O METODĂ DE CONSTRUCŢIE A QUASIGRUPURILOR MEDIALE ŞI NEPARAMEDIALE

Natalia BOBEICA, conf. univ., dr.
Liubomir CHIRIAC, prof. univ., dr. hab.
Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. În acest articol este propusă şi demonstrată o metodă nouă de construcţie a quasigrupurilor mediale şi neparamediale, folosind conceptul de produs direct special al unui grup comutativ.
Cuvinte-cheie: quasigrup medial, quasigrup paramedial, *AG*-grupoid, *AD*-quasigrup.

A METHOD OF CONSTRUCTING MEDIAL AND NONPARAMEDIAL QUASIGROUPS

Abstract. In this paper we develop a new method of constructing medial and nonparamedial quasigroups, using a special direct product of commutative groups.
Keywords: medial quasigroup, nonparamedial quasigroup, *AG*-groupoid, *AD*-quasigroup.

Introducere

Problema construcţiilor quasigrupurilor mediale cu anumite proprietăţi rămâne a fi deschisă la momentul dat în teoria quasigrupurilor.

Autorii au introdus conceptul de produs direct special al unui grup Abelian G şi au demonstrat că pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită o operaţie binară, astfel încât noua structură algebrică este quasigrup neasociativ, medial şi neparamedial.

În lucrarea respectivă a fost examinată următoarea problemă concretă.

Problema. Fie $(G, +)$ grup comutativ. În ce condiţii pe mulţimea $G \times G$ poate fi definită operaţia binară $(\circ)$ astfel, încât $(G\times G, \circ)$ este quasigrup neasociativ, medial şi neparamedial?

Astfel soluţionând problema formulată mai sus, s-a demonstrat că orice grup comutativ poate fi *transformat* în quasigrup medial şi neasociativ folosind metoda elaborată.

1. Noţiuni fundamentale

O mulţime nevidă G se numeşte *grupoid* cu operaţia binară notată prin $\{\cdot\}$, dacă pentru orice pereche ordonată de elemente $(a, b) \in G$ se defineşte în mod unic produsul $ab \in G$.

Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte *AD*-grupoid dacă este satisfăcută legea $a \cdot (bc) = c \cdot (ba)$ pentru orice $a, b, c \in G$.

Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte grupoid Abel-Grassmann sau *AG*-grupoid dacă elementele lui satisfac legea inversă la stânga, adică $(a \cdot b) \cdot c = (c \cdot b) \cdot a$ pentru orice $a, b, c \in G$.

Grupoidul $(G, \cdot)$ se numeşte medial dacă este satisfăcută legea $xy \cdot zt = xz \cdot yt$ pentru orice $x, y, z, t \in G$ [1,2]. Unele proprietăţi ale quasigrupurilor mediale şi paramediale au fost studiate în [3-10].

2. Construcţia quasigrupurilor mediale folosind produsul direct special

Teorema 1. Fie $(G, +)$ grup comutativ. Mulţimea $G \times G$ cu operaţia " $\circ$ " definită astfel

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1).$$

Atunci $(G \times G, \circ)$ este quasigrup neasociativ, neparamedial, medial, AG-quasigrup, AD-quasigrup.

Demonstraţie. Vom demonstra că $(G \times G, \circ)$ este:

1. Quasigrup;
2. Quasigrup neasociativ;
3. Quasigrup medial;
4. AG-quasigrup;
5. AD-quasigrup;
6. Quasigrup neparamedial.

1. Pentru a demonstra că grupoidul $(G \times G, \circ)$ este quasigrup, este necesar să arătăm că ecuaţiile $ax = b$ şi $ya = b$ au soluţii unice în grupoidul dat.

