SISTEME DIFERENȚIALE CUBICE CU FOCAR SLAB ŞI CU O DREAPTĂ INVARIANTĂ REALĂ DE MULTIPLICITATE ALGEBRICĂ MAXIMALĂ

Alexandru ŞUBĂ, prof. univ., dr. hab.
Silvia TURUTA, doctorand
Institutul de Matematică şi Informatică al AŞM
Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. În lucrarea de față se arată că în mulțimea sistemelor cubice de ecuații diferențiale cu focar slab multiplicitatea algebrică maximală a unei drepte invariante afine şi reale este egală cu patru. Astfel de clase de sisteme sunt trei. Pentru fiecare dintre aceste clase este rezolvată problema centrului.
Cuvinte cheie: sistem diferențial cubic, dreaptă invariantă, multiplicitate algebrică, problema centrului.

CUBIC DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH A WEAK FOCUS AND A REAL INVARIANT STRAIGHT LINE OF MAXIMAL ALGEBRAIC MULTIPLICITY

Abstract. In this article, we show that in the set of all cubic systems of differential equations with a weak focus the maximal algebraic multiplicity of an invariant affine and real straight line is four. There are three classes of these systems. For each of these classes the problem of center is solved.
Keywords: cubic differential system, invariant straight line , algebraic multiplicity, center problem.

1. Introducere

Considerăm sistemul polinomial de ecuații diferențiale

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \ \frac{dy}{dt} = Q(x,y), \quad \gcd(P,Q) = 1, \tag{1}$$

$P, Q \in \mathbb{R}[x,y]$ şi câmpul vectorial $\mathbb{X} = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ asociat sistemului (1). Cu $\gcd(P,Q)$ s-a notat cel mai mare divizor comun al polinoamelor P şi Q.

Fie $n = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$. Dacă $n = 2$ $(n = 3)$, atunci sistemul (1) se numeşte pătratic (cubic).

Vom spune că curba $f(x,y) = 0, f \in \boldsymbol{C}[x,y]$ (funcția $\mathrm{f} = \exp\left(\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}}\right); \mathrm{g}, \mathrm{h} \in \boldsymbol{C}[x,y]$) este o *curbă algebrică invariantă* (un *factor exponențial*) pentru sistemul (1), dacă există un aşa polinom $K_f(x,y) \in \boldsymbol{C}[x,y], degK_f \leq n-1$, încât în x şi y are loc identitatea

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot P(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot Q(x,y) \equiv f(x,y) \cdot K_f(x,y).$$

Polinomul $K_f(x,y)$ se numeşte *cofactorul* curbei algebrice invariante (factorului exponențial) f. Dacă m este cel mai mare număr natural astfel că f^m divide $\mathbb{X}(f)$, atunci se zice că f are multiplicitatea paralelă egală cu m. În cazul $\deg(f) = 1$, i.e. $f(x,y) \equiv \alpha x + \beta y + \gamma = 0, (\alpha, \beta) \neq (0,0)$, curba f se numeşte *dreaptă invariantă.*

Se spune că curba algebrică invariantă $f(x,y) = 0$ de gradul d are pentru sistemul (1) *multiplicitatea algebrică* egală cu m, dacă m este cel mai mare număr natural astfel că f^m împarte $E_d(\mathbb{X})$, unde

$$E_d(\mathbb{X}) = det\begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_j \\ \mathbb{X}(\nu_1) & \mathbb{X}(\nu_2) & \cdots & \mathbb{X}(\nu_j) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbb{X}^{(j-1)}(\nu_1) & \mathbb{X}^{(j-1)}(\nu_2) & \cdots & \mathbb{X}^{(j-1)}(\nu_j) \end{bmatrix},$$

iar $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_j$ este o bază a mulțimii polinoamelor de gradul d: $\boldsymbol{C}_d[x, y]$ (vezi [6]).

Dacă $d = 1$, adică în cazul dreptelor invariante, putem lua $\nu_1 = 1, \nu_2 = x, \nu_3 = y$, şi atunci $E_1(\mathbb{X})$ se scrie astfel:

$$E_1(\mathbb{X}) = P \cdot \mathbb{X}(Q) - Q \cdot \mathbb{X}(P).$$

Polinomul $E_d(\mathbb{X})$ are în x şi y gradul

$$d(d+1)(d+2)[8 + 3(d+3)(n-1)]/24$$

(vezi [19]). În cazul sistemelor cubice ($n = 3$) şi a dreptelor invariante ($d = 1$) avem $\deg(E_1(\mathbb{X})) = 8$.

O curbă algebrică invariantă $f = 0$ de gradul d a câmpului vectorial $\mathbb{X}$ are *multiplicitatea geometrică* egală cu m, dacă m este cel mai mare număr natural astfel că există un şir de câmpuri vectoriale $\{\mathbb{X}_r\}_{r\geq 1}$ ce tinde către $\mathbb{X}$ şi fiecare câmp $\mathbb{X}_r$ e de acelaşi grad ca şi $\mathbb{X}$ şi are m curbe algebrice invariante distincte $f_{r1}, f_{r2}, \ldots, f_{rm}$, de grad nu mai mare ca d şi care converg către f când r tinde la infinit.

