CRITERII NOETHERIENE PENTRU UNELE ECUAȚII SINGULARE CU CONJUGARE COMPLEXĂ

Diana BÂCLEA*, conf. univ., dr.

Vasile NEAGU**, prof. univ., dr. hab.

*Universitatea de Stat din Cahul

**Universitatea de Stat din Moldova

Rezumat. În această lucrare se construieşte simbolul operatorilor integrali singulari cu conjugare complexă. Se demonstrează că simbolul este o matrice de ordin variabil: în punctele unghiulare ale conturului de integrare ordinul este egal cu patru, iar în celelalte puncte ordinul este egal cu doi. Condițiile noetheriene şi indicele operatorului se exprimă prin determinantul simbolului său.

Cuvunte cheie: operator integral singular, operator noetherian, simbol.

NOETHERIAN CRITERIA FOR SOME SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS WITH COMPLEX CONJUGATION

Abstract. In this paper we construct the symbol of singular integral operators with complex conjugation. It is proved that the symbol is a variable matrix: its order is equal to four at the corner points of the contour of integration and is equal to two in other points. The Noetherian conditions and the index of operator are expressed by the determinant of its symbol.

Keywords: singular integral operator, noetherian operator, symbol.

I. Introducere

Fie Γ un contur orientat, închis şi de tip Liapunov pe porțiuni, care împarte planul complex în domeniile F^+ şi F^- $(\infty \in F^-)$, $t_1,\ldots,t_n -$ punctele unghiulare ale conturului Γ cu unghiurile θ_k, formate în aceste puncte de tangentele laterale la Γ. În spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$ considerăm ecuația integrală singulară

$$(A\varphi)(t) = a_1(t)\varphi(t) + a_2(t)\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + a_3(t)\overline{\varphi(t)} + a_4(t)\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\varphi(t)\tau}}{\tau - t}d\tau \quad , \qquad (1)$$

unde $\rho(t) = \prod_{k=1}^{n}|t - t_k|^{\beta_k}$ $(-1 < \beta_k < p - 1)$ şi $a_j(t)$ $(j = 1,2,3,4)$ sunt funcții continue în orice punct $,t \in \Gamma$ cu excepția punctelor t_k $(k = 1,\ldots,n)$, în care există limitele finite $a(t_k \pm 0)$. În cele ce urmează este comod ca operatorul, generat de ecuația (1), să fie scris sub o altă formă. În acest scop facem următoarele notații:

$$a_1(t) + a_2(t) = a(t),\ a_1(t) - a_2(t) = b(t),$$

$$a_3(t) + a_4(t) = c(t),\ a_3(t) - a_4(t) = d(t),$$

$$(V\varphi)(t) = \ \overline{\varphi(t)}(t),\ P = (I + S)/2 \text{ şi } Q = I - P,$$

unde S este operatorul integral singular cu nucleul Cauchy,

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \quad (t \in \Gamma).$$

Cu aceste notații operatorul (1) se scrie sub forma

$$A = aP + bQ + (cP + dQ)V \ . \tag{2}$$

Operatorul A devine liniar în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$ dacă acest spațiu este considerat peste câmpul numerelor reale. Notăm acest spațiu prin $\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)$.

În cazul conturului Liapunov operatorul A a fost studiat în monografia [1]. În determinarea condițiilor noetheriene pentru operatorul (2) un rol important l-a jucat faptul că în cazul conturului de tip Liapunov operatorul $VSV + S$ este compact în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$. Aşa cum se arată în această lucrare, dacă conturul Γ are puncte unghiulare, atunci operatorul $VSV + S$ nu mai este compact şi raționamentele din lucrările menționate mai sus nu pot fi aplicate. În plus, se demonstrează că înseşi condițiile noetheriene pentru operatorul A depind şi de mărimile unghiurilor de pe conturul Γ.

În această lucrare se construieşte simbolul operatorilor integrali singulari cu conjugare complexă de forma (2). Se demonstrează că simbolul este o matrice de ordin variabil: în punctele t_k $(k = 1,...,n)$ ordinul este egal cu patru, iar în celelalte puncte acest ordin este egal cu doi. Simbolul mai depinde de coeficienții operatorului, de spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$ şi de mărimile unghiurilor de pe conturul de integrare. Condițiile noetheriene şi indicele operatorului A se exprimă prin determinantul simbolului său. Se stabilesc anumite relații dintre operatorii de forma (2) şi problemele la frontieră de tip Riemann [1-3] pentru funcții analitice.

Rezultate similare sunt obținute şi pentru operatorii $\sum_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{r} A_{jk}$, unde A_{jk} sunt operatori de forma (2).

