{t-7}{9-7};$$

$$\frac{f-2}{-2}=\frac{t-7}{2};\ f-2=-1\cdot(t-7);$$

$$f-2=-t+7;\ f=9-t.$$

Deci, ecuaţia segmentului DE primeşte forma:

$$f(t) = 9 - t, \text{ dacă } 7 \le t \le 9.$$

Cercetând aparte toate segmentele funcţiei $f(t)$, dată grafic pe intervalul $t \in [0; 9]$, scriem expresiile analitice ale ei:

$$f(t)=\begin{cases} 0, & \text{pentru} \quad 0 \le t < 2, \\ 3t-6, & \text{pentru} \quad 2 \le t < 4, \\ 6, & \text{pentru} \quad 4 \le t < 6 \\ 30-4t, & \text{pentru} \quad 6 \le t < 7, \\ 9-t, & \text{pentru} \quad 7 \le t \le 9. \end{cases}$$

Bibliografie

1. Albu A. C., Obădeanu V., Popescu I. P., Rado F., Smaranda D. Geometrie pentru perfecționarea profesorilor. Bucureşti: EDP, 1983. 138 p.
2. Calmuțchi L., Afanas D., Cioban M. Geometrie analitică în plan. Chişinău: UST, 2014. 182 p.
3. Darboux G. Principes de Géométrie Analytique. Paris: Gauthier-Villars et C[16], Editeurs, 1917. 230 p.
4. Haimovici A., Borş C. Elemente de geometrie a spațiului. Bucureşti: EDP, 1970. 180 p.
5. Miron R. Geometrie elementară. Bucureşti: EDP, 1968. 282 p.
6. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. Учебник 10-11 класс. Москва: Просвещение, 2009. 255 с.
7. Шемелова О. В., Макусева Т. Г., Бакеева Л. В. Руководство к самостоятельному решению задач по аналитической геометрии на плоскости. Санкт–Петербург: Свое издательство, 2015. 150 с.