Fie D un domeniu din $\mathbb{R}^2$ şi $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^1(\mathrm{D}, \mathbb{R})$ $\left(\mu \in \mathrm{C}^1(\mathrm{D}, \mathbb{R})\right)$. Funcția $\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ $(\mu(\mathrm{x}, \mathrm{y}))$ se numeşte integrală primă (factor integrant) al sistemului (1), dacă în D are loc identitatea

$$P(x,y)\frac{\partial F}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial F}{\partial y} \equiv 0$$

$$\left(P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y} \equiv -\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mu(x,y)\right).$$

Fie $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_\mathrm{r}$ $\left(\mathrm{f}_{\mathrm{r}+1} = \exp\left(\frac{\mathrm{g}_{\mathrm{r}+1}}{\mathrm{h}_{\mathrm{r}+1}}\right), \ldots, \mathrm{f}_\mathrm{s} = \exp\left(\frac{\mathrm{g}_\mathrm{s}}{\mathrm{h}_\mathrm{s}}\right)\right)$ nişte curbe algebrice invariante ale (factori exponențiali ai) lui (1). Dacă sistemul (1) are integrală primă (factor integrant) de forma

$$F(x,y) = \prod_{j=1}^{s} f_j^{\alpha_j} \qquad \left(\mu(x,y) = \prod_{j=1}^{s} f_j^{\alpha_j}\right), \tag{2}$$

unde $\alpha_j \in \boldsymbol{C}, j = 1, \ldots, s$, $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_s| \neq 0$, atunci se spune că el este *Darboux integrabil* (privitor la teoria Darboux referitoare la sistemele polinomiale de ecuații diferențiale a se vedea [25]). Darboux [12] a demonstrat că sistemul (1) ce posedă împreună cel puțin $s \geq n(n+1)/2$ curbe algebrice invariante şi factori exponențiali este Darboux integrabil.

Uşor se poate arăta că funcția $F(x, y)$ $\left(\mu(x, y)\right)$ din (2) este pentru sistemul (1) o integrală primă (un factor integrant), dacă şi numai dacă are loc în x şi y identitatea

$$\alpha_1 K_{f_1} + \alpha_2 K_{f_2} + \cdots + \alpha_s K_{f_s} \equiv 0 \tag{3}$$

$$\left(\alpha_1 K_{f_1} + \alpha_2 K_{f_2} + \cdots + \alpha_s K_{f_s} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \equiv 0 \right), \tag{4}$$

unde $K_{f_j}, j = 1,2, \dots, s,$ sunt cofactorii respectivi ai curbelor algebrice invariante $f_j, j = 1, \dots, r,$ şi ai factorilor exponenţiali $f_j, j = r + 1, \dots, s.$

În prezent studiului sistemelor polinomiale cu drepte invariante le sunt dedicate un număr impunător de lucrări ştiinţifice. Astfel, problema estimaţiei numărului de drepte invariante pe care le poate avea un sistem diferenţial polinomial este considerată în [2] unde, în particular, se arată că un sistem cubic ($n = 3$) nedegenerat nu poate avea mai mult de opt drepte invariante afine. Problema coexistenţei dreptelor invariante şi a ciclurilor limită este examinată în {[24]: $n = 2$}, {[15]: $n = 3$}, [14].

Clasificarea sistemelor cubice cu un număr maximal de drepte invariante, enumerându-se şi dreapta de la infinit şi ţinându-se cont de multiplicităţile lor, se găseşte în [16]. Sistemele cubice: cu exact opt şi cu exact şapte drepte invariante distincte afine au fost studiate în [16, 18]; cu drepte invariante de multiplicitate geometrică (paralelă) totală opt (şapte) − în [3-5] ([33]) şi cu şase drepte invariante de două (trei) direcţii − în [20] ([21]).

Familia de sisteme diferenţiale cubice cu infinitul degenerat şi cu drepte invariante de multiplicitate paralelă totală egală cu şase (cinci) a fost investigată în [22,31,32]. În [35] s-a arătat că în clasa sistemelor cubice multiplicitatea algebrică (geometrică) maximală a unei drepte invariante afine (a dreptei de la infinit) este egală cu şapte. În [36] sunt clasificate sistemele cubice cu două drepte invariante reale şi concurente a căror consecutivităţi de multiplicităţi sunt maximale.

În lucrarea de faţă sunt examinate sistemele de forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3, \\ \dot{y} = -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3). \end{cases} \tag{5}$$

În dependenţă de valorile parametrilor sistemului (5) pentru el originea sistemului de cordonate $(0,0)$ este punct singular ori de tipul centru, ori de tipul focar. Acest punct singular are rădăcinile ecuaţiei caracteristice pur imaginare şi este numit *focar slab*. Apare problema determinării acelor condiţii asupra coeficiienţilor lui (5) ce ne asigură existenţa centrului în $(0,0)$. Problema dată se numeşte problema deosebirii centrului de focar sau, pe scurt, *problema centrului*.

Conform [17] sistemul (5) are în originea de coordonate $(0,0)$ centru, dacă şi numai dacă el are într-o vecinătate a lui $(0,0)$ o integrală primă $F(x,y)$ analitică, i.e. $F \in C^\omega$. La fel, sistemul (5) are în $(0,0)$ centru, atunci şi numai atunci când el are factor integrant de forma $\mu(x,y) = 1 + \sum \mu_j(x,y), \quad \mu \in C^\omega$.