Fie ecuaţia $ya = b$. Fie $y = (y_1, y_2)$, $a = (a_1, a_2)$ şi $b = (b_1, b_2)$. Deoarece $ya = b$ putem scrie

$$(y_1, y_2) \circ (a_1, a_1) = (b_1, b_2). \tag{1}$$

Conform condiţiei Teoremei 1 avem

$$(y_1, y_2) \circ (a_1, a_2) = (-y_1 - y_2 + a_2, -a_1 - a_2 + y_1). \tag{2}$$

Din (1) şi (2) obţinem

$$-y_1 - y_2 + a_2 = b_1 \tag{3}$$

şi

$$-a_1 - a_2 + y_1 = b_2. \tag{4}$$

Din (4) avem

$$y_1 = a_1 + a_2 + b_2. \tag{5}$$

Substituim în (3) expresia obţinută pentru y_1 şi obţinem

$$y_2 = -b_2 - a_1 - b_1. \tag{6}$$

Deci $y_1 = a_1 + a_2 + b_2$ şi $y_2 = -b_2 - a_1 - b_1$.

Vom arăta că orice altă soluţie coincide cu (y_1, y_2). Presupunem că (y'_1, y'_2) este o altă soluţie a ecuaţiei $ya = b$. Atunci

$$(y'_1, y'_2) \circ (a_1, a_1) = (b_1, b_2). \tag{7}$$

Conform condiţiei Teoremei 1 avem

$$(y'_1, y'_2) \circ (a_1, a_2) = (-y'_1 - y'_2 + a_2, -a_1 - a_2 + y'_1). \tag{8}$$

Din (7) şi (8) obţinem

$$-y'_1 - y'_2 + a_2 = b_1 \tag{9}$$

şi

$$-a_1 - a_2 + y'_1 = b_2. \tag{10}$$

Din (10) avem

$$y_1' = a_1 + a_2 + b_2. \tag{11}$$

Substituim în (9) expresia obţinută pentru y_1' şi obţinem

$$y_2' = -a_1 - b_2 - b_1. \tag{12}$$

Deci $y_1' = a_1 + a_2 + b_2$ şi $y_2' = -b_1 - b_2 - a_1$.

Din (5) şi (11) am obţinut $y_1 = y_1'$. Din (6) şi (12) avem $y_2 = y_2'$.

Din cele de mai sus am obţinut că ecuaţia $ya = b$ are o singură soluţie.

În mod analog procedăm cu ecuaţia $ax = b$. Fie $x = (x_1, x_2)$, $a = (a_1, a_2)$ şi $b = (b_1, b_2)$. Deoarece $ax = b$ putem scrie

$$(a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) = (b_1, b_2). \tag{13}$$

Conform condiţiei Teoremei 1 avem

$$(a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) = (-a_1 - a_2 + x_2, -x_1 - x_2 + a_1). \tag{14}$$

Din (13) şi (14) obţinem

$$-a_1 - a_2 + x_2 = b_1 \tag{15}$$

şi

$$-x_1 - x_2 + a_1 = b_2. \tag{16}$$

Din (15) avem

$$x_2 = a_1 + a_2 + b_1. \tag{17}$$

Substituim în (16) expresia obţinută pentru x_2 şi obţinem

$$x_1 = -a_2 - b_2 - b_1. \tag{18}$$

Deci $x_1 = -a_2 - b_2 - b_1$ şi $x_2 = a_1 + a_2 + b_1$.

Vom arăta că orice altă soluţie coincide cu (x_1, x_2). Presupunem că (x_1', x_2') este o altă soluţie a ecuaţiei $ax = b$. Prin urmare,

$$(a_1, a_2) \circ (x_1', x_2') = (b_1, b_2). \tag{19}$$

Conform condiţiei Teoremei 1 avem

$$(a_1, a_2) \circ (x_1', x_2') = (-a_1 - a_2 + x_2', -x_1' - x_2' + a_1). \tag{20}$$

Din (19) şi (20) obţinem

$$-a_1 - a_2 + x_2' = b_1 \tag{21}$$

şi

$$-x_1' - x_2' + a_1 = b_2. \tag{22}$$

Din (21) avem

$$x_2' = a_1 + a_2 + b_1. \tag{23}$$

Substituim în (22) expresia obţinută pentru x'_2 şi obţinem

$$x'_1 = -b_2 - b_1 - a_2. \tag{24}$$

Deci $x'_1 = -a_2 - b_2 - b_1$ şi $x'_2 = a_1 + a_2 + b_1$.

Din (17) şi (23) obţinem $x_2 = x'_2$. Din (18) şi (24) obţinem $x_1 = x'_1$. Din cele de mai sus am primit că ecuaţia $ax = b$ are o singură soluţie.