II. Proprietăți ale operatorulul $VSV + S$

Teorema 1. *Fie Γ un contur închis de tip Liapunov. Atunci operatorul $VSV + S$ este compact în spațiul $L_p(\Gamma,\rho)$.*

Demonstrație. Notăm prin Γ_0 cercul unitate ($\Gamma_0 = \{t : |t| = 1\}$) şi prin S_0 operatorul S_{Γ_0}. Atunci

$$(VS_0V + S_0)\varphi \ = -\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\varphi(\tau)\overline{d\tau}}{\overline{\tau} - \overline{t}} + \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \ = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau \ .$$

Aşadar, dacă Γ este cercul unitate, atunci operatorul $VS_0V + S_0$ este compact în $L_p(\Gamma,\rho)$. Vom considera cazul în care Γ este orice contur Liapunov închis. Fie $v : \Gamma_0 \to \Gamma$ o aplicație care verifică condițiile: există derivata $v'(t)$ diferită de zero şi $v'(t)$ satisface condițiile lui Hölder. Notăm cu $B : (L_p(\Gamma,\rho) \to (L_p(\Gamma_0,\rho_0)$, unde

$$\rho_0(z) = \prod_{k=1}^{n}|v(z) - v(z_k)|^{\beta_k} \ (v(z_k) = t_k),$$

operatorul definit prin relația $(B\varphi)(z) = \varphi(v(z))$ ($z \in \Gamma_0$). Atunci

$$\left(BSB^{-1}-S_0\right)\varphi=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\left(\frac{\nu'(\xi)}{\nu(\xi)-\nu(z)}-\frac{1}{\xi-z}\right)\varphi(\xi)d\xi \quad . \qquad (3)$$

Aşa cum $\nu'(\xi)$ este diferită de zero şi satisface condiţiile lui Hölder, operatorul $BSB^{-1}-S_0$ are (a se vedea [4]) singularitate slabă pe $\Gamma_0\times\Gamma_0$ şi, prin urmare, este compact în spaţiul $L_p(\Gamma,\rho)$. Deoarece operatorii V şi B comută, din (3) şi din cele deja demonstrate obţinem că operatorul

$$B(VSV+S)B^{-1}-VS_0V-S_0 \qquad (4)$$

este compact în $L_p(\Gamma,\rho)$, de aici rezultă că şi $VSV+S$ de asemenea este compact în $L_p(\Gamma,\rho)$. Teorema este demonstrată.

O altă demonstraţie a acestei teoreme poate fi găsită în [1, p.36].

Să arătăm că afirmaţiile teoremei 1 sunt false dacă conturul Γ are puncte unghiulare. Să presupunem, de exemplu, că $\Gamma\supset\Gamma_1\cup\Gamma_2$, unde Γ_1 şi Γ_2 sunt segmente de dreaptă care unesc punctul $z=0$ cu $z=1$ şi, respectiv $z=0$ cu $z=i$. În punctul $z=0\in\Gamma$ conturul formează un unghi de măsură $\pi/2$. Vom arăta că în acest caz operatorul $VSV+S$ nu este compact în $L_2(\Gamma)$. Admitem, prin absurd, că $VSV+S\in\mathrm{T}(L_2(\Gamma))$. Fie X funcţia caracteristică a lui Γ_2 şi $M=\mathrm{X}(VSV+S)$. Vom arăta că $M\notin\mathrm{T}(L_2(\Gamma))$ şi, în consecinţă, vom obţine o contrazicere.

În spaţiul $L_2(\Gamma)$ să considerăm şirul $\{\varphi_n(t)\}$ de funcţii definit prin relaţiile

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}\sqrt{n}, \text{ pentru } t\in\left[0,\frac{1}{n}\right]; \\ 0, \quad \text{pentru } t\in\Gamma\setminus\left[0;\frac{1}{n}\right].\end{cases} \qquad n\in\mathrm{N}.$$

Avem $\|\varphi_n\|_{L_2(\Gamma)}=1$. Vom arăta că din şirul $\psi_n=M\varphi_n$ nu se poate extrage niciun subşir convergent. În baza definiţiei operatorului M avem

$$(M\varphi_n)(t)=\mathrm{X}(t)(VSV+S)\varphi_n=\frac{\mathrm{X}(t)\sqrt{n}}{\pi i}\int_0^{1/n}\left(\frac{1}{\tau-t}-\frac{1}{\tau-\bar{t}}\right)d\tau=$$

$$=\frac{\mathrm{X}(t)}{\pi i}\sqrt{n}\int_0^{1/n}\frac{t-\bar{t}}{(\tau-t)(\tau-\bar{t})}d\tau.$$