Se poate arăta că există o aşa serie formală $F(x,y) = \sum F_j(x,y)$ încât derivata ei în puterea sistemului (5) reprezintă o combinaţie liniară a polinoamelor $\{(x^2 + y^2)^j\}_{j=2}^\infty$, i.e. $\frac{dF}{dt} = \sum_{j=2}^\infty L_{j-1}(x^2 + y^2)^j$. Mărimile $L_{j,}\ j = \overline{1,\infty}$, sunt polinoame de coeficienţii sistemului (5) şi se numesc *mărimile Lyapunov*. De exemplu, prima mărime Lyapunov pentru (5) arată astfel

$$L_1 = (-ac + bd + 2bf - cf - 2ag + dg + 3k - 3l + p - q)/4.$$

Sistemul (5) are în originea de coordonate (0,0) centru, dacă şi numai dacă toate mărimile Lyapunov se anulează, adică $L_j = 0, j = \overline{1, \infty}$. În acest caz funcția $F(x, y)$ este o integrală primă a lui (5).

Problema centrului este complet rezolvată pentru sistemul pătratic ($k = l = m = n = p = q = r = s = 0$) [13] şi pentru sistemul cubic simetric în raport cu originea sistemului de coordonate ($a = b = c = d = f = g = 0$) [26]. Pentru alte sisteme diferențiale polinomiale problema dată a fost soluționată doar în unele cazuri particulare (vezi, de exemplu, [7, 23]).

Coexistența dreptelor invariante şi a punctelor singulare de tip centru a fost stuadiată
în [7-11].

În această lucrare se va arăta că pentru sistemele cubice (5) ce au o dreaptă invariantă afină şi reală de multiplicitatea algebrică patru punctul singular (0,0) e de tip centru, dacă şi numai dacă se anulează prima mărime Lyapunov, i.e. $L_1 = 0$.

2. Clasificarea sistemelor cubice cu focar slab şi o dreaptă invariantă afină, reală şi multiplă

Fie (1) un sistem diferențial cubic ($n = 3$) pentru care punctul (x_0, y_0) este singular ($P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$) de tipul focar slab, adică rădăcinile λ_1 şi λ_1 ale ecuației caracteristice $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$, unde $\sigma = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)$ şi $\Delta = P'_x(x_0, y_0)Q'_y(x_0, y_0) - P'_y(x_0, y_0)Q'_x(x_0, y_0)$, sunt pur imaginare, i.e. $\lambda_{1,2} = \beta i, \beta \in \mathbb{R}^*$, $i^2 = -1$. Cu ajutorul translației $x \to x - x_0, y \to y - y_0$, aducem punctul singular în originea sistemului de coordonate apoi, prin aplicarea unei transformări centro-afine de coordonate ($x \to a_1x + b_1y, y \to c_1x + d_1y, a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$) şi rescalarea timpului ($t \to \omega t, \omega \neq 0$), scriem sistemul (1) sub forma (5). Menționăm, că la rotații ($x \to x\cos\varphi + y\sin\varphi,\ y \to -x\sin\varphi + y\cos\varphi$) şi la omotetii ($x \to \gamma x, y \to \gamma y,\ \gamma \neq 0$) sistemul (5) nu-şi schimbă forma.

Presupunem că (5) are o dreaptă invariantă reală $f = 0$. Cu ajutorul unei transformări de rotație a planului de faze xOy şi a unei omotetii putem face ca dreapta f să fie descrisă de ecuația $x - 1 = 0$. Atunci, în (5) avem $k = -a, m = -1 - c, p = -f, r = 0$, şi deci, sistemul (5) se scrie astfel:

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - x)(y + ax^2 + (c + 1)xy + fy^2), \\ \dot{y} = -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3). \end{cases} \tag{6}$$

Notăm

$\sigma(x,y) = E_1(\mathbb{X})/(x-1),\ H_2(y) = \sigma(x,y)|_{x=1}, H_3(y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}\Big|_{x=1}$ şi $H_4(y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\Big|_{x=1}$,
unde $\mathbb{X}$ este câmpul vectorial asociat sistemului (6).

Lema 1. *Dreapta invariantă $x-1=0$ a sistemului (6) are multiplicitatea nu mai mică ca 2, dacă şi numai dacă are loc cel puţin una dintre următoarele patru serii de condiţii*

$$a = 0,\ c = -2,\ f = 0; \tag{7}$$

$$a = f = l = 0,\ n = 2 - b + c,\ s = -g - 1,\ c + 2 \neq 0; \tag{8}$$

$$a = 0,\ l = f, q = (-4 + 2b - 4c + bc - c^2 - df + 2n + cn)/f,\ s = -g - 1; \tag{9}$$

$$\begin{gathered} l{=}f,\ n = (2a - ab + ac + f + fg + fs)/a, \\ q{=}(2 + a^2 + c - ad + 2g + cg + 2s + cs)/a. \end{gathered} \tag{10}$$

Demonstraţie. Pentru ca dreapta invariantă $x-1=0$ a sistemului (6) să aibă multiplicitatea nu mai mică ca doi este necesar şi suficient ca $H_2(y) \equiv 0$. Avem $H_2(y) = H_{21}(y)H_{22}(y)$, unde $H_{21}(y) = 1 + g + s + dy + qy + (b+n)y^2 + ly^3$, şi $H_{22}(y) = 2 + a^2 + c - ad + 2g + cg - aq + 2s + cs + 4ay - 2aby + 2acy + 2fy + 2fgy - 2any + 2fsy + 4y^2 - 2by^2 + 4cy^2 - bcy^2 + c^2y^2 + 2afy^2 + dfy^2 - 3aly^2 - 2ny^2 - cny^2 + fqy^2 + 4fy^3 + 2cfy^3 - 4ly^3 - 2cly^3 + f^2y^4 - fly^4$. Dacă $H_{21}(y) \equiv 0$, i.e. $l = 0,\ n = -b,\ q = -d,\ s = -1 - g$, atunci (6) este degenerat, adică $\deg(\gcd(P,Q)) > 0$.

