

Universitatea de Stat din Tiraspol

ISSN 2537-6284

ACTA

ET

COMMENTATIONES

Științe Naturale și Exacte

REVISTĂ ȘTIINȚIFICĂ

Nr. 2(2), 2016

Chișinău 2016

Fondator: UNIVERSITATEA DE STAT DIN TIRASPOL

Redactor-șef: Mitrofan CIOBANU, academician, doctor habilitat, profesor universitar, UST

COLEGIUL DE REDACȚIE:

Eduard COROPCEANU, doctor, conferențiar universitar, UST
Lora MOȘANU-ȘUPAC, doctor, conferențiar universitar, UST
Alexander ARHANGEL'SKII, academician, doctor habilitat, profesor universitar, Rusia
Valeriu CANȚER, academician, doctor habilitat, profesor universitar, AȘM
Gheorghe DUCA, academician, doctor habilitat, profesor universitar, AȘM
Teodor FURDUI, academician, doctor habilitat, profesor universitar, AȘM
Radu MIRON, academician, doctor habilitat, profesor universitar, România
Ion TODERAȘ, academician, doctor habilitat, profesor universitar, AȘM
Costantin GAINDRIC, academician, doctor habilitat, profesor universitar, AȘM
Yaroslav BIHUN, doctor habilitat, profesor universitar, Ucraina
Ioan DONISĂ, doctor, profesor universitar, România
Vladimir IVANOV-OMSKI, doctor habilitat, profesor universitar, Rusia
Ionel MANGALAGIU, doctor, profesor universitar, România
Costică MOROȘANU, doctor, profesor universitar, România
Laurențiu CALMUȚCHI, doctor habilitat, profesor universitar, UST
Liubomir CHIRIAC, doctor habilitat, profesor universitar, UST
Tudor COZARI, doctor habilitat, profesor universitar, UST
Dumitru COZMA, doctor habilitat, profesor universitar, UST
Vasile GRATI, doctor habilitat, profesor universitar, UST
Mihail POPA, doctor habilitat, profesor universitar, IMI AȘM
Valentin SOFRONI, doctor habilitat, profesor universitar, UST
Alexandru ȘUBĂ, doctor habilitat, profesor universitar, IMI AȘM
Eugenia CHIRIAC, doctor, conferențiar universitar, UST
Viorica COADĂ, doctor, conferențiar universitar, UST
Alexandru CIOCÎRLAN, doctor, conferențiar universitar, UST
Petru PRUNICI, doctor, conferențiar universitar, UST
Igor POSTOLACHI, doctor, conferențiar universitar, UST
Nina VOLONTIR, doctor, conferențiar universitar, UST
Nicolae ALUCHI, doctor, conferențiar universitar, UST
Andrei BRAICOV, doctor, conferențiar universitar, UST
Ion MIRONOV, doctor, conferențiar universitar, UST

Redactor Tehnic: Dorin PAVEL, doctor în științe fizico-matematice

Redactori literari: Grigore CHIPERI, doctor în filologie;
Olga GHERLOVAN, doctor în filologie;
Natalia SPANCIOC, doctor, lector superior universitar.
Vera ZDRAGUȘ, lector superior universitar.

Adresa redacției: str. Gh. Iablocichin, 5 Tel. (373) 22 754924
Mun. Chișinău, MD2069, Republica Moldova (373) 22 244085
e-mail: reviste@ust.md Fax: (373) 22 754924

Tiparul: Tipografia Universității de Stat din Tiraspol, 100 ex.
© Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul la Chișinău)
ISSN 2537-6284

CUPRINS

AFANAS Dorin. Aplicarea relațiilor metrice în triunghi la determinarea extremelor funcțiilor	4
ARAMĂ Efim, GHEORGHITĂ Eugeniu, MIHĂLACHE Alexei, PALACHI Leonid, CARAMAN Mihail, MELINTE Victoria. Structura spectrelor de reflexie ale antimonidului de galiu dopat cu fier.....	17
CIOBANU Mitrofan. Omologii și structuri abstracte	20
CIOBANU Mitrofan, PAVEL Dorin. Referitor la studiul topologiilor de rețea	33
GHEORGHITĂ Andrian, GHEORGHITĂ Eugeniu, GUȚULEAC Leonid, CARAMAN Mihail, KOROLEVSKI Boris, UNTILA Pantelei, MELINTE Victoria. Comportarea nichelului în antimonidul de galiu ca dopant.....	44
MUNTEAN Fiodor, GHEORGHITĂ Eugeniu, MUNTEANU Viorel, BEJAN Victoria, CHISTOL Vitalie. Particularitățile efectelor galvanomagnetice în câmpuri magnetice puternice în bicristale de torsiune ale izolatorului topologic 3D $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($0.07 \leq x \leq 0.2$)	55
NEAGU Vasile, Asupra compacității unor operatori integrali singulari.....	62
TURUTA Silvia, Lotka-Volterra cubic differential systems with (1:-2)-singularity and invariant affine straight lines of two directions of total algebraic multiplicity six	71
ПЕЛИН Сергей, ПЕЛИН Николае. Особенности построения вычислительного механизма языков логического программирования	88
ПЕЛИН Николае, ПЕЛИН Сергей. Вопросы теории и практики логического программирования.....	101
CIOBAN Mitrofan. Referitor la activitatea științifică a profesorului Alexandru Șubă	114
ȘUBĂ Alexandru. Matematica în viața mea	119

APLICAREA RELAȚIILOR METRICE ÎN TRIUNGHI LA DETERMINAREA EXTREMELOR FUNCȚIILOR

Dorin AFANAS, dr., conf. univ.
Universitatea de Stat din Tiraspol
email: dorinafanas@rambler.ru

Key words: minimum, maximum, extremes of function, cosines theorem, metric relations, triangle.

Abstract. In this paper the application of metric relations in triangle for determination of extremes of functions is studied.

The proposed method is efficient when the traditional methods leads to cumbersome calculations.

1. Noțiuni preliminare

Considerăm funcția $f: I \rightarrow R$ (intervalul $I \subseteq R$) de o singură variabilă x .

Definiția 1.1. *Punctul $x_0 \in I$ se numește punct de minim local al funcției f dacă există o vecinătate V a lui x_0 , astfel încât are loc relația $f(x_0) \leq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap I$. În acest caz valoarea funcției în punctul x_0 , adică $f(x_0)$ se numește minim local al funcției f [1, p. 137].*

Definiția 1.2. *Punctul $x_0 \in I$ se numește punct de maxim local al funcției f dacă există o vecinătate V a lui x_0 , astfel încât are loc relația $f(x_0) \geq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap I$. În acest caz valoarea funcției în punctul x_0 , adică $f(x_0)$ se numește maxim local al funcției f [1, p. 137-138].*

Punctele de minim local și de maxim local ale funcției $f(x)$ se numesc *puncte de extrem local* ale acestei funcții.

Valorile funcției $f(x)$ în punctele ei de extrem local se numesc *extremele locale* ale acestei funcții.

Definiția 1.3. *Punctul $x_0 \in I$ se numește punct de minim global al funcției f dacă are loc relația $f(x_0) \leq f(x)$ pentru orice $x \in I$, iar valoarea funcției în punctul x_0 , adică $f(x_0)$ se numește minim global al funcției f pe intervalul I [1, p. 138].*

Definiția 1.4. *Punctul $x_0 \in I$ se numește punct de maxim global al funcției f dacă are loc relația $f(x_0) \geq f(x)$ pentru orice $x \in I$, iar valoarea funcției în punctul x_0 , adică $f(x_0)$ se numește maxim global al funcției f pe intervalul I [1, p. 138].*

Punctele de minim global și de maxim global ale funcției $f(x)$ se numesc *puncte de extrem global* ale acestei funcții.