Prin urmare,

$$\|M\varphi_n\|^p_{L_p(\Gamma)}=\frac{n^{p/2}}{\pi^p}\int_\Gamma\left|\frac{t-\bar{t}}{(\tau-t)(\tau-\bar{t})}d\tau\right|^p|\,dt\,|=$$

$$=c_pn^{p/2}\int_0^1\left|\mathrm{arctg}\frac{1}{nt}\right|^p dt\le c_pn^{\frac{p-2}{2}}\int_0^n\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{t}\right)^p dt\le\ c_pn^{\frac{p-2}{2}}\int_0^\infty\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{t}\right)^p dt=\tilde{c}_pn^{\frac{p-2}{2}},$$

unde c_p şi $\tilde{c}_p$ sunt constante ce depind numai de p. De aici rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\|M\varphi_n\|_{L_p(\Gamma)}=0, \text{ pentru } 1<p<2.$$

Astfel, dacă şirul $\psi_n = M\varphi_n(\in L_2(\Gamma))$ ar conține un subşir convergent, atunci acest subşir ar converge în mod necesar la zero. Însă

$$\|\psi_n\|^2_{L_2(\Gamma)} = \|M\varphi_n\|^2_{L_2(\Gamma)} \geq \tilde{\tilde{c}}_p \int_0^n arctg^2 \frac{1}{t} dt \geq \tilde{\tilde{c}}_p \int_0^1 arctg^2 \frac{1}{t} dt > 0 ,$$

de unde rezultă că $\{\psi_n\}$ nu conține niciun subşir convergent în spațiul $L_2(\Gamma)$. Aşadar, operatorul M nu este compact în spațiul $L_2(\Gamma)$.

III. Criterii noetheriene

Vom stabili că condițiile în care operatorul de forma (2) (şi operatorii mai complicați) sunt de tip Noether se exprimă cu ajutorul determinantului simbolului. De aceea vom defini mai întâi simbolul operatorilor $aI,\ P,\ Q$ şi V. Notăm prin $a(t,\xi)$, $\mathsf{P}(t,\xi)$, $\mathsf{Q}(t,\xi)$ şi $V(t,\xi)$ $(t \in \Gamma, -\infty \leq \xi \leq \infty)$ simbolurile respective ale acestor operatori. Punem

$$a(t,\xi) = \begin{cases} \begin{Vmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & \overline{a(t)} \end{Vmatrix}, & \text{pentru } t \in \Gamma \setminus \{t_1,..,t_n\} \\ \begin{Vmatrix} a(t_k+0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{a(t_k+0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t_k-0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{a(t_k-0)} \end{Vmatrix}, & \text{pentru } t = t_k \ (k=1,..,n), \end{cases} \tag{4}$$

$$\mathsf{P}(t,\xi) = \begin{cases} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, & \textit{pentru } t \in \Gamma \setminus \{t_1,...,t_n\}, \\ \dfrac{1}{z_k^{2\pi}-1} \begin{Vmatrix} z_k^{2\pi} & 0 & -z_k^{\theta_k} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & z_k^{2\pi-\theta_k} \\ z_k^{2\pi-\theta_k} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -z_k^{\theta_k} & 0 & z_k^{2\pi} \end{Vmatrix}, & \textit{pentru } t = t_k \ (k=1,...,n), \end{cases} \tag{5}$$

unde $z_k = exp(\xi + i\dfrac{1+\beta_k}{p})\ \ (-\infty \leq \xi \leq +\infty)$.

$$\mathsf{Q}(t,\xi) = E(t) - \mathsf{P}(t,\xi) \text{ în care } E(t) = \begin{cases} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, & \textit{pentru } t \in \Gamma \setminus \{t_1,...,t_n\}, \\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, & \textit{pentru } t = t_k \ (k=1,..,n). \end{cases} \tag{6}$$

În sfârșit,

$$V(t,\xi)=\begin{cases}\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}, & pentru\ t\in\Gamma\setminus\{t_1,\dots,t_n\},\\ \begin{Vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{Vmatrix}, & pentru\ t=t_k\ (k=1,\dots,n).\end{cases}\tag{7}$$

Dacă operatorul A are forma (2), atunci simbolul lui, $A(t,\xi)$, îl definim prin relația

$$A(t,\xi)=a(t,\xi)\mathsf{P}(t,\xi)+b(t,\xi)\mathsf{Q}(t,\xi)+\left(c(t,\xi)\mathsf{P}(t,\xi)+d(t,\xi)\mathsf{Q}(t,\xi)\right)v(t,\xi).\tag{8}$$

Dacă $a,b,c,d\in CP_m(\Gamma)$, atunci simbolul operatorului $A\in L\left(L_p^m(\Gamma,\rho)\right)$ se definește prin relația (8), în care $a(t,\xi), b(t,\xi), c(t,\xi)$ și $d(t,\xi)$ sunt respectiv matrice de ordinul $2m$, sau $4m$, definite de egalitățile (4).