Uşor se verifică, că în cazul sistemului (6), identitatea $H_{22}(y) \equiv 0$, echivalentă cu sistemul de egalităţi

$$\begin{aligned} &(c+2)(1+g+s) + a(a-d-q) = 0, \\ &a(c+2) - a(n+b) + f(1+g+s) = 0, \\ &(c+2)(c+2-b-n) + f(2a+d+q) - 3al = 0, \\ &(c+2)(f-l) = 0, \\ &f(f-l) = 0, \end{aligned}$$

are loc dacă se verifică cel puţin una dintre seriile de condiţii (7)−(10).

Lema 2. *Dreapta invariantă $x-1=0$ a sistemului (6) are multiplicitatea nu mai mică ca 3, dacă şi numai dacă are loc cel puţin una dintre următoarele opt serii de condiţii*

$$a = f = l = 0,\ c = -2,\ n = -b,\ s = -1 - g; \tag{11}$$

$$a = f = l = 0, b = 1, d = -q(c+3), g = -2, n = c+1, s = 1, q(c+2) \neq 0; \tag{12}$$

$$\begin{gathered} a = 0,\ b = 1,\ g = (2d + cd - 2f)/f,\ l = f, \\ n = c + 1,\ q = -d,\ s = (f - 2d - cd)/f,\ c \neq -2; \end{gathered} \tag{13}$$

$$b = 1, c = -2, f = 0, g = ad - 2, l = 0, n = -1, q = a - d, s = 1; \tag{14}$$

$$\begin{gathered} b = 1,\ d = (3+c)(2+g)/a,\ f = 0,\ l = 0, \\ n = 1 + c,\ q = (a^2 - g - 2)/a,\ s = 1,\ c \neq -2; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} b{=}1,\ d{=}a(3{+}c)/(2{+}c),\ f{=}0,\ l{=}0,\ n{=}1{+}c,\ q{=}a(1{+}c)/(2+c), \\ s{=}\big(a^2{-}(2{+}c)(1{+}g)\big)/(2+c),\ a^2{-}(2+c)(2+g){\neq}0; \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} d = (b-1)(c+3)/f,\ g = (ab - a - 2f)/f, \\ l = f,\ n = c + 1,\ q = (1 - b + af)/f,\ s = 1; \end{gathered} \tag{17}$$

$$a = (b-1)(3-b+c)/f,\ \ q = \big((b-1)(5-b+2c)-df\big)/f,$$
$$g = ((3-b+c)\big(4-5b+b^2+c-bc+df\big)-2f^2)/f^2,\ \ l = f,\tag{18}$$
$$n = 1+c,\ \ s = (f^2+(3-b+c)(-3+3b-c+bc-df))/f^2.$$

Demonstrație. În fiecare dintre cazurile (7)−(10) vom rezolva în raport cu y identitatea $H_3(y) \equiv 0$.

Cazul (7). În condițiile (7) $H_3(y)$ are forma $H_3(y) = -H_{21}(y)H_{31}(y)$, unde $H_{31}(y) = 1+g+s-by^2-ny^2-2ly^3$. Deoarece $H_{21}(y) \not\equiv 0$, vom cere ca să aibă loc identitatea $H_{31}(y) \equiv 0$ care ne conduce la seria de condiții (11).

Cazul (8). Polinomul $H_3(y)$ arată astfel: $H_3(y) = (c+2)yH_{32}(y)$, unde $H_{32}(y) =$ $-(g+2)(d+q)+(-2d+bd-4q+bq-cq)y^2+2(b-1)(2+c)y^3$. În acest caz identitatea $H_3(y) \equiv 0$ este echivalentă cu identitatea $H_{32}(y) \equiv 0$ care are loc în fiecare dintre următoarele două seturi de condiții:

a) $b = 1,\ d = -q(c+3),\ g = -2;$

b) $b = 1,\ d = 0,\ q = 0.$

Seria de condiții (8) împreună cu cele din a) ne dau condițiile (12), iar împreună cu b) ne conduce la seria de condiții

$$a = d = f = l = q = 0,\ b = 1,\ n = 1+c,\ s = -1-g. \tag{19}$$

Cazul (9). Avem $H_3(y) = \frac{1}{f}y(2+c+fy)\,H_{33}(y)$, unde

$$H_{33}(y) = -(c+2)(g+2)(b-1+n-c-1)-2f(g+2)(b-1+n-c-1)y$$
$$+[(b-c-3)\big((b-1)(3+c)-df\big)-f^2(g+2)$$
$$+(n-c-1)(-10+4b-6c+bc-c^2-df+n-1-c)]y^2$$
$$-2(2+c)f(n-c-1)y^3 - f^2(n-c-1)y^4.$$

Identitatea $H_{33}(y) \equiv 0$ are loc dacă se verifică cel puțin una dintre următoarele trei seturi de condiții:

$$a)\ b = 1,\ g = \frac{2d+cd-2f}{f},\ n = c+1;$$
$$b)\ d = \frac{(b-1)(c+3)}{f},\ g = -2,\ n = c+1;$$
$$c)\ b = c+3,\ g = -2,\ n = c+1.$$

Adăugând la ele (9), obținem respectiv (13) şi seriile de condiții:

$$a = 0,\ d = \tfrac{(b-1)(c+3)}{f},\ g = -2,\ l = f, n = c+1,\ q = \tfrac{1-b}{f},\ s = 1; \tag{20}$$

$$a = 0, b = c+3, g = -2, l = f, n = c+1, q = \tfrac{(c+2)^2-df}{f}, s = 1. \tag{21}$$