Valorile funcției $f(x)$ în punctele ei de extrem global se numesc *extremele globale* ale acestei funcții.

Observația 1.5. Un punct de minim (maxim) local nu este în mod necesar un punct de minim (maxim) global, iar un punct de minim (maxim) global este, în același timp, și un punct de minim (maxim) local.

Observația 1.6. Este posibil ca un minim local al unei funcții să fie mai mare decât un maxim local al aceleiași funcții.

De obicei minimul unei funcții se notează cu m , iar maximul ei – cu M .

Considerăm funcția $f: I \rightarrow R$ (intervalul $I \subseteq R$) derivabilă pe intervalul I .

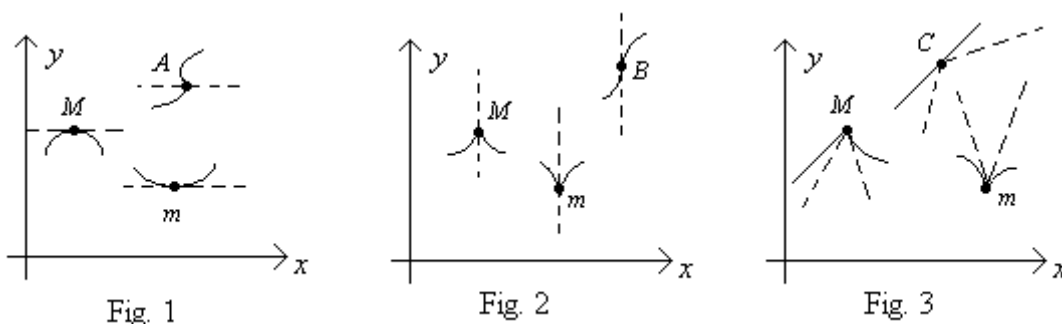
Definiția 1.7. Punctele în care derivata f' ia valoarea zero se numesc puncte critice ale funcției f .

Punctul x_0 va fi un punct critic, dacă are loc una din următoarele trei condiții:

1) $f'(x_0) = 0$; 2) $f'(x_0) = \infty$; 3) $f'(x_0)$ nu există, iar însuși funcția $f(x)$ în punctul $x = x_0$ este definită.

Geometric aceste condiții ne indică că:

- în punctul critic tangenta la graficul funcției este paralelă cu axa (Ox), dacă se realizează condiția 1 (vezi fig. 1);
- în punctul critic tangenta la graficul funcției este paralelă cu axa (Oy), dacă se realizează condiția 2 (vezi fig. 2);
- tangenta la graficul funcției nu există, dacă se realizează condiția 3 (vezi fig. 3).



Admitem că funcția $f: I \rightarrow R$ (intervalul $I \subseteq R$) este derivabilă pe intervalul I , iar x_0 este un punct interior lui I în care $f'(x_0) = 0$, adică x_0 este un punct critic al acestei funcții.

Primul criteriu suficient de extrem al funcției $f(x)$. Dacă la trecerea prin punctul critic x_0 prima derivată $f'(x)$ își schimbă semnul, atunci acest punct critic este un punct de extrem.

• Punctul x_0 este un punct de minim local al funcției $f(x)$, dacă pentru orice $x \in I$ au loc relațiile: $f'(x) < 0$ pentru $x < x_0$ și $f'(x) > 0$ pentru $x > x_0$. Se notează: $\searrow f(x_0) \nearrow$.

• Punctul x_0 este un punct de maxim local al funcției $f(x)$, dacă pentru orice $x \in I$ au loc relațiile: $f'(x) > 0$ pentru $x < x_0$ și $f'(x) < 0$ pentru $x > x_0$. Se notează: $\nearrow f(x_0) \searrow$.

• Dacă derivata $f'(x)$ are același semn la stînga și la dreapta lui x_0 , atunci x_0 nu este punct de extrem al acestei funcții.

Aplicînd **primul criteriu suficient de extrem al funcției $f(x)$** este comod de utilizat așa-numitul *tablou de variație al funcției*.

	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x_2 < x < x_3$	x_3	$x_3 < x < x_4$	etc.
$f'(x)$		-	0	+	<i>n.e.</i>	+	...
$f(x)$		↘	<i>m</i>	↗	<i>n.d.</i>	↗	...

Pe linia întâi a acestui tablou se indică domeniul de definiție al funcției și punctele în care derivata ei se anulează sau nu există. Pe linia a doua – semnele derivatei funcției pe intervalele pe care derivata ei se anulează. Pe ultima linie se indică descreșterea (↘), creșterea (↗) funcției, precum și extremele ei. Inscripția *n.e.* – înseamnă, că derivata nu există, iar inscripția *n.d.* – înseamnă că funcția nu este definită.

Menționăm, că extremele globale ale unei funcții $f : [a, b] \rightarrow R$ derivabile pe intervalul (a, b) pot fi determinate aplicînd algoritmul:

- I. Se calculează $f'(x)$.
- II. Se află punctele critice ale funcției $f(x)$, adică se rezolvă ecuația $f'(x) = 0, x \in (a, b)$.
- III. Se calculează valorile funcției $f(x)$ în punctele critice determinate și se compară cu valorile acesteia la extremitățile intervalului: cea mai mică (mare) dintre aceste valori va fi minimul (maximul) global al funcției $f(x)$ pe $[a, b]$.

În unele cazuri este dificil de a stabili semnul derivatei la stînga și la dreapta punctelor critice. În asemenea cazuri se utilizează alt criteriu suficient de extrem, fără a mai studia semnul funcției $f'(x)$, cu condiția că funcția $f(x)$ posedă derivate de ordin superior pe intervalul I .

Al doilea criteriu suficient de extrem al funcției $f(x)$. *Punctul critic $x_0 \in (a, b)$ este un punct de extrem al funcției $f : (a, b) \rightarrow R$, dacă prima derivată ce nu primește valoarea zero în acest punct are ordin par. Dacă această derivată de ordin par este pozitivă (negativă), atunci punctul critic $x_0 \in (a, b)$ este un punct de minim (maxim) pentru funcția $f(x)$.*

De exemplu, dacă au loc condițiile: $f'(x_0) = 0$ și $f''(x_0) \neq 0$, atunci pentru $f''(x_0) > 0$ avem $f(x_0) = m$ (minim), iar pentru $f''(x_0) < 0$ avem $f(x_0) = M$ (maxim).

Considerăm funcția de două variabile $z = f(x; y)$ definită în careva vecinătate a punctului $(x_0; y_0)$ [3, p. 319].

Definiția 1.8. *Vom spune că funcția $z = f(x; y)$ are în punctul $(x_0; y_0)$ minim (maxim) local dacă există o astfel de vecinătate a punctului $(x_0; y_0)$ în care pentru orice punct $(x; y)$ se verifică inegalitatea $f(x; y) \geq f(x_0; y_0)$ ($f(x; y) \leq f(x_0; y_0)$).*

Din definiția 1.8 rezultă că dacă funcția $z = f(x; y)$ are extrem în punctul $(x_0; y_0)$, atunci creșterea totală $\Delta z = f(x; y) - f(x_0; y_0)$ a acestei funcții în punctul $(x_0; y_0)$ satisface în careva vecinătate a punctului $(x_0; y_0)$ una din următoarele condiții: $\Delta z \geq 0$ (în cazul minimului local); $\Delta z \leq 0$ (în cazul maximului local).

Reciproc, dacă în careva vecinătate a punctului $(x_0; y_0)$ este satisfăcută una din inegalitățile de mai sus, atunci funcția are extrem în punctul $(x_0; y_0)$.