Teorema 2. *Operatorul*

$$A=aP+bQ+(cP+dQ)V$$

$(a,b,c,d\in CP(\Gamma))$ *este noetherian în spațiul* $\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)$, *dacă și numai dacă*

$$det\,A(t,\xi)\neq 0\,(t\in\Gamma,-\infty\leq\xi\leq\infty).$$

În prealabil vom demonstra două leme.

Lema 1. *Operatorul* A *este noetherian în spațiul* $\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)$, *dacă și numai dacă în spațiul* $\widetilde{L}_p^2(\Gamma,\rho)=\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)\times\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)$ *este noetherian operatorul*

$$\widetilde{A}=\begin{Vmatrix}aP+bQ & cP+dQ\\ \bar{c}VPV+\bar{d}VQV & \bar{a}VPV+\bar{b}VQV\end{Vmatrix}.\tag{9}$$

În plus, $Ind\,A=\frac{1}{2}Ind\,\widetilde{A}$.

Demonstrație. Are loc [5] identitatea

$$\begin{Vmatrix}X+YW & 0\\ 0 & X-YW\end{Vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}I & W\\ I & -W\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}X & Y\\ WYW & WXW\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}I & I\\ W & -W\end{Vmatrix},\tag{10}$$

unde X,Y,W sunt orice operatori liniari și mărginiți care acționează într-un spațiu Banach B și $W^2=I$.

În identitatea (10) punem $X=aP+bQ,\ Y=cP+dQ$, atunci

$$\widetilde{A}=H\begin{Vmatrix}A & 0\\ 0 & A_1\end{Vmatrix}H^{-1},\tag{11}$$

unde

$$A_1=aP+bQ-(cP+dQ)V,\ H=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}I & I\\ V & -V\end{Vmatrix}.$$

Fie $(M\varphi)(t)=i\varphi(t)$, atunci se verifică imediat că $MA_1M^{-1}=A$ și afirmațiile lemei rezultă din egalitatea (11).

Observația 1. *Fie Γ de tip Liapunov, atunci în baza teoremei 1 avem $VSV = S + T_1$ şi, prin urmare, $VPV = Q + T_2$, $VQV = P + T_3$, unde $T_j \in \mathrm{T}\left(\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)\right)$ $(j = 1,2,3)$. De aici rezultă că operatorul $\widetilde{A}$ diferă de operatorul*

$$\widetilde{A}_0 = \begin{Vmatrix} a & c \\ \overline{d} & \overline{b} \end{Vmatrix} P + \begin{Vmatrix} a & c \\ \overline{c} & \overline{a} \end{Vmatrix} Q$$

printr-un termen compact.

Operatorul $\widetilde{A}_0$ este un operator integral singular cu coeficienți matriceali continui pe porțiuni. Pentru aceşti operatori sunt cunoscute [5] condițiile în care ei sunt de tip Noether. Aceste condiții constau în faptul că $det\,\widetilde{A}_0(t,\xi) \neq 0$ pentru orice $(t,\xi) \in \Gamma \times \overline{\mathrm{R}}$. Se observă că în acest caz $det\,\widetilde{A}_0(t,\xi)$ coincide cu $det\,A(t,\xi)$, definit de egalitatea (8).

Din lema 1 rezultă

Corolarul 2. *Fie Γ de tip Liapunov. Pentru ca operatorul A să fie noetherian este necesar şi suficient ca*

$$det\,A(t,\xi) \neq 0 (t \in \Gamma, -\infty \leq \xi \leq \infty).$$

Lema 2. *Operatorul A este local noetherian în punctul $t_0 \in \Gamma \setminus \{t_1,...,t_n\}$, dacă şi numai dacă*

$$det\,A_0(t,\xi) \neq 0 (-\infty \leq \xi \leq \infty).$$

Demonstrație. Notăm cu $u(t_0) \subset \Gamma \setminus \{t_1,...,t_n\}$ o vecinătate a punctului t_0. Fie $\widetilde{\Gamma}$ un contur închis Liapunov care conține vecinătatea $u(t_0)$. În spațiul $\widetilde{L}_p(\Gamma)$ considerăm operatorul

$$B = \widetilde{a}\widetilde{P} + \widetilde{b}\widetilde{Q} + \left(\widetilde{c}\widetilde{P} + \widetilde{d}\widetilde{Q}\right)V,$$