Cazul (10). În acest caz $H_3(y) = (a+2y+cy+fy^2)H_{34}(y)/a^2$, unde

$$H_{34}(y) = -a\Big((2+g)\big((3+c)(2+g)-ad\big)+(s-1)\big((4+c)(2+g)+a^2-ad+$$
$$s-1\big)\Big)+a\big[2a\big(ad+(b-c-4)(1+g+s)\big)-2f(2+g)(1+g+s)\big]y+$$
$$\big[a(b-1)\big(3a^2+(2+c)(1+g+s)\big)+f\big((g+2)(g+2-3a^2-ad)+$$

$(s-1)(s-1+2(g+2)-2a^2-ad)\big)+a(2+c)\big(ad-(c+3)(1+g+s)\big)\big]y^2+$
$2a(2+c)\big(a(b-1)-f(s+g+1)\big)y^3+af\big(a(b-1)-f(s+g+1)\big)y^4.$

Identitatea $H_{34}(y)\equiv 0$ are loc dacă:

$a)$ $b=1, c=-2, f=0, g=ad-2, s=1;$

$b)$ $b=1, d=(c+3)(g+2)/a, f=0, s=1;$

$c)$ $b=1, d=a(c+3)/(c+2), f=0, s=(a^2-(c+2)(g+1))/(c+2);$

$d)$ $d=(b-1)(c+3)/f, g=(a(b-1)-2f)/f, s=1;$

$e)$ $a=(b-1)(3-b+c)/f, s=\big((3-b+c)\big((-1+b)(3+c)-df\big)+f^2\big)/f^2,$
$g=(-2f^2+(3-b+c)\big((b-1)(-4+b-c)+df\big)/f^2.$

Egalitățile $a)-e)$, împreună cu cele din (10), ne conduc la condițiile (14)-(18), respectiv.

Menționăm, că seria de condiții (19) (respectiv (20); (21)) se conține în seria de condiții (16) (respectiv, (17); (18)).

Lema 3. *Dreapta invariantă $x-1=0$ a sistemului (6) are multiplicitatea nu mai mică decât 4, dacă şi numai dacă are loc cel puțin una dintre următoarele trei serii de condiții*

$$a=f=l=0, b=2, c=g=n=-2, s=1; \tag{22}$$

$$a=d=0, b=1, c=g=-2, l=f, n=-1, q=0, s=1; \tag{23}$$

$$a=\frac{(b-1)^2}{f},\ c=2b-4,\ d=\frac{2(b-1)^2}{f},\ g=\frac{(b-2)(b-1)^2-2f^2}{f^2},$$
$$l=f,\ n=2b-3,\ q=\frac{(b-1)^2}{f},\ s=\frac{(b-1)^2+f^2}{f^2}. \tag{24}$$

Demonstrație. Vom cere ca în fiecare dintre seriile de condiții (11)-(18) să aibă loc în raport cu y identitatea $H_4(y)\equiv 0$.

Condițiile (11). În aceste condiții $H_4(y)$ arată astfel: $H_4(y)=(d+q)yH_{41}(y)$, unde $H_{41}(y)=2+g+(2-b)y^2$. Dacă $d+q=0$, atunci sistemul {(6), (11)} este degenerat, iar dacă $H_{41}(y)\equiv 0$, obținem seria de condiții (22).

Condițiile (12). În cazul dat $H_4(y)=-(c+2)^2y(q+y+2qy^2)$. Evident, $H_4(y)\not\equiv 0$. Prin urmare, dreapta invariantă $x=1$ nu poate avea multiplicitatea algebrică mai mare ca trei.

Condițiile (13). Polinomul $H_4(y)$ are forma: $H_4(y)=(c+2+fy)\big((c+2)^2d^2+2(c+2)d^2fy+f\big((c+2)(3d+cd-f)+d^2f\big)y^2+2(c+2)df^2y^3+df^3y^4\big)/f^2$. Uşor se observă, că $H_4(y)\not\equiv 0$.

Condițiile (14). Avem $H_4(y)=a^2(-2+d^2+3dy)\equiv 0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow \deg(\gcd(P,Q))>0$.

Condițiile (15). În aceste condiții $H_4(y)=-(a+2y+cy)(2a^2-(g+2)(4+c+g)+a\big(c+2-3(g+2)\big)y-2(c+2)(g+2)y^2/a\not\equiv 0$.

Condițiile (16). Avem

$$H_4(y) = (c+2)\big((g+2)^2 + \big((g+2)(c+3) - c - 2\big)y^2\big) +$$
$$\frac{a}{2+c}(-4a - 3ac - ag - acg + 16y - 2a^2y + 12cy - 2a^2cy + 2c^2y + 12gy$$
$$+ 10cgy + 2c^2gy + 4ay^2 - ac^2y^2) + 2a(c+2)y^3 \not\equiv 0.$$

Condițiile (17). Polinomul $H_4(y)$ arată astfel: $H_4(y) = \frac{1}{f^2}(a + 2y + cy + fy^2)H_{42}(y)$, unde $H_{42}(y) = (b-1)(-a + ab + 2f + cf) - 2af^2 + f\big((b-1)(3a + 2f) - f(c+2)\big)y - (b-1)(-5 + b - 2c)fy^2 + (b-1)f^2y^3$. Deoarece $f \neq 0$, identitatea $H_{42}(y) \equiv 0$ are loc atunci şi numai atunci când au loc egalitățile $a = 0, b = 1, c = -2$, care, împreună cu (17), ne dau (23).