Criteriul necesar de extrem al funcției $f(x; y)$. Dacă funcția $f(x; y)$ are extrem în punctul $(x_0; y_0)$ și admite derivate parțiale de ordinal întâi, atunci aceste derivate sunt egale cu zero, adică $f'_x(x_0; y_0) = f'_y(x_0; y_0) = 0$.

Notăm [4, p. 406]: $r = f''_{x^2}(x_0; y_0)$, $s = f''_{xy}(x_0; y_0)$, $t = f''_{y^2}(x_0; y_0)$ și $\Delta = rt - s^2$.

Criteriul suficient de extrem al funcției $f(x; y)$. Dacă în punctul critic $(x_0; y_0)$ avem:

- $\Delta > 0$ și $r > 0$, atunci $(x_0; y_0)$ este un punct de minim;
- $\Delta > 0$ și $r < 0$, atunci $(x_0; y_0)$ este un punct de maxim;
- $\Delta < 0$, atunci în punctul $(x_0; y_0)$ nu există extrem;
- $\Delta = 0$, atunci în punctul $(x_0; y_0)$ funcția $f(x; y)$ poate să aibă, dar poate și să nu aibă extrem. În acest caz sunt necesare cercetări suplimentare.

Deseori întâlnim probleme în care se cere de aflat valoarea cea mai mică (mare) a funcției $z = f(x; y)$ într-un domeniu închis oarecare D . Cu acest scop este necesar de aflat toate valorile minime (maxime) ale acestei funcții din interiorul domeniului D și valorile funcției pe frontiera domeniului D , iar apoi alegem din ele valoarea cea mai mică (mare). Menționăm, că nu este necesar de calculat derivatele parțiale de ordinul doi și de utilizat criteriul suficient de extrem, deoarece toate extremele funcției $f(x; y)$ se află printre valorile sale în punctele critice. Este suficient de aflat valorile funcției $f(x; y)$ în toate punctele critice și dintre ele de ales valoarea cea mai mică (mare).

Problema aflării celei mai mici (mari) valori a funcției $z = f(x; y)$ pe frontiera domeniului D se reduce la determinarea celei mai mici (mari) valori a unei funcții de o singură variabilă.

Raționamente analoage au loc și pentru funcțiile de trei și mai multe variabile.

2. Determinarea extremelor funcțiilor prin intermediul relațiilor metrice în triunghi

Vom cerceta la extrem funcții de o singură variabilă și de trei variabile prin metode netradiționale. Problemele 2.1 – 2.4, 2.6 le vom numi probleme de tipul I, iar problemele 2.8 – 2.11 le vom numi probleme de tipul II.

Problema 2.1. Aflați valoarea cea mai mică a funcției $f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{81}{25}} + \sqrt{x^2 + \frac{256}{25}}$.

Rezolvare. Metoda tradițională. Această funcție este definită pe toată axa numerică. Dacă utilizăm primul criteriu de extrem al funcției de o singură variabilă, atunci derivata de ordinul întâi a acestei funcții este:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{81}{25}}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{256}{25}}}.$$

Egalăm această derivată cu zero, adică rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$ sau ecuația

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{81}{25}}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{256}{25}}} = 0,$$

care admite numai soluția $x = 0$.

Alcătuiți tabloul de variație al funcției $f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{81}{25}} + \sqrt{x^2 + \frac{256}{25}}$:

	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < +\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	5	↗

Deci valoarea cea mai mică 5, funcția dată o primește în punctul $x = 0$.

Dacă utilizăm al doilea criteriu de extrem, atunci obținem:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\sqrt{x^2 + \frac{81}{25}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{81}{25}}}}{x^2 + \frac{81}{25}} + \frac{\sqrt{x^2 + \frac{256}{25}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{256}{25}}}}{x^2 + \frac{256}{25}} = \\ &= \frac{81}{25 \left(x^2 + \frac{81}{25}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{256}{25 \left(x^2 + \frac{256}{25}\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Observăm că $f''(0) > 0$. Deci, $x = 0$ este un punct de minim pentru funcția dată și cea mai mică valoare a ei este $f(0) = 5$.

Metoda netradițională (fig. 4). Construim segmentele $AD = \frac{9}{5}$ și $DB = \frac{16}{5}$ situate pe aceeași dreaptă. Din punctul D ridicăm perpendiculara $CD = x$. Unim punctul C cu punctele A și B .

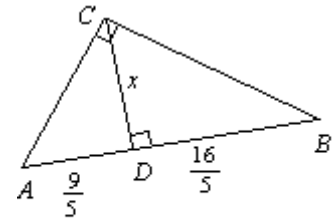


Fig. 4

Atunci $AC = \sqrt{x^2 + \frac{81}{25}}$ și $BC = \sqrt{x^2 + \frac{256}{25}}$. Suma $AC + BC$ va

primi valoarea minimală numai atunci când punctele A , C și B vor fi coliniare, adică atunci când

$$AC + CB = AB.$$

Însă lungimea segmentului $AB = 5$. Prin urmare, valoarea cea mai mică a funcției este 5.

În continuare vom rezolva probleme numai prin metoda netradițională.

Problema 2.2. Aflați valoarea cea mai mică a funcției

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 4x\sqrt{3} + 16}.$$

Rezolvare. Cercetăm triunghiul dreptunghic ACD (fig. 5), unde $AC = 3$, $CD = x$, $m(\angle ACD) = 90^\circ$ și triunghiul BCD , unde $m(\angle BCD) = 30^\circ$, $CB = 4$, $CD = x$.

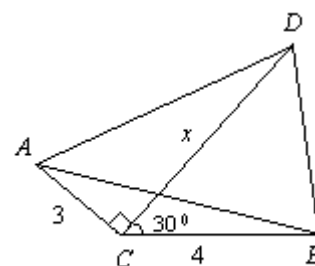


Fig. 5

Conform teoremei lui Pitagora, din triunghiul dreptunghic ACD obținem $AD = \sqrt{x^2 + 9}$, iar din triunghiul BCD , conform teoremei cosinusului avem $BD = \sqrt{x^2 - 4x\sqrt{3} + 16}$. A determina valoarea cea mai mică a funcției date înseamnă a determina lungimea cea mai mică a liniei frânte ADB . Deci $\min f(x) = \min(AD + BD) = AB$, adică punctul D trebuie să fie situat pe segmentul AB . Dar atunci, conform teoremei cosinusului, din triunghiul ABC , obținem:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 3 \cdot 4} = \sqrt{37}.$$

Prin urmare, $\min f(x) = \sqrt{37}$.

Problema 2.3. Aflați valoarea cea mai mică a funcției

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}.$$

Rezolvare. Cercetăm triunghiul ACD (fig. 6) în care $AC = 2$, $m(\angle ACD) = 60^\circ$, $CD = x$ și triunghiul BCD în care $BC = 1$, $CD = x$, $m(\angle BCD) = 30^\circ$. Atunci, din triunghiul ACD , conform teoremei cosinusului obținem $AD = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$. Analog, din triunghiul BCD obținem $DB = \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}$. Valoarea cea mai mică a funcției va fi:

$m = \min(AD + DB) = AB$, adică $D \in AB$.

Din triunghiul dreptunghic ACD primim $AB = \sqrt{5}$. Prin urmare, valoarea cea mai mică a funcției este $m = \sqrt{5}$.