Deci grupoidul $(G \times G, \circ)$ este quasigrup.

2. Vom arăta că în $(G \times G, \circ)$ nu se îndeplineşte legea asociativă, adică $(ab)c = a(bc)$. Notăm $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2), c = (x_3, y_3)$. Deci, $((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3) = (x_1, y_1)\circ$ $\circ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3))$.

Aplicând legea din Teorema 1 pentru $((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3)$ avem

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3) = (-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1) \circ (x_3, y_3) =$$

$$= (x_1 + y_1 - y_2 + x_2 + y_2 - x_1 + y_3, -x_3 - y_3 - x_1 - y_1 + y_2) =$$

$$= (y_1 + x_2 + y_3, -x_3 - y_3 - x_1 - y_1 + y_2). \tag{25}$$

În mod analog procedăm cu $(x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3))$ şi obţinem

$$(x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \circ (-x_2 - y_2 + y_3, -x_3 - y_3 + x_2) =$$

$$= (-x_1 - y_1 - x_3 - y_3 + x_2, x_2 + y_2 - y_3 - x_3 + y_3 - x_4 + x_1) =$$

$$= (-x_1 - y_1 - x_3 - y_3, y_2 + x_3 + x_1). \tag{26}$$

Din (25) şi (26) observăm că nu se îndeplineşte legea asociativă.

3. Demonstrăm că $(G \times G, \circ)$ este medial, adică are loc legea $xy \cdot zt = = xz \cdot yt$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3), t = (x_4, y_4)$, atunci $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3)\cdot$ $\cdot(x_4, y_4)) = ((x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_4, y_7))$. Aplicăm legea din Teorema 1 pentru $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4))$ şi obţinem

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ ((x_3, y_3) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= ((-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1)) \circ ((-x_3 - y_3 + y_4, -x_4 - y_4 + x_3)) =$$

$$(x_1 + y_1 - y_2 + x_2 + y_2 - x_1 - (x_4 + y_4 - x_3), x_3 + y_3 - y_4 + x_4 + y_4 - x_3 - (x_1 + y_1 - y_2)) =$$

$$(x_3 + y_1 - (x_4 + y_4 - x_2), x_4 + y_4 - (x_1 + y_1 - y_2)). \tag{27}$$

În mod similar procedăm cu $((x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_4, y_4))$, avem

$$((x_1, y_1) \circ (x_3, y_3)) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= ((-x_1 - y_1 + y_3, -x_3 - y_3 + x_1)) \circ ((-x_2 - y_2 + y_4, -x_4 - y_4 + x_2)) =$$

$$= (x_1 + y_1 - y_3 + x_3 + y_3 - x_1 - (x_4 + y_4 - x_2), x_2 + y_2 - y_4 + x_4 + y_4 - x_2 - (x_1 + y_1 - y_3)) =$$

$$(x_3 + y_1 - (x_4 + y_4 - x_2), x_4 + y_3 - (x_1 + y_1 - y_2)). \tag{28}$$

Din (27) şi (28) observăm că quasigrupul $(G \times G, \circ)$ este medial.

4. Demonstrăm că $(G \times G, \circ)$ este AG-grupoid, adică are loc legea $(xy)z = (zy)x$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3)$, atunci $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = ((x_3, y_3) \cdot (x_2, y_2)) \cdot$ $\cdot (x_1, y_1)$.

Aplicăm legea din Teorema 1 pentru $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3)$ şi obţinem

$$((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = (-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1) \circ (x_3, y_3) =$$

$$= (x_1 + y_1 - y_2 + x_2 + y_2 - x_1 + y_3, -x_3 - y_3 - x_1 - y_1 + y_2) =$$

$$= (y_1 + x_2 + y_3, -x_3 - y_3 - x_1 - y_1 + y_2). \tag{29}$$

În mod similar procedăm cu $((x_3, y_3) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_1, y_1)$, avem

$$((x_3, y_3) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_1, y_1) = (-x_3 - y_3 + y_2, -x_2 - y_2 + x_3) \circ (x_1, y_1) =$$

$$= (x_3 + y_3 - y_2 + x_2 + y_2 - x_3 + y_1, -x_1 - y_1 - x_3 - y_3 + y_2) =$$

$$= (y_3 + x_2 + y_1, -x_1 - y_1 - x_3 - y_3 + y_2). \tag{30}$$

Din (29) şi (30) observăm că quasigrupul $(G \times G, \circ)$ este AG-grupoid.