Condițiile (18). Polinomul $H_4(y)$ are forma: $H_4(y) = (3 - \mathrm{b} + \mathrm{c} + \mathrm{f\,y})H_{43}(\mathrm{y})/f^4$, unde

$H_{43}(y) = f\alpha(b + \beta - 1)\Big(f\alpha\beta + (b-1)\big((b-1)(b-2) + f\alpha - 3\beta + b\beta\big)\Big) - (b-1)^2\beta(f^2 + (b-2)(b + \beta - 1)) + 2f[f\alpha(b + \beta - 1)\big(f\alpha + (b-1)(2b + \beta - 3)\big) - (b-1)\beta(f^2 + (b-1)(b + \beta - 1))]y + f^2[f\alpha\big((b-1)(6b-7) + f\alpha - 5\beta + 6b\beta + \beta^2\big) - \beta(f^2 + (b-1)(b + \beta))]y^2 + 2f^4\alpha[2(b-1) + \beta]y^3 + f^5\alpha y^4$,

unde $\alpha = d - (b-1)(c+2)f$, $\beta = c - 2b + 4$. În cazul dat identitatea $H_4(y) \equiv 0$ este echivalentă cu identitatea $H_{43}(y) \equiv 0$, care are loc dacă $\alpha = \beta = 0$, adică $c = 2b - 4, d = 2(b-1)^2/f$. Aceste egalități, împreună cu (18), ne dau seria de condiții (24). □

Lema 4. *În clasa sistemelor cubice cu focar slab multiplicitatea maximală a unei drepte invariante reale nu este mai mare ca 4. Cu exactitatea unei transformări centro-afine şi rescalarea timpului orice sistem cubic cu focar slab şi cu o dreaptă invariantă de multiplicitatea 4 poate fi scris sub una dintre urmpătoarele 3 forme*:

$$\dot{x} = (x-1)^2y,\ \ \dot{y} = -x + 2x^2 - dxy - 2y^2 - x^3 - qx^2y + 2xy^2,\quad d \neq 0; \tag{25}$$
$$\dot{x} = (x-1)y(x - fy - 1),\ \ \dot{y} = -x + 2x^2 - y^2 - x^3 + xy^2 - fy^3,\ \ f \neq 0; \tag{26}$$
$$\begin{aligned} &\dot{x} = -(x-1)\big((b-1)^2x^2 + (2b-3)fxy + fy(1+fy)\big)/f,\\ &\dot{y} = -((b-1)^2x^2(b+2+x) + (b-1)^2fx(2+x)y + f^3y^3\\ &\qquad + f^2((x-1)^2x + (b - 3x + 2bx)y^2))/f^2,\quad f(b-1) \neq 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Demonstrație. În condițiile (22) (respectiv, (23); (24)) sistemul (6) capătă forma (25) (respectiv, (26); (27)). Pentru fiecare dintre aceste sisteme polinomul $E_1(\mathbb{X})$ arată astfel: $E_1(\mathbb{X}) = (x-1)^4\big(A_0(y) + A_1(y)(x-1)\big)$. În cazul (25) avem $A_0(y) = -y(d + q + (d + 2q)y^2 - 2y^3)$; în cazul (26): $A_0(y) = -f^2y^4$, iar în cazul (27):

$$\begin{aligned} A_0(y) = (1 - b - fy)(&(b-1)^2(8b - 5b^2 + b^3 - 3f^2 + bf^2 - 4)\\ &+ (b-1)f(12b - 11b^2 + 3b^3 - 5f^2 + 3bf^2 - 4)y\\ &+ 3(b-1)f^2((b-1)^2 + f^2)y^2 + f^3((b-1)^2 + f^2)y^3)/f^4. \end{aligned}$$

În toate cazurile $A_0(y) \not\equiv 0$.

3. Integrabilitatea sistemelor (25), (26) şi (27)

Sistemul (25). Acest sistem are dreapta invariantă $f_1 \equiv x - 1 = 0$ şi factorii exponenţiali $f_2 = \exp[1/(x-1)]$, $f_3 = \exp[(\mathrm{d} + \mathrm{q} + 2\mathrm{y} - 2\mathrm{xy})/(x-1)^2]$, $f_4 = \exp[(-d - 4q + 3dx + 6qx + 6y - 6xy)/(x-1)^3]$, care au respectiv cofactorii $K_{f_1}(x,y) = y(x-1), K_{f_2}(x,y) = -y, K_{f_3}(x,y) = 2(-x + dy + qy + x^2 + qxy - y^2)$, $K_{f_4}(x,y) = 6(x + qy)$. Pentru (25) prima mărime Lyapunov arată astfel: $L_1 = -2q$. Dacă $q \neq 0$, atunci (0,0) este focar şi sistemul (25) nu este integrabil în $(0,0)$, adică nu există o aşa vecinătate a lui (0,0) în care (25) ar avea integrală primă analitică (factor integrant analitic) ce nu depinde de t, i.e. de forma $F(x,y)(\mu(x,y))$. În cazul $q = 0$ din (4) aflăm $\alpha_1 = -6, \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \alpha_4 = d/6$, adică

$$\mu(x,y) = \frac{1}{(x-1)^6}\exp\left[\frac{\mathrm{d}\,(-\mathrm{d} + 3\,\mathrm{d}\,\mathrm{x} + 6\,\mathrm{y} - 6\,\mathrm{x}\,\mathrm{y})}{6\ (\mathrm{x}-1)^6}\right]$$

este factor integrant pentru $\{(25),\ q = 0\}$, şi, prin urmare, în cazul dat punctul singular $(0,0)$ este centru pentru (25).