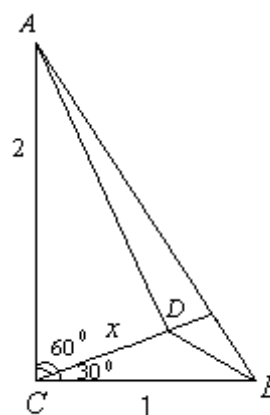


Fig. 6

Problema 2.4. Aflați valoarea cea mai mică a funcției

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 5x + 25}.$$

Rezolvare. Cercetăm figura 7. Observăm că în acest caz CD este bisectoarea unghiului ACB . Vom avea:

$$AD = \sqrt{x^2 - 5x + 25} \text{ și } BD = \sqrt{x^2 - 2x + 4}.$$

Aplicând raționamentele de mai sus, din triunghiul ABC , conform teoremei cosinusului obținem:

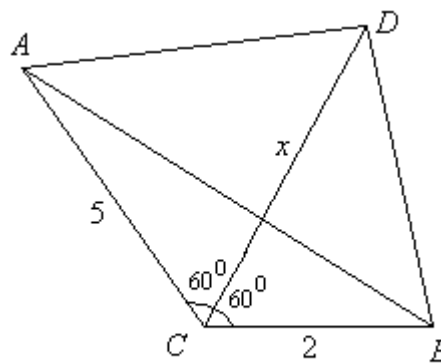


Fig. 7

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 120^\circ} =$$

$$= \sqrt{5^2 + 2^2 + 5 \cdot 2} = \sqrt{39}.$$

Nota 2.5. În figurile 4 – 7 punctul D poate fi situat atât în interiorul triunghiului ABC cât și în exteriorul lui. La rezultat aceasta nu influențează, deoarece valoarea cea mai mică a funcției se obține numai atunci când $D \in [AB]$.

Problema 2.6. Aflați valoarea cea mai mare a funcției $f(x) = \sqrt{x^2 + 49} - \sqrt{x^2 - 3x + 9}$

Rezolvare. Construim triunghiul dreptunghic ACB (fig. 8) în care $AC = x$, $BC = 7$, $m(\angle ACB) = 90^\circ$ și triunghiul ACD , în care $CD = 3$, $m(\angle ACD) = 60^\circ$, $AC = x$. Atunci, conform teoremei lui Pitagora, din triunghiul dreptunghic ACB avem: $AB = \sqrt{x^2 + 49}$, iar din triunghiul ACD primim: $AD = \sqrt{x^2 - 3x + 9}$. Deci $f(x) = AB - AD$ și

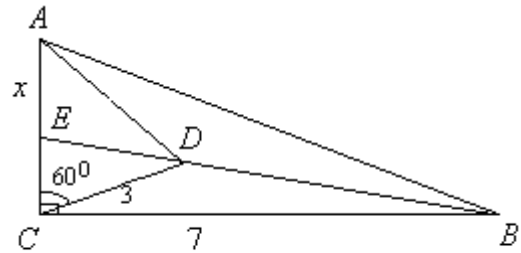


Fig. 8

$$\max f(x) = \max(AB - AD) = EB - ED = DB,$$

unde $E \in [AC]$, adică dacă $D \notin [AB]$.

Din triunghiul BCD , conform teoremei cosinusului primim:

$$DB = \sqrt{CD^2 + BC^2 - 2CD \cdot BC \cdot \cos 30^\circ} = \sqrt{3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$\sqrt{58 - 21\sqrt{3}}.$$

Nota 2.7. Spre deosebire de metodele tradiționale, metoda prezentată aici ne permite să determinăm valoarea cea mai mică (mare) a funcției, fără a afla punctul în care ea primește această valoare.

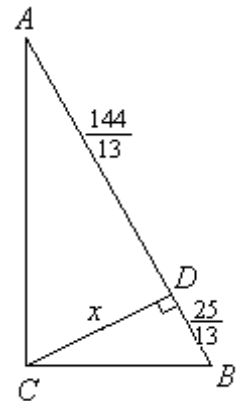


Fig. 9

Problema 2.8. Pentru ce valoare a lui x funcția

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{625}{169}} + \sqrt{x^2 + \frac{20736}{169}}$$

primește valoarea cea mai mică.

Rezolvare. În acest caz din figura 9 observăm că funcția va obține valoarea cea mai mică pentru $x = 0$.

Problema 2.9. Pentru ce valoare a lui x funcția

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 6x\sqrt{2} + 36}$$

primește valoarea cea mai mică.

Rezolvare. Cercetăm figura 10. Din triunghiul dreptunghic ACD avem $AD = \sqrt{x^2 + 16}$, iar din triunghiul BCD obținem $DB = \sqrt{x^2 - 6x\sqrt{2} + 36}$. Aria triunghiului ACD este $2x$, aria triunghiului BCD este $\frac{3x\sqrt{2}}{2}$, iar aria triunghiului ACB

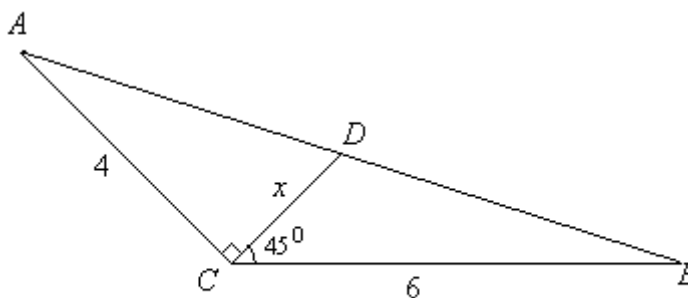


Fig. 10

va fi $6\sqrt{2}$. Deoarece $A_{\Delta ACB} = A_{\Delta ACD} + A_{\Delta BCD}$, atunci

$$2x + \frac{3x\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}, \quad 4x + 3x\sqrt{2} = 12\sqrt{2}, \quad x = \frac{12\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}} = 36 - 24\sqrt{2}.$$

Problema 2.10. Pentru ce valoare a lui x funcția $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 2x\sqrt{3} + 4}$ primește valoarea cea mai mică.

Rezolvare. Utilizând figura 11, aflăm ariile triunghiurilor ACD , BCD și ACB , unde $AC = BC = 2$, $AD = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$, $DB = \sqrt{x^2 - 2x\sqrt{3} + 4}$ și $CD = x$. Vom obține: $A_{\Delta ACD} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $A_{\Delta BCD} = \frac{x}{2}$ și $A_{\Delta ACB} = 2$.

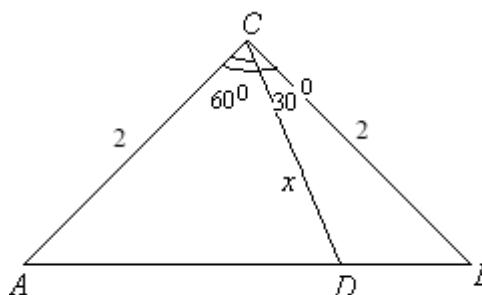


Fig. 11

Deoarece $A_{\Delta ACB} = A_{\Delta ACD} + A_{\Delta BCD}$, atunci

$$2 = \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2}, \quad \frac{x(\sqrt{3} + 1)}{2} = 2, \quad x = 2(\sqrt{3} - 1).$$

Problema 2.11. Pentru ce valoare a lui x funcția $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x\sqrt{3} + 9} + \sqrt{x^2 - 5x\sqrt{3} + 25}$ primește valoarea cea mai mică.