unde $\widetilde{P} = \left(I + S_{\widetilde{\Gamma}}\right)/2$, $\widetilde{Q} = I - \widetilde{P}$, iar $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}, \widetilde{d}$ sunt funcții continue pe $\widetilde{\Gamma}$, restricțiile cărora pe $u(t_0)$ coincid cu funcțiile a,b,c,d. Evident, operatorii A şi B sunt cvasi-echivalenți în punctul t_0. Prin urmare, ambii sunt în acelaşi timp locali noetherieni în punctul t_0. Conform corolarului 2, condiția $det\,B(t_0,\xi) \neq 0 (\xi \in \overline{\mathrm{R}})$ este necesară şi suficientă în care B este local noetherian în punctul t_0. Aşa cum $det\,B(t,\xi) = det\,A(t_0,\xi)$, lema este demonstrată.

Demonstrația teoremei. În baza lemei 2, este îndeajuns să arătăm că condiția $det\,A(t_k,\xi) \neq 0 (-\infty \leq \xi \leq \infty)$ este necesară şi suficientă în care operatorul A este noetherian în punctul $t_k (k = 1,...,n)$.

Presupunem pentru început că $n = 1$. De rând cu conturul Γ considerăm conturul $\Gamma_1 (= \Gamma_{\theta_1})$, care are de asemenea un singur punct unghiular z_1 de aceeaşi măsură $\theta = \theta(t_1)$ cu proprietatea că dacă $z \in \Gamma_1$, atunci şi punctul $\overline{z} \in \Gamma_1$. Prin urmare, $z_1 = 0$. Atunci există o aplicație $\mu: \Gamma_1 \to \Gamma$, astfel încât $\mu'(t) \neq 0$ $(t \in \Gamma_1)$ şi satisface condițiile Hölder. Notăm cu $B: L_p(\Gamma,\rho) \to L_p(\Gamma_1,\rho_1)$ $\left(\rho(t) = |t - t_1|^{\beta_1}, \rho_1(t) = |z|^{\beta_1}\right)$ operatorul

$$(B\varphi)(z) = \varphi(\mu(z)).$$

Avem $BaB^{-1} = a_1 I(a_1(z) = a(\mu(z))),\ BVB^{-1} = V$ şi $BSB^{-1} = S_1 + T_1$, unde $S_1 = S_{\Gamma_1}$ şi $T_1 \in \mathsf{T}\left(L_p^2(\Gamma_1, \rho_1)\right)$. Ţinând cont de acestea, obţinem:

$$\widetilde{B}\widetilde{A}\widetilde{B}^{-1} = \left\| \begin{matrix} a_1 P_1 + b_1 Q_1 & c_1 P_1 + d_1 Q_1 \\ \overline{c} VP_1 V + \overline{d}_1 VQ_1 V & \overline{a} VP_1 V + \overline{b}_1 VQ_1 V \end{matrix} \right\| + T, \tag{12}$$

unde

$$\widetilde{B} = \left\| \begin{matrix} B & 0 \\ 0 & B \end{matrix} \right\|, P_1 = (I + S_1)/2, Q_1 = I - P_1 \quad \text{şi } T \in \mathsf{T}\left(L_p^2(\Gamma_1, \rho_1)\right).$$

Notăm cu W operatorul de translaţie, definit prin relaţia

$$(W\varphi)(z) = \varphi(\omega(z)),$$

unde $\omega(z) = \bar{z}(z \in \Gamma_1)$. Observăm că derivata $\omega'(z)$ este discontinuă în punctul $z = 0$, şi $\omega'(+0) = exp(i\theta_1), \omega'(-0) = exp(-i\theta_1)$. Se verifică uşor că

$$VS_1 V = WS_1 W \tag{13}$$

Înlocuind (13) în (12) şi utilizând lema 1, obţinem că operatorul A este local noetherian în punctul t_1, dacă şi numai dacă această proprietate o are în punctul $z = 0$ operatorul

$$M_1 = \left\| \begin{matrix} a_1 P_1 + b_1 Q_1 & c_1 P_1 + d_1 P_1 \\ \overline{c}_1 WP_1 W + \overline{d}_1 WQ_1 W & \overline{a}_1 WP_1 W + \overline{b}_1 WQ_1 W \end{matrix} \right\|.$$

Operatorul M_1 este un operator integral singular cu translaţia W studiat în lucrarea [7]. Din această lucrare obţinem că operatorul M_1 este local noetherian în punctul $z = 0$, dacă şi numai dacă $det\, M_1(0, \xi) = 0 (\xi \in \overline{\mathsf{R}})$. Aşa cum $det\, A(t_1, \xi) = det\, M_1(0, \xi)$, rezultă că pentru $n = 1$ teorema este demonstrată.