Sistemul (26). Avem dreapta invariantă $f_1 \equiv x - 1 = 0$, factorii exponenţiali

$$f_2 = exp\left[\frac{y}{x-1}\right], f_3 = \exp\left[\frac{y^2}{(x-1)^2}\right], f_4 = \exp\left[\frac{2 - 3x + x^3 + fx^3}{(x-1)^3}\right]$$

şi cofactorii

$$K_{f_1}(x,y) = y(x - fy - 1), K_{f_2}(x,y) = -x(x-1),$$
$$K_{f_3}(x,y) = -2xy, K_{f_4}(x,y) = -3y(1 + fy).$$

Pentru aceşti cofactori identitatea (3) are loc dacă $\alpha_1 = 6, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = -2$. Aşa dar, sistemul are integrala primă

$$F(x,y) = (x-1)^6 \exp\left[\frac{4 - 6x + 2x^3 + 3y^2 - 3xy^2 + 2fy^3}{(1-x)^3}\right]$$

şi deci, în $(0,0)$ avem centru.

Sistemul (27). Sistemul dat are dreapta invariantă $f_1 \equiv x - 1 = 0$, factorii exponenţiali

$$f_2 = \exp\left[\frac{-1 + b + fy}{f(-1+x)}\right], f_3 = \exp\left[\frac{1 - 2b + b^2 + 2bfy - 2fxy + f^2y^2}{(-1+x)^2}\right],$$

$$f_4 = \exp\left[\frac{1}{3(x-1)^3}\cdot(3\mathrm{x} - 3\mathrm{b}^2\mathrm{x} - 6\mathrm{f}^2\mathrm{x} - 12\mathrm{bx}^2 + 12\mathrm{b}^2\mathrm{x}^2 + 12\mathrm{f}^2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}^3 + 6\mathrm{bx}^3 - 3\mathrm{b}^2\mathrm{x}^3 - 2\mathrm{b}^3\mathrm{x}^3 - 6\mathrm{f}^2\mathrm{x}^3 - 3\mathrm{fy} + 3\mathrm{bfy} - 3\mathrm{fx}^2 + 9\mathrm{bfx}^2\mathrm{y} - 6\mathrm{b}^2\mathrm{fx}^2\mathrm{y} + 6\mathrm{f}^2\mathrm{xy}^2 - 6\mathrm{bf}^2\mathrm{xy}^2 - 2\mathrm{f}^3\mathrm{y}^3)\right],$$

cofactorii

$$K_{f_1}(x,y) = -\frac{fy+(b-1)^2x^2+(2b-3)fxy+f^2y^2}{f},$$

$$K_{f_2}(x,y) = \frac{f^2x+fy-(b-1)^2x^2-f^2x^2-bfy}{f^2},$$

$$K_{f_3}(x,y) = \frac{2(-bf^2x+(b-1)^2(fy+x^2)+f^2x^2-f((b-1)^2+f^2)xy)}{f},$$

$$K_{f_4}(x,y) = \frac{1}{f}((b-1)f^2x + f(b^2+2f^2-1)y$$

$$+((b-1)^2+f^2)((b-1)x(2bx-x+4fy)+2f^2y^2))$$

şi integrala primă $F(x,y) = f_1^{\alpha_1}f_2^{\alpha_2}f_3^{\alpha_3}f_4^{\alpha_4}$, unde $\alpha_1 = 2((b-1)^2+f^2)$, $\alpha_2 = f(b+1), \alpha_3 = \alpha_4 = 1$.

Din cele expuse mai sus rezultă următoarea teoremă.

Teorema 1. *Pentru ca punctul singular* $(0,0)$ *al sistemului diferențial cubic* (5) *ce are o dreaptă invariantă reală de multiplicitatea algebrică patru să fie de tip centru este necesar şi suficient ca să se anuleze prima mărime Lyapunov* ($L_1 = 0$).

Bibliografie

1. Amelkin V.V., Lukashevich N.A., Sadovskii A.P. Non-linear oscillations in the systems of second order. Belorusian University Press. Belarus. 1982 (în rusă).
2. Artes J., Grünbaum B., Llibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems. Pacific J. of Math. 184(1998), No. 2, pp. 207-230.
3. Bujac C. One subfamily of cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with two distinct real infinite singularities. Bul. Acad. Ştiințe Repub. Mold., Mat., 2015, No. 1(77), pp. 48-86.
4. Bujac C., Vulpe N. Cubic systems with invariant straight lines of total multiplicity eight and with three distinct infinite singularities. Qual. Theory Dyn. Syst. 14(2015), No. 1, pp. 109-137.
5. Bujac C., Vulpe N. Cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with four distinct infinite singularities, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 423(2015), No. 2, pp. 1025-1080.
6. Christopher C., Llibre J., Pereira J.V. Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields. Pacific J. of Math., 229(2007), No. 1, pp. 63-117.
7. Cozma D. Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics. Ştiința, Chişinău, 2013, 240 p.
8. Cozma D., Şubă A. Conditions of center for some cubic systems with three linear particular integrals. Scripta Scientiarum Mathematicarum. Tomus 1, Fasciculus 1. Chişinău, 1997. pp. 82-94.