5. Demonstrăm că $(G \times G, \circ)$ este AD-grupoid, adică are loc legea $x(yz) = z(yx)$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3)$, atunci $(x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)) = (x_3, y_3) \cdot ((x_2, y_2) \cdot$ $\cdot (x_1, y_1))$.

Aplicăm legea din Teorema 1 pentru $(x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3))$ şi obţinem

$$(x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \circ (-x_2 - y_2 + y_3, -x_3 - y_3 + x_2) =$$

$$= (-x_1 - y_1 - x_3 - y_3 + x_2, y_2 + x_3 + x_1). \tag{31}$$

În mod similar procedăm cu $(x_3, y_3) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1))$, avem

$$(x_3, y_3) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_1, y_1)) = (x_3, y_3) \circ (-x_2 - y_2 + y_1, -x_1 - y_1 + x_2) =$$

$$= (-x_3 - y_3 - x_1 - y_1 + x_2, x_2 + y_2 - y_1 + x_1 + y_1 - x_2 + x_3) =$$

$$= (-x_1 - y_1 - x_3 - y_3 + x_2, y_2 + x_1 + x_3). \tag{32}$$

Din (31) şi (32) observăm că quasigrupul $(G \times G, \circ)$ este AD-grupoid.

6. Demonstrăm că $(G \times G, \circ)$ nu este paramedial, adică nu are loc legea $xy \cdot zt = ty \cdot zx$. Notăm $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3), t = (x_4, y_4)$, atunci $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot$ $\cdot (x_4, y_4)) = ((x_4, y_4) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_1, y_1))$.

Aplicăm legea din Teorema 1 pentru $((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_4, y_4))$ şi obţinem

$$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ ((x_3, y_3) \circ (x_4, y_4)) =$$

$$= ((-x_2 - y_2 + x_1, -x_1 - y_1 + y_2)) \circ ((-x_4 - y_4 + x_3, -x_3 - y_3 + y_4)) =$$

$$= (x_4 + y_4 - x_3 + x_3 + y_3 - y_4 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_2 - x_1 + x_1 + y_1 - y_2 - (x_3 + y_3 - y_4)) =$$

$$= (x_4 + y_3 - (x_2 + y_2 - x_1), x_2 + y_1 - (x_3 + y_3 - y_4)). \tag{33}$$

În mod similar procedăm cu $((x_4, y_4) \cdot (x_2, y_2)) \cdot ((x_3, y_3) \cdot (x_1, y_1))$, avem

$$((x_4, y_4) \circ (x_2, y_2)) \circ ((x_3, y_3) \circ (x_1, y_1)) =$$
$$= ((-x_4 - y_4 + y_2, -x_2 - y_2 + x_4)) \circ ((-x_3 - y_3 + y_1, -x_1 - y_1 + x_3)) =$$
$$= (x_4 + y_4 - y_2 + x_2 + y_2 - x_4 - (x_1 - y_1 + x_3), x_3 + y_3 - y_1 + x_1 + y_1 - x_3 - (x_4 + y_4 - y_2)) =$$
$$= (x_2 + y_4 - (x_1 + y_1 - x_3), x_1 + y_3 - (x_4 + y_4 - y_2)). \tag{34}$$

Din (33) şi (34) observăm că quasigrupul $(G \times G, \circ)$ nu este paramedial.

Teorema este demonstrată.

Exemplul 1. Fie $(G, +)$ grup abelian de ordinul 3.

(+)	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Examinăm $(G \times G, \circ)$, unde operaţia " $\circ$ " este definită astfel:

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1).$$

Obţinem un exemplu de quasigrup medial de ordinul 9, neparamedial, AG-quasigrup şi AD-quasigrup.