Rezolvare. Din figura 12 observăm că:

$$AD = \sqrt{x^2 - 3x\sqrt{3} + 9}, \quad DC = \sqrt{x^2 - 5x\sqrt{3} + 25},$$

$AB = 3$, $BC = 5$, $BD = x$ și $m(\angle ABD) = m(\angle CBD) = 30^\circ$. Ariile triunghiurilor ABD , CBD și ABC vor fi respectiv:

$$A_{\Delta ABD} = \frac{3x}{4}, \quad A_{\Delta CBD} = \frac{5x}{4} \quad \text{și} \quad A_{\Delta ACB} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

Din egalitatea

$$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta ABD} + A_{\Delta CBD},$$

obținem:

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{3x}{4} + \frac{5x}{4}, \quad 15\sqrt{3} = 8x, \quad x = \frac{15\sqrt{3}}{8}.$$

Nota 2.12. În problemele 2.9 – 2.11 valoarea lui x se poate de determinat utilizând formula din [2, Teorema 1.8, p. 15]. Conform acestei formule vom obține respectiv:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{6 \cdot 4 \left(\cos 90^0 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 45^0} + \cos 45^0 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 90^0} \right)}{6 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 45^0} + 4 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 90^0}} = \\
 &= \frac{24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4} = \frac{24\sqrt{2}}{6\sqrt{2} + 8} = \frac{12\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 4} = 36 - 24\sqrt{2} \text{ (Problema 2.9);} \\
 x &= \frac{2 \cdot 2 \left(\cos 60^0 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 30^0} + \cos 30^0 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 60^0} \right)}{2 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 30^0} + 2 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 60^0}} = \\
 &= \frac{4 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1+3}{\sqrt{3}+1} = 2(\sqrt{3}-1) \text{ (Problema 2.10).}
 \end{aligned}$$

Pentru Problema 2.11 de asemenea este valabilă formula utilizată din [2, Teorema 1.8, p. 15]. Însă în acest caz observăm că $x = BD$ este bisectoarea interioară a triunghiului ABC și utilizând formula din [2, Corolarul 1.9, p. 16] vom obține:

$$x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3+5} = \frac{15\sqrt{3}}{8} \text{ (Problema 2.11).}$$

Cercetăm în continuare la extrem funcții de mai multe variabile.

Problema 2.12. Aflați valoarea cea mai mică a funcției:

$$f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y^2 + 16} + \sqrt{z^2 + 36}, \text{ dacă } x + y + z = 5.$$

Rezolvare. Metoda standardă. Aplicarea metodei standarde ne conduce la calcule destul de voluminoase, care sunt arătate mai jos.

Deoarece $z = 5 - x - y$, atunci obținem funcția de două variabile:

$$f(x; y) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y^2 + 16} + \sqrt{(5 - x - y)^2 + 36}.$$

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale acestei funcții sunt:

$$\begin{aligned}
 f'_x(x; y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{5 - x - y}{\sqrt{(5 - x - y)^2 + 36}}, \\
 f'_y(x; y) &= \frac{y}{\sqrt{y^2 + 16}} - \frac{5 - x - y}{\sqrt{(5 - x - y)^2 + 36}}.
 \end{aligned}$$

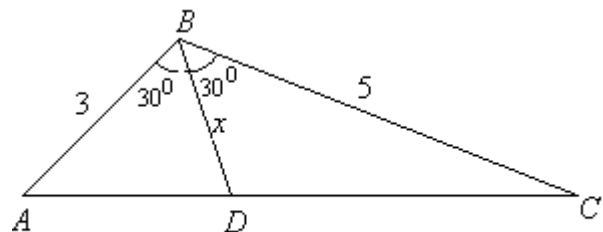


Fig. 12

Egalăm aceste derivate cu zero:

$$f'_x(x; y) = 0, f'_y(x; y) = 0,$$

de unde

$$x\sqrt{y^2 + 16} = y\sqrt{x^2 + 4}, x^2y^2 + 16x^2 = x^2y^2 + 4y^2,$$

$$y^2 = 4x^2, y = \pm 2x.$$

Atunci $z = 5 - 3x$ și $z = 5 + x$.

Admitem că $y = 2x$. Atunci obținem:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{5 - 3x}{\sqrt{(5 - 3x)^2 + 36}} = 0. \text{ Această ecuație}$$

admite unica soluție $x = \frac{5}{6}$. Prin urmare,

$$y = \frac{5}{3}, \text{ iar } z = \frac{5}{2}.$$

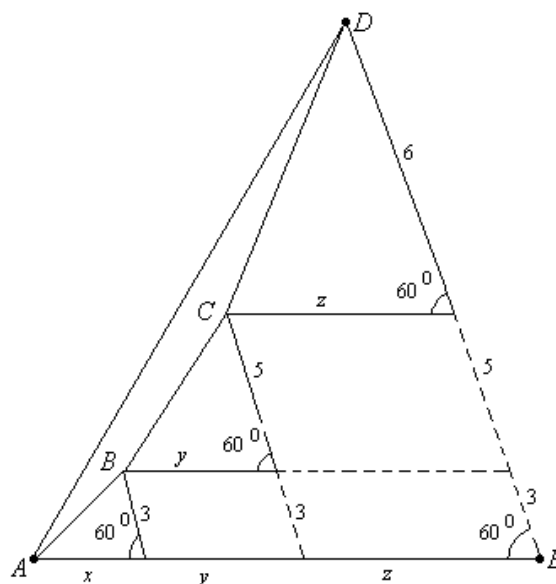


Fig. 14

Admitem acum că $y = -2x$. Atunci primim ecuația:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{5 - 3x}{\sqrt{(5 - 3x)^2 + 36}} = 0,$$

de unde rezultă ecuația pătrată:

$$8x^2 - 10x - 25 = 0,$$

care admite soluțiile: $x_1 = -\frac{5}{4}$ și $x_2 = -\frac{5}{2}$. Dar atunci

$$y_1 = \frac{5}{2} \text{ și } y_2 = -5, \text{ iar } z_1 = \frac{15}{4} \text{ și } z_2 = \frac{15}{2}.$$

Astfel am obținut trei puncte:

$$\left(\frac{5}{6}; \frac{5}{3}; \frac{5}{2}\right), \left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{2}; \frac{15}{4}\right) \text{ și } \left(-\frac{5}{2}; -5; \frac{15}{2}\right).$$

În fine obținem:

$$f\left(\frac{5}{6}; \frac{5}{3}; \frac{5}{2}\right) = \sqrt{\frac{25}{36} + 4} + \sqrt{\frac{25}{9} + 16} + \sqrt{\frac{25}{4} + 36} =$$

$$= \frac{13}{6} + \frac{13}{3} + \frac{13}{2} = \frac{78}{6} = 13;$$

$$f\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{2}; \frac{15}{4}\right) = \sqrt{\frac{25}{16} + 4} + \sqrt{\frac{25}{4} + 16} + \sqrt{\frac{225}{16} + 36} =$$

$$= \frac{\sqrt{89}}{4} + \frac{\sqrt{89}}{2} + \frac{3\sqrt{89}}{4} = \frac{3\sqrt{89}}{2};$$

$$f\left(-\frac{5}{2}; -5; \frac{15}{2}\right) = \sqrt{\frac{25}{4} + 4} + \sqrt{25 + 16} + \sqrt{\frac{225}{4} + 36} =$$

$$= \frac{\sqrt{41}}{2} + \sqrt{41} + \frac{3\sqrt{41}}{2} = 3\sqrt{41}.$$

Prin urmare, valoarea cea mai mică a funcției date este 13.

Metoda nestandardă. Cercetăm figura 13. Funcția dată va obține valoarea cea mai mică atunci când lungimea liniei frânte $ABCD$ va avea lungimea cea mai mică. Aceasta este posibil numai atunci când punctele A, B, C și D vor fi situate pe una și aceeași dreaptă, adică valoarea cea mai mică a funcției date trebuie să fie lungimea segmentului AD , care este ipotenuza triunghiului dreptunghic. Deoarece catetele triunghiului dreptunghic sunt 5 și 12, rezultă că $AD = 13$. Deci valoarea cea mai mică a funcției este 13.

În continuare mai cercetăm încă două probleme pe care le vom rezolva prin metoda nestandardă.

Problema 2.13. Aflați valoarea cea mai mică a funcției

$$f(x; y; z) = \sqrt{x^2 - 3x + 9} + \sqrt{y^2 - 5y + 25} + \sqrt{z^2 - 6z + 36},$$

dacă $x + y + z = 7$.