9. Cozma D., Şubă A. The solution of the problem of center for cubic differential systems with four invariant straight lines. An. Ştiinţ. Univ. „Al. I. Cuza" (Iaşi). 44(1998), suppl., pp. 517-530.
10. Cozma D., Şubă A. Solution of the problem of the centre for a cubic differential system with three invariant straight lines. Qualitative Theory of Dynamical Systems. Universitat de Lleida. Spaine. 2(2001), no. 1. pp. 129-143.
11. Cozma D., Şubă A. Solution of the problem of the centre for cubic differential system with three invariant straight lines in generic position. Qualitative Theory of Dynamical Systems. Universitat de Lleida. Spaine. 6(2005). pp. 45-58.
12. Darboux G. Memoiare sur les équations differentielles algébriques du premier ordre et du premier degré. Bull. Sci. Math. 1878, pp. 60-96, pp. 124-144, pp. 152-200.
13. Dulac H. Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre. Bull. Sciences Math. 32(1908). pp. 230-252.
14. Guangjian Suo, Jifang Sun. The $n-$degree differential system with $(n-1)(n+1)/2$ straight line solutions has no limit cycles. Proc. of Ordinary Differential Equations and Control Theory, Wuhan. 1987. pp. 216-220 (în chineză).
15. Kooij R. Cubic systems with four line invariants, including complex conjugated lines. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 118(1995), no. 1. pp. 7-19.
16. Llibre J., Vulpe N. Planar cubic polynomial differential systems with the maximum number of invariant straight lines. Rocky Mountain J. Math., 36(2006), no. 4, pp. 1301-1373.
17. Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion. Gostekhizdat, Moscow, 1950 (în rusă).
18. Lyubimova R.A. About one differential equation with invariant straight lines. Differential and integral equations, Gorky Universitet. 8(1984), pp. 66-69; 1(1997), pp. 19-22 (în rusă).
19. Mironenko V. I. Linear dependence of functions along solutions of differential equations. Beloruss. Gos. Univ., Minsk, 1981 (în rusă).
20. Puţuntică V., Şubă A. The cubic differential system with six real invariant straight lines along two directions. Studia Universitatis. 2008, No. 8(13), pp. 5-16.
21. Puţuntică V., Şubă A. The cubic differential system with six real invariant straight lines along three directions. Bulletin of ASRM. Mathematics. 2009, No. 2(60), pp. 111-130.
22. Repeşco V. Cubic systems with degenerate infinity and straight lines of total parallel multiplicity six. ROMAI J., 9(2013), no. 1, pp. 133-146.
23. Romanovski V.G., Shafer D.S. The center and cyclicity problems: a computational algebra approach. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2009.

24. Rychkov G.S. The limit cycles of the equation $u(x+1)du = (-x+ax^2+bxu+cu+du^2)dx$. Differentsial'nye Uravneniya. 8(1972), no. 12. pp. 2257-2259.
25. Schlomiuk D. Elementary first integrals and algebraic invariant curves of differential equations. Expositiones Mathematicae, 11(1993). pp. 433-454.
26. Sibirski C. The number of limit cycles in the neighborhood of a singular point. Diff. Uravneniya 1(1965), no. 1. pp. 51-66 (în rusă).
27. Şubă A. Solution of the problem of the center for cubic systems with a bundle of three invariant straight lines. Buletinul Academiei de Ştiințe a Rep. Moldova, Matematica, 2003, no. 1(41). pp. 91-101.
28. Şubă A., Cozma D. Solution of the problem of the center for cubic systems with two homogeneous and one non-homogeneous invariant straight lines. Buletinul Academiei de Ştiințe a Rep. Moldova, Matematica, 1999, no.1(29). pp. 37-44.
29. Şubă A., Cozma D. Solution of the problem of the centre for cubic differential system with three invariant straight lines two of which are parallel. Buletinul Academiei de Ştiințe a Rep. Moldova, Matematica, 2001, no. 2(36). pp. 75-86.
30. Şubă A., Cozma D. Solution of the problem of the center for cubic differential system with three invariant straight lines in generic position. Qual. Th. of Dyn. Systems. 6(2005). pp. 45-58.
31. Şubă A., Repeşco V. Configurations of invariant straight lines of cubic differential systems with degenerate infinity. Scientific Bulletin of Chernivtsi University, Series „Mathematics”. 2(2012), no. 2-3. pp. 177-182.
32. Şubă A., Repeşco V. Cubic systems with degenerate infinity and invariant straight lines of total parallel multiplicity five. Buletinul Academiei de Ştiințe a Rep. Moldova, Matematica, 2016, no. 3(82). pp. 38-56.
33. Şubă A., Repeşco V., Puțuntică V. Cubic systems with seven invariant straight lines of configuration (3,3,1). Buletinul Academiei de Ştiințe a Rep. Moldova, Matematica, 2012, no. 2(69). pp. 81-98.
34. Şubă A., Repeşco V., Puțuntică V. Cubic systems with invariant affine straight lines of total parallel multiplicity seven. Electron. J. Diff. Equ., vol. 2013 (2013), no. 274. pp. 1-22. http://ejde.math.txstate.edu/
35. Şubă A., Vacaraş O. Cubic differential systems with an invariant straight line of maximal multiplicity. Annals of the University of Craiova. Mathematics and Computer Science Series, 42(2015), no. 2. pp. 427-449.
36. Vacaraş O. Cubic differential systems with two affine real non-parallel invariant straight lines of maximal multiplicity. Bul. Acad. Ştiințe a Repub. Mold., Mat., 2015, no. 3(79). pp. 79–101.