Trecem la cazul general. Fie $u_k = u(t_k)(\subset \Gamma)$ o vecinătate a punctului t_k ce nu conţine niciun punct $t_j \neq t_k$. Ca şi mai sus considerăm conturul $\Gamma_k \left(= \Gamma_{\theta_k}\right)$ cu un singur punct unghiular $z = 0$ şi cu condiţia că împreună cu orice punct z conţine şi punctul $\bar{z}$. Notăm cu μ_k o aplicaţie a vecinătăţii u_k pe o vecinătate $v_k = v_k(0)(\subset \Gamma_k)$ şi, în plus, $\mu_k(t_k) = 0$. Aşa cum Γ şi Γ_k în punctul t_k şi, respectiv, în $z = 0$ formează unghiuri de aceeaşi măsură θ_k, atunci μ_k poate fi aleasă astfel încât $\mu_k'(t) \neq 0 (t \in u(t_k))$ şi această derivată să satisfacă condiţiile lui Holder. Dacă $f \in CP(\Gamma)$, atunci convenim ca prin $f_k(z)(z \in v_k(0))$ să notăm funcţia $f(\mu_k^{-1}(z))$, unde μ_k^{-1} este inversa lui μ_k. Prelungim funcţiile $a_k(z), b_k(z), c_k(z), d_k(z)$ prin continuitate pe conturul Γ_k şi le notăm prin aceleaşi litere.

În spaţiul $L_p^2\left(\Gamma_k, |\, z\, |^{\beta_k}\right)$ considerăm operatorul

$$M_k = \left\| \begin{matrix} a_k P_k + b_k Q_k & c_k P_k + d_k Q_k \\ \overline{c}_k W P_k W + \overline{d}_k W Q_k W & \overline{a}_k W P_k W + \overline{b}_k W Q_k W \end{matrix} \right\|,$$

unde $(W\varphi)(z) = \varphi(\overline{z})$ şi $S_k = S_{\Gamma_k}$. Operatorul $\widetilde{A}$, definit de relația (11), este cvasi-echivalent în punctul t_k cu operatorul M_k în punctul $z = 0$:

$$T_{\mu_k} P_{u_k} \widetilde{A} P_{u_k} T_{\mu_k^{-1}} \overset{o}{\sim} P_{v_k} M_k P_{v_k},$$

unde

$$(P_F\varphi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), t \in \Gamma, \\ 0, \, t \in \Gamma \setminus F, \end{cases} \qquad (T_\varphi f)(t) = \begin{cases} f(\varphi(t)), t \in u, \\ 0, \; t \in \Gamma \setminus u. \end{cases}$$

Prin urmare, $\widetilde{A}$ şi M_k simultan sunt operatori local noetherini ($\widetilde{A}$ în punctul t_k iar operatorul M_k în $z = 0$). În baza teoremei 2, operatorul M_k are această proprietate dacă şi numai dacă $det\, M_k(0,\xi) \neq 0 (\xi \in \overline{\mathrm{R}})$. Rămâne să ne convingem că $det\, M_k(0,\xi) = det\, A(t,\xi)$ şi teorema este demonstrată.

În calitate de consecință se poate formula următorul rezultat

Teorema 3. *Fie funcțiile a,b,c și d aparțin mulțimii $CP_m(\Gamma)$. Operatorul*

$$A = aP + bQ + (cP + dQ)V$$

este noetherian în spațiul $L_p^m(\Gamma,\rho)$, dacă și numai dacă

$$det\, A(t,\xi) \neq 0 (t \in \Gamma, \xi \in \overline{\mathrm{R}}).$$

Fie operatorul A are forma

$$A = \sum_{j=1}^{r} A_{j1} A_{j2} \ldots A_{js},$$

unde $A_{jk} = a_{jk}P + b_{jk}Q + (c_{jk}P + d_{jk}Q)V \, (a_{jk}, b_{jk}, c_{jk}, d_{jk} \in CP_m(\Gamma))$.

Definim simbolul operatorului A în felul următor

$$A(t,\xi) = \sum_{j=1}^{r} A_{j1}(t,\xi) A_{j2}(t,\xi) \ldots A_{js}(t,\xi),$$

unde $A_{jk}(t,\xi)$ este simbolul operatorului A_{jk}. Cu ajutorul teoremei 2, repetând raționamentele de la demonstrația teoremei 1, se obține ușor următorul rezultat.