Rezolvare. Din figura 14 observăm că

$$AB = \sqrt{x^2 - 3x + 9}, BC = \sqrt{y^2 - 5y + 25} \text{ și}$$

$$CD = \sqrt{z^2 - 6z + 36}.$$

Deci $f(x; y; z) = AB + BC + CD$.

Valoarea cea mai mică a funcției va fi lungimea segmentului AD . Dar atunci, din triunghiul ADE , conform teoremei cosinusului, vom obține:

$$AD = \sqrt{AE^2 + DE^2 - 2AE \cdot DE \cdot \cos 60^\circ} =$$

$$= \sqrt{7^2 + 14^2 - 2 \cdot 7 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{245 - 98} = 7\sqrt{3}.$$

Prin urmare, valoarea cea mai mică a funcției date este $7\sqrt{3}$, dacă $x + y + z = 7$.

Metoda nestandardă propusă poate fi utilizată și la rezolvarea problemelor mai dificile.

Problema 2.14. Aflați valoarea cea mai mică a funcției

$$f(x; y; z) = \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + \sqrt{y^2 - 2y\sqrt{2} + 4} + \sqrt{z^2 - 3z + 9},$$

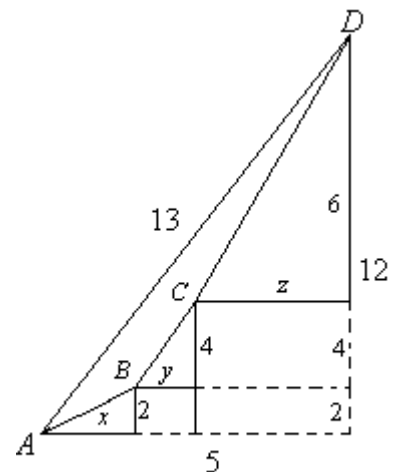


Fig. 13

$$\text{dacă } x + y + z = \frac{2\sqrt{2} + 3 + \sqrt{3}}{2}.$$

Rezolvare. Cercetăm figura 15, în care $AF = x$, $FD = 1$, $m(\angle AFD) = 30^\circ$, $DT = y$, $ET = 2$, $m(\angle DTE) = 45^\circ$, $ES = z$, $SB = 3$, $m(\angle ESB) = 60^\circ$. Din triunghiul AFD , conform teoremei cosinusului obținem:

$$AD = \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1};$$

din triunghiul DTE obținem

$$DE = \sqrt{y^2 - 2y\sqrt{2} + 4},$$

iar din triunghiul ESB primim:

$$EB = \sqrt{z^2 - 3z + 9}.$$

În triunghiul dreptunghic FKD avem:

$$KF = \frac{1}{2}, DK = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dar atunci $FP = KT = y - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Triunghiul dreptunghic TPQ este isoscel, deoarece

$m(\angle PQT) = m(\angle DTE) = 45^\circ$ (conform construcției) și deci $PQ = PT = KF = \frac{1}{2}$, $TQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

. Atunci

$$FQ = FP + PQ = y - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, EQ = ET +$$

$$TQ = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Triunghiul dreptunghic ELT este isoscel și deci $EL = LT = \sqrt{2}$.

Din triunghiul dreptunghic isoscel EMQ avem $EM = MQ = \sqrt{2} + \frac{1}{2}$. Atunci

$$QR = MS = z - \sqrt{2} - \frac{1}{2}; SR = MQ =$$

$$\sqrt{2} + \frac{1}{2}.$$

Din triunghiul dreptunghic SRC vom obține:

$$SC = \frac{2\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3}; RC = \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Atunci

$$QC = QR + RC = z - \sqrt{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6};$$

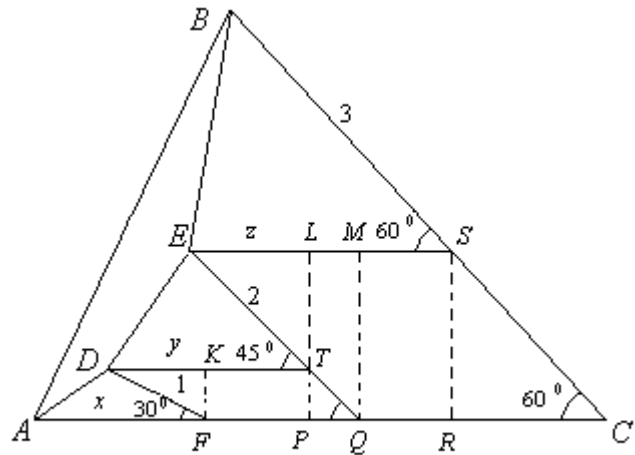


Fig. 15

$$\begin{aligned}
BC &= BS + SC = 3 + \frac{2\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3} = \frac{9 + 2\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3}; \\
AC &= AF + FQ + QC = x + y - \frac{\sqrt{3}-1}{2} + z - \sqrt{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \\
&= \frac{2\sqrt{2} + 3 + \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}; \\
AC^2 &= \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12} + \sqrt{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \\
&= \frac{27 + 8 + 1 + 12\sqrt{6} + 6\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{12} = \frac{18 + 6\sqrt{6} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}; \\
BC^2 &= \left(\frac{9 + 2\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{81 + 24 + 3 + 36\sqrt{6} + 18\sqrt{3} + 12\sqrt{2}}{9} = \\
&= \frac{27 + 8 + 1 + 12\sqrt{6} + 6\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{3} = \frac{36 + 12\sqrt{6} + 6\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{3}; \\
AC \cdot BC &= \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \cdot \left(\frac{9 + 2\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3} \right) = \frac{1}{18} \cdot (9 + 2\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 = \\
&= \frac{1}{18} \cdot (81 + 24 + 3 + 36\sqrt{6} + 18\sqrt{3} + 12\sqrt{2}) = \\
&= \frac{18 + 6\sqrt{6} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Atunci din triunghiul ABC , conform teoremei cosinusului, obținem:

$$\begin{aligned}
AB &= \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 60^\circ} = \\
&= \sqrt{\frac{18 + 6\sqrt{6} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6} + \frac{36 + 12\sqrt{6} + 6\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{3} - \frac{18 + 6\sqrt{6} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3}} = \\
&= \sqrt{9 + 3\sqrt{6} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1}{2}.
\end{aligned}$$

Prin urmare, valoarea cea mai mică a funcției este

$$\frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1}{2}, \text{ dacă } x + y + z = \frac{2\sqrt{2} + 3 + \sqrt{3}}{2}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. Ion Achiri ș. a. *Matematică. Manual pentru clasa a XI-a*. Chișinău: Prut Internațional, 2003, 304 p.
2. Dorin Afanas. *Generalizarea unei metode geometrice de rezolvare a ecuațiilor iraționale*. Didactica Matematicii și Informaticii. Prima Conferință a Societății Matematice a Republicii Moldova, Chișinău, 2002, p. 10 – 16.
3. Șipaciov V. S. *Matematica superioară*. Chișinău: Lumina, 1992, 494 pag.
4. Дюбюк П. Е. *Сборник задач по высшей математике*. Москва, Высшая школа, 1964, 664 стр.

STRUCTURA SPECTRELOR DE REFLEXIE ALE ANTIMONIDULUI DE GALIU DOPAT CU FIER

Efim ARAMĂ¹, dr. hab., prof. univ.

Eugeniu GHEORGHITĂ, dr. hab., prof. univ.

Alexei MIHĂLACHE, dr.

Leonid PALACHI², dr., conf. univ.

Mihail CARAMAN³, dr. hab., prof. univ.