(+)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	5	7	2	4	6	1	3	8
1	6	2	4	8	1	3	7	0	5
2	3	8	1	5	7	0	4	6	2
3	7	0	5	6	2	4	8	1	3
4	4	6	2	3	8	1	5	7	0
5	1	3	8	0	5	7	2	4	6
6	5	7	0	4	6	2	3	8	1
7	2	4	6	1	3	8	0	5	7
8	8	1	3	7	0	5	6	2	4

În aşa mod $(G \times G, \circ)$ este quasigrup medial, neparamedial, AG-quasigrup şi AD-quasigrup.

Exemplul 2. Fie $(G, +)$ grup abelian de ordinul 4.

(+)	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Examinăm $(G \times G, \circ)$, unde operaţia " $\circ$ " este definită astfel:

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (-x_1 - y_1 + y_2, -x_2 - y_2 + x_1).$$

Obţinem exemplu de quasigrup medial de ordinul 16, neparamedial, AG-quasigrup şi AD-quasigrup.

(+)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	7	10	13	3	6	9	12	2	5	8	15	1	4	11	14
1	12	3	6	9	15	2	5	8	14	1	4	11	13	0	7	10
2	8	15	2	5	11	14	1	4	10	13	0	7	9	12	3	6
3	4	11	14	1	7	10	13	0	6	9	12	3	5	8	15	2
4	13	0	7	10	12	3	6	9	15	2	5	8	14	1	4	11
5	9	12	3	6	8	15	2	5	11	14	1	4	10	13	0	7
6	5	8	15	2	4	11	14	1	7	10	13	0	6	9	12	3
7	1	4	11	14	0	7	10	13	3	6	9	12	2	5	8	16
8	10	13	0	7	9	12	3	6	8	15	2	5	11	14	1	4
9	6	9	12	3	5	8	15	2	4	11	14	1	7	10	13	0
10	2	5	8	15	1	4	11	14	0	7	10	13	3	6	9	12
11	14	1	4	11	13	0	7	10	12	3	6	9	15	2	5	8
12	7	10	13	0	6	9	12	3	5	8	15	2	4	11	14	2
13	3	6	9	12	3	5	8	15	1	4	11	14	0	7	10	13
14	15	2	5	8	14	1	4	11	13	0	7	10	12	3	6	9
15	11	14	1	4	10	13	0	7	9	12	3	6	8	15	2	5

În aşa mod $(G \times G, \circ)$ este quasigrup medial, neparamedial, AG-quasigrup şi AD-quasigrup.

Bibliografie

1. Belousov V. D. Foundation of the theory of quasigroups and loops. Moscow: Nauka, 1967.
2. Choban M. M., Kiriyak L. L. The topological quasigroups with multiple identities. Quasigroups and Related Systems. 9, 2002. p. 19-31.
3. Bobeica N., Chiriac L. L. On a method of constructing medial and paramedial quasigroups. In: The Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the 50^{th} anniversary of the foundation of Institute of Mathematics and Computer Science IMCS-50, August 19-23, 2014, Chisinau, Republic of Moldova. p. 18-21.
4. Chiriac L. L. On Topological Quasigroups and Homogeneous Isotopies. In: Analele Universităţii din Piteşti, Buletin Ştiinţific, Seria Matematică şi informatica, 9, 2003. p. 191-196.
5. Chiriac L. L., Chiriac L. L. Jr, Bobeica N. On topological groupoids and multiple identities. In: Buletinul Academiei de Ştiinţe a RM, Matematica, 1(59), 2009. p. 67-78.

6. Chiriac L. L. Topological paramedial groupoids with multiple identities. In: The 17^{th} Conference on Applied and Industrial Mathem., Constantza, CAIM-2009, Romania, 2009. p. 28.
7. Bobeica N. On Paramedial Loops. In: The 17^{th} Conference on Applied and Industrial Mathem., Constantza, CAIM-2009, Romania, 2009. p. 20.
8. Bobeica N. Topological Hexagonal Groupoids with Multiple Identities. MITRE-2009, State University of Moldova, October, 2009. p. 5-6.
9. Pontrjagin L. S. Neprerivnie gruppi. Moskow: Nauka, 1984.
10. Chiriac L. L. Topological Algebraic System. Chişinău: Ştiinţa, 2009.