Teorema 4. *Operatorul A este noetherian în spațiul $L_p^m(\Gamma,\rho)$, dacă și numai dacă*

$$det\, A(t,\xi) = det \sum_{j=1}^{r} \prod_{k=1}^{s} A_{jk}(t,\xi) \neq 0, (t \in \Gamma, \xi \in \overline{\mathrm{R}}).$$

IV. Observații de incheiere

În această secțiune se arată că condițiile în care operatorul $A = aP + bQ + (cP + dQ)V$ este noetherian depind de prezența punctelor unghiulare pe conturul Γ și de măsura acestor unghiuri.

În secțiunea 1 s-a demonstrat că operatorul $VSV+S$ nu este, în general, compact în spațiul $\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)$. Cu ajutorul teoremei 2 se poate demonstra că $VSV+S\in\ \mathbf{T}\left(L_p(\Gamma,\rho)\right)$, dacă și numai dacă conturul Γ este de tip Liapunov. Într-adevăr, suficiența este stabilită de teorema 1. Fie Γ un contur Liapunov pe porțiuni și t_0 un punct unghiular cu unghiul $\theta_0=\theta(t_0)(0<\theta_0<\pi)$. Amintim că dacă operatorul $VSV+S$ se presupune compact în spațiul $L_p\left(\Gamma,|t-t_0|^{\beta_0}\right)$, atunci operatorul $A_\lambda=VSV+S-\lambda I$ trebuie să fie noetherian pentru orice $\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$.

Simbolul operatorului A_λ în punctul t_0 are forma

$$A_\lambda(t_0,\xi)=\begin{Vmatrix}-\lambda & 0 & \omega(\xi) & 0\\ 0 & -\lambda & 0 & \omega(\xi)\\ \omega(\xi) & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & \omega(\xi) & 0 & -\lambda\end{Vmatrix},$$

unde

$$\omega(\xi)=2\cdot\frac{exp\left[(2\pi-\theta_0)(\xi+i(1+\beta_0)/p)\right]-exp\left[\theta_0(\xi+i(1+\beta_0)/p)\right]}{exp\left[2\pi(\xi+i(1+\beta_0)/p)\right]-1}.$$

În baza teoremei 1, operatorul A_λ este noetherian dacă și numai dacă $det\,A_\lambda(t,\xi)\neq 0(t\in\Gamma,-\infty\leq\xi\leq\infty)$. În particular, pentru toate valorile lui λ care verifică condițiile

$$det\,A_\lambda(t_0,\xi)=0(-\infty\leq\xi\leq\infty)$$

operatorul A_λ nu este noetherian în $\widetilde{L}_p\left(\Gamma,|t-t_0|^{\beta_0}\right)$. Adică pentru toate valorile $\lambda=\pm\omega(\xi)$ $(-\infty\leq\xi\leq\infty)$ operatorul A_λ nu este noetherian. Așa cum $\theta_0\neq\pi$, rezultă că $\omega(\xi)\not\equiv 0$. Am obținut o contradicție cu ipoteza.

Simbolul operatorului

$$A=aP+bQ+(cP+dQ)V$$

depinde de măsurile unghiurilor formate de tangentele laterale în punctele conturului Γ. Aceasta se vede din definiția simbolului operatorilor P și Q. Dacă considerăm $c(t)\equiv d(t)\equiv 0$, atunci operatorul A are forma $A=aP+bQ$, și, după cum se cunoaște [3,4,8], condițiile în care el este noetherian nu depind de unghiurile $\theta(t_k)$, cu toate că simbolul definit în această lucrare depinde, în mod explicit, de $\theta(t_k)$. În legătură cu aceasta, apare firesc întrebarea dacă este esențială dependența simbolului operatorului A de mărimile $\theta(t_k)(k=1,...,n)$. Altfel spus, condițiile în care operatorul $A\left(|c(t)|+|d(t)|\neq 0\right)$ este noetherian depind într-adevăr de $\theta_k=\theta(t_k)$? Vom arăta că răspunsul la această întrebare este afirmativ.

Fie $A=\left(1+\sqrt{2}\right)P+\left(1-\sqrt{2}\right)Q+V.$

Dacă conturul Γ este de tip Liapunov, atunci operatorul A este noetherian în toate spațiile $\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)$. Fie conturul Γ posedă un punct unghiular t_0 cu unghiul $\theta(t_0)=\frac{\pi}{2}$ și $p=2.$ Atunci simbolul acestui operator în punctul $(t_0,0)$ are forma

$$A(t_0,0)=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1+i & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1-i \\ 1-i & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1+i & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

și $det\, A(t_0,0)=0.$ Astfel, operatorul

$$A=\left(1+\sqrt{2}\right)P+\left(1-\sqrt{2}\right)Q+V$$

nu este noetherian în spațiul $\widetilde{L}_2(\Gamma)$. Acest exemplu ne arată că prezența punctelor unghiulare influențează în mod esențial condițiile noetheriene ale operatorului (2).