Victoria MELINTE

Universitatea de Stat din Tiraspol

¹Universitatea de Stat de Medicină și Farmacie „N. Testemițanu”

²Universitatea Liberă Internațională din Moldova

³Universitatea de Stat din Moldova

e.gheorghita@mail.ru

Este cunoscut faptul, că la energii a fotonilor $\hbar\omega < \varepsilon_g$ în materialele semiconductoare atât în spectrele de reflexie și mult mai pronunțat în spectrele de absorbție, se evidențiază un șir de benzi optice legate de tranziții electronice cu participarea nivelelor impuritate. În regiunea IR benzile de absorbție la temperatura camerei, de obicei, sunt cauzate de vibrațiile rețelei cristaline. Totodată, în această regiune spectrală, în eșantioanele cu concentrații mari a purtătorilor de sarcină liberi, specific antimonidului de galiu nedopat și dopat ($n, p \geq 10^{18} \div 10^{19} \text{cm}^{-3}$) se evidențiază interacțiunea luminii cu purtătorii de sarcină liberi.

S-au înregistrat și s-au analizat spectrele de reflexie FTIR la temperatura 293K pentru antimonidul de galiu dopat cu fier în cantități de la 0,38% până la 3% atomare. Din analiza acestor spectre s-a determinat corelația dintre structura spectrului de reflexie FTIR și gradul de perfecțiune a suprafeței de densitatea defectelor proprii și induse prin tratament mecanic. Analiza spectrelor de reflexie înregistrate a permis evidențierea următoarelor concluzii:

Pentru intervalul numerelor de undă $(230-239)\text{cm}^{-1}$ se identifică ca reflexia monofonică în cristalele de antimonid de galiu. S-a determinat numărul de undă a fononului longitudinal optic egal cu $240,9\text{cm}^{-1}$. Doparea antimonidului de galiu cu fier contribuie la formarea unei benzi de reflexie cu maxim la 1,5eV, fapt care demonstrează indirect despre prezența unei faze cristaline noi la suprafața eșantioanelor de antimonid de galiu dopat cu fier.

O structură compusă au spectrele de reflexie în regiunea tranzițiilor electronice banda de valență-banda de conducție al antimonidului de galiu nedopat și dopat cu fier în diferite concentrații înregistrate la temperatura de 293K. Spectrul $R(\hbar\omega)$ de la suprafața monocristalină de GaSb este compusă din două benzi cu maxime la 4,3eV și 2,05eV.

Totodată se evidențiază subbenzi cu intensități mai mici la energiile 2,60eV, 3,65eV, 4,68eV, 4,85eV și 5,01eV. Se propune un mecanism de identificare a acestor structuri legate de tranzițiile optice în punctul X – Van Hove.

S-au înregistrat un șir de particularități în spectrele de reflexie înregistrate pentru antimonidul de galiu dopat cu fier. Se demonstrează că fierul inclus în matricea antimonidului de galiu modifică structura benzilor electronice în particular în regiunea punctelor critice Van Hove.

S-a determinat energia fononilor transversali optici egală cu $230,4\text{cm}^{-1}$. Defectele granulare la suprafața plăcilor monocristaline de GaSb generează vibrații suplimentare a rețelei cristaline la numerele de undă 225cm^{-1} și 247cm^{-1} . Aceste vibrații sunt determinate de variația constantei fazei în legăturile Ga-Sb. S-a stabilit, în rezultatul tratamentului mecanic al suprafeței, rețeaua cristalină se deformează anizotrop. Fierul introdus în GaSb servește ca stabilizator al suprafeței probelor de GaSb supuse tratamentului mecanic. În rezultatul tratamentului mecanic al monocristalelor GaSb și GaSb<Fe> au loc trei tipuri distincte de deformații ale rețelei cristaline și respectiv trei tipuri de defecte de suprafața cu parametrii: $r_1 = 1,06r_0$; $r_{12} = 1,14r_0$; $r_3 = 1,23r_0$; r_0 - constanta rețelei cristaline.

Privitor la elementele de tehnologie preconizate prin metoda topirii zonale descrisă anterior s-au obținut monocristale de antimonid de galiu dopat cu fier în concentrații mari, cum ar fi (GaSb+20%Fe); (GaSb+30%Fe) ca aliaje, soluții solide $\text{Ga}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Sb}$. S-au cercetat efectele de transport în aceste aliaje la temperatura camerei.

S-a studiat influența tratării mecanice asupra structurii spectrelor de reflexie în regiunea benzii monofonice pentru antimonidul de galiu dopat cu fier. S-au înregistrat spectrele de reflexie de la suprafața nedeformată a antimonidului de galiu la temperatura camerei. Pentru intervalul numerelor de undă $(230-239)\text{cm}^{-1}$. Experimental se evidențiază o bandă întinsă de reflexie cu coeficientul de reflexie ($R=0,8$) care, după părerea noastră; se identifică ca reflexia monofonică. Numărul de undă caracteristic pentru vibrația longitudinală optică a rețelei cristaline este foarte aproape de minimumul absolut ($R=0,09$) cu frecvența $240,4\text{cm}^{-1}$. Cu ajutorul transformărilor Kramers-Kronig din spectrul $R(\tilde{\nu})$ s-au determinat funcțiile optice $\varepsilon_1(\tilde{\nu})$, $\varepsilon_2(\tilde{\nu})$, $n(\tilde{\nu})$ și $k(\tilde{\nu})$. Prin metoda variațiilor în limitele $(228 \leq \nu_0 \leq 242)\text{cm}^{-1}$ și $(0,09 \leq \gamma \leq 0,11)$ s-a ajuns la o coincidență satisfăcătoare a curbei experimentale $R(\tilde{\nu})$ pentru coeficientul de atenuare $\gamma=0,09$ și $\nu_0=230,4\text{cm}^{-1}$.

S-au studiat și structurile spectrelor de reflexie de la suprafața prelucrată mecanic a plăcilor de antimonid de galiu nedopat și antimonid de galiu dopat cu fier în concentrații de 1% și 3% în regiunea reflexiei monofonice. Din comparația rezultatelor experimentale pentru GaSb neprelucrat mecanic cu cele obținute pentru GaSb dopat prelucrat mecanic. Se evidențiază că banda de reflexie monofonică (regiunea spectrală $1 \div 44\mu\text{m}$) de la suprafața prelucrată mecanic este puternic atenuată. Variația coeficientului de reflexie în această regiune de numai $(15 \div 25)\%$ pe când în rețeaua de la suprafața

naturală a monocristalului este de 80%. Punctele caracteristice ale acestei benzi (minimul funcției $R(\tilde{\nu})$ care se identifică cu vibrațiile longitudinal optice ale rețelei cristaline ($\tilde{\nu}_{LQ}$) și maximul indentificat ca vibrație transversal-optic $\tilde{\nu}_{TO}$ corespund numerelor de undă 247cm^{-1} și 225cm^{-1} respectiv. Majorarea numărului de undă pentru fononul longitudinal optic cu 7cm^{-1} și o micșorare cu $1,7\text{cm}^{-1}$ pentru $\tilde{\nu}_{TO}$ indică despre deformarea rețelei cristaline mult mai pronunțat pe direcția perpendiculară la suprafața eșantionului.

Micșorarea cu ~ 20 ori a coeficientului de reflexie normală în maximul benzii monofonice în rezultatul degradării (prin șlefuire) a suprafeței reflectante este cauzată de doi factori și anume: neluarea în considerație a reflexiei difuze de la suprafața eșantionului (granularea suprafeței este mai mare decât lungimea de undă a radiației incidente) și deformațiile mecanice propriu-zise a rețelei cristaline (GaSb).

Doparea antimonidului de galiu cu fier contribuie la formarea unei benzi de reflexie cu maxim la $1,5\text{eV}$, fapt care demonstrează indirect despre prezența unei faze cristaline noi la suprafața eșantioanelor dopate cu fier.