În încheierea acestei secțiuni considerăm problema generalizată la frontiera lui Riemann, care constă în următoarele [9]. Să se determine două funcții analitice $\Phi^+(z)$ ți $\Phi^-(z)$ în F^+ și, respectiv, în F^- cu următoarele proprietăți: pot fi reprezentate în F^+ și, respectiv, în F^-cu ajutorul integralei lui Cauchy; valorile la limită $\Phi^+(t)$ și $\Phi^-(t)$ pe conturul Γ aparțin spațiului $L_p(\Gamma,\rho)$; limitele $\Phi^+(t)$ și $\Phi^-(t)$ la frontieră satisfac condițiile

$$\Phi^+(t)=a(t)\Phi^-(t)+b(t)\overline{\Phi^-(t)}+c(t), \tag{14}$$

unde a,b,c sunt funcții cunoscute. În cazul conturului Liapunov teoremele lui Noether pentru problema (14) sunt demonstrate în lucrările [1,2] ș.a. Din aceste lucrări se deduce, în particular, că dacă $a,b,c\in C(\Gamma)$, atunci problema la frontieră (14) este noetheriană dacă și numai dacă $|\,a(t)|\neq 0\,(\forall t\in\Gamma)$. În cazul conturului Liapunov pe porțiuni are loc următorul rezultat.

Teorema 5. *Problema la frontieră Riemann (14) este noetheriană în spațiul* $\widetilde{L}_p(\Gamma,\rho)$ *dacă și numai dacă sunt verificate condițiile:*

(i) $|a(t)|>0,\ \forall t\in\Gamma;$

(ii) $|a(t_k)|^2-|b(t_k)|^2\left(\frac{z_k^{2\pi-\theta_k}-z_k^{\theta_k}}{z_k^{2\pi}-1}\right)\neq 0$ *pentru orice* $k=1,\dots,n$ *şi orice* $t\in\Gamma$, *unde* $z_k=exp\left(\xi+i(1+\beta_k)/p\right),\ -\infty\le\xi\le\infty.$

Demonstrația se face în mod obişnuit. Cu ajutorul formulelor lui Plemelj şi Sohotski de la problema (14) se trece la o ecuație integrală singulară cu conjugare complexă, se scrie simbolul acestei ecuații, apoi se aplică teorema 2.

Observăm că în cazul conturului Liapunov pe porțiuni condițiile noetheriene pentru problema (14) depind, de asemenea, de mărimile unghiurilor θ_k și, în plus, depind și de coeficientul $b(t)$, ceea ce nu se observă în cazul conturului Liapunov.

Rezultatele acestei lucrări pot fi extrapolat şi la cazul în care conturul este format dintr-un număr finit de curbe Liapunov pe porțiuni fără puncte de auto-intersecție.

V. Concluzii

Metodele algebrelor Banach cu simbol au permis stabilirea criteriilor noetheriene pentru ecuațiile singulare cu conjugare complexă în cazul conturului de tip Liapunov pe porțiuni. Metodele utilizate și rezultatele obținute în această lucrare pot fi folosite în studiul ulterior al operatorilor singulari în vederea lărgirii clasei de contururi de integrare (*de exemplu cu puncte de auto-intersecție*), a spațiilor de cercetare, precum și a coeficienților operatorilor.

Bibliografie

1. Kravcenko V., Litvinchiuk G. Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift. Kluwer, 2012.
2. Muskelischvili N. Singular integral equations. Moskva: Fizmatgiz, 1962.
3. Gohberg I., Krupnik N. One-dimensional Linear Singular Integral Equations. vol. 1, Operator Theory 53. Basel-Boston: Birkhäuser, 1992.
4. Krupnik N. Banach Algebras with Symbol and Singular Integral Operators. Operator Theory, 26. Basel-Boston: Birkhäuser, 1987.
5. Gohberg I., Krupnik N. Extension theorems for invertibility symbols in Banach algebras. Operator Theory, 15. Basel-Boston: Birkhäuser, 1992. pp. 991-1008.
6. Neaga V. The symbol of singular integral operators with conjugation the case of piecewise Lyapunov contour. American Math. Society, vol.27, №1, 1983. pp. 173-176.
7. Krupnik N., Neaga V. О сингулярных операторах со сдвигом в случае кусочно-ляпуновского контура. Soobsch. Akad. Nauk Gruz SSR, 76 (1974). c. 25-28.
8. Duduchava R. Integral equations with fixed singularities. Leipzig: Teubner, 1979.
9. Neagu V. On the Riemann boundary value problem in the case of a piecewise Lyapunov contour. In: Proceedings of the Fourth Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, Chișinău, 2017. pp.305-310.