Din spectrul de reflexie în regiunea vibrației monofonice a probelor de antimonid de galiu dopate cu fier (concentrația pînă la 1% atomic), s-au calculat funcțiile optice luîndu-se în considerație frecvențele de vibrație a plasmei în cele două minime (Γ și L). Funcțiile optice experimentale și cele calculate pe baza modelului benzii de reflexie simple s-au determinat frecvențele de vibrație a plasmei în minimele benzii de conducție s-a demonstrat că frecvențele de vibrație a plasmei sunt în slabă creștere.

Analiza structurii spectrelor de reflexie au permis determinarea experimentală a energiei fononilor transversali optici egală cu $230,4\text{cm}^{-1}$. Defectele granulare la suprafața plăcilor monocristaline de antimonid de galiu generează vibrații suplimentare a rețelei cristaline la numerele de undă 225cm^{-1} și 247cm^{-1} . Aceste vibrații sunt determinate de variația constantei fazei în legăturile Ga-Sb. S-a stabilit, în rezultatul tratamentului mecanic al suprafeței, rețeaua cristalină se deformează anizotrop. Fierul introdus în antimonidul de galiu servește ca stabilizator al suprafeței probelor de antimonid de galiu supus tratamentului mecanic. În rezultatul tratamentului mecanic al monocristalelor de antimonid de galiu nedopat și dopat cu fier au loc trei tipuri distincte de deformații ale rețelei cristaline și respectiv trei tipuri de defecte de suprafață cu parametrii $r_1=1,06r_0$; $r_2=1,14r_0$; $r_3=1,23r_0$; r_0 – este constanta rețelei cubice nedeformate.

OMOLOGII ȘI STRUCTURI ABSTRACTE

Mitrofan CIOBANU, academician, dr. hab., prof. univ.

Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat: Fie R un inel și G și un R -modul. Notăm cu $S(X, G)$ R -modul cuvintelor cu alfabetul X și coeficienții din G . Sistemul $T = \{E_n, h_n: n \in \mathbb{N}\}$ se numește șir de mulțimi orientate, dacă satisface condițiile: mulțimea E_0 este nevidă și $h_0: E_0 \rightarrow \emptyset$ este o aplicație; dacă $n \geq 1$ și mulțimea E_n este vidă, atunci și mulțimea E_{n+1} este vidă; dacă $n \geq 1$ și mulțimea E_n este nevidă, atunci $h_n: E_n \rightarrow S(E_{n-1}, G)$ este o aplicație. Dacă $n \geq 2$, $x \in E_n$ și $h_n(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m$, atunci G -cuvântul $h_{n-1}(h_n(x)) = a_1 h_{n-1}(x_1) + a_2 h_{n-1}(x_2) + \dots + a_m h_{n-1}(x_m)$ este echivalent cu cuvântul nul 0 din $S(E_{n-2}, G)$. În lucrare se propune o metodă de construire a grupurilor de omologii și coomologii cu ajutorul conceptului de șir de mulțimi orientate.

Abstract: Let R be a ring and G be an R -modul. Denote by $S(X, G)$ the R -modul of all words with the alphabet X and coefficients from G . System $T = \{E_n, h_n: n \in \mathbb{N}\}$ it is called a sequence of oriented sets if: the set E_0 is non-empty and $h_0: E_0 \rightarrow \emptyset$ is a mapping; if $n \geq 1$ and the set E_n is empty, then the set E_{n+1} is empty too; if $n \geq 1$ and the set E_n is non-empty, then $h_n: E_n \rightarrow S(E_{n-1}, G)$ is a mapping; if $n \geq 2$, $x \in E_n$ and $h_n(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m$, then the G -word $h_{n-1}(h_n(x)) = a_1 h_{n-1}(x_1) + a_2 h_{n-1}(x_2) + \dots + a_m h_{n-1}(x_m)$ it is equivalent with the word 0 from $S(E_{n-2}, G)$. We propose a method of construction of homological groups and cohomological groups applying the concept of the sequence of oriented sets.

1. Introducere

Topologia face parte din categoria disciplinelor de bază în matematică. Topologia algebrică oferă metode eficiente de studiere a spațiilor topologice și a structurilor adiacente lor prin intermediul structurilor discrete de tip algebric: grupuri, module, spații vectoriale, grupuri gradate, algebre etc.

În lucrarea prezentă se introduce noțiunea de *șir de mulțimi orientate*, care este o generalizare a noțiunii de *complex de lanțuri*. Orice șir de mulțimi orientate generează un complex de lanțuri, care la rândul său generează un șir de omologii și un șir de coomologii. Acest fapt simplifică construirea șirurilor de omologii și de coomologii pentru complexul de cuburi abstracte și complexul de relații multi-are [4].

2. Un formalism de construire a grupurilor de omologii și coomologii

În acest paragraf se va descrie o metodă generală de construire a unui *complex: un șir de module și omomorfisme*. Examinăm numai grupuri abeliene. Notăm cu \mathbb{Z} inelul numerelor întregi, iar $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

2.1. Modul. Fie R un inel. Se numește R -modul sau simplu modul un grup abelian G astfel încât pentru orice $x \in G$ și orice $\lambda \in R$ este determinat produsul $\lambda x \in G$ și se satisfac următoarele restricții: $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$, $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$ pentru orice $x, y \in G$ și $\lambda, \mu \in R$. R -modulul G se numește unitar, dacă R este un inel cu unitate și $1x = x$ pentru orice $x \in G$. Orice grup abelian este un \mathbb{Z} -modul unitar. Ideal al R -modulului G se numește un așa subgrup H al grupului G pentru care $R \cdot H = \{\lambda x: x \in H, \lambda \in R\} \subset H$. Dacă H este un ideal al R -modulului G , atunci în mod univoc se construiește R -modulul-cât G/H și factor-omomorfismul $p_H: G \rightarrow G/H$ pentru care nucleul $\text{Ker}(p_H) = p_H^{-1}(0) = H$. R -modulul-cât

G/H este format din clase de echivalențe de forma $x+H$ la echivalența: $x\sim y$ dacă și numai dacă $x-y\in H$.

2.2. Ideale și omomorfisme. Fie A, B două R -module, L un ideal al modulului A , M un ideal al modulului B , $f: A \rightarrow B$ un omomorfism și $f(L) \subset M$. Atunci $f(x+H) \subset f(x)+M$ pentru orice $x \in G$. Obținem că f aplică o clasă de echivalență din A/L într-o clasă de echivalență din B/M . Deci f este și o aplicație al R -modulului A/L în R -modulul B/M . Aplicația $f: A/L \rightarrow B/M$ este un omomorfism și $f \circ p_L = p_M \circ f$, adică este comutativă diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ p_L \downarrow & & \downarrow p_M \\ A/L & \xrightarrow{f} & B/M. \end{array}$$

Omomorfismul $f: A/L \rightarrow B/M$ se numește omomorfism indus de omomorfismul $f: A \rightarrow B$. Dacă $B = f(A)$ și $L = f^{-1}(M)$, atunci $f: A/L \rightarrow B/M$ este un izomorfism.

2.3. Module de lanțuri. Fixăm un inel R și un R -modul G .

Fie E o mulțime nevidă. Expresia formală $c = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$, unde $x_1, x_2, \dots, x_m \in E$ și $a_1, a_2, \dots, a_m \in G$ se numește G -cuvânt de lungimea $\leq n$. Simbolul 0 se consideră G -cuvânt de lungimea 0 . Dacă $\sigma: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ este o permutare și $c = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$ este un G -cuvânt, atunci G -cuvintele $c = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$ și $c_\sigma = a_{\sigma(1)}x_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)}x_{\sigma(2)} + \dots + a_{\sigma(m)}x_{\sigma(m)}$ se consideră echivalente și se identifică. Clasele de G -cuvinte echivalente formează un modul notat prin $S(E, G)$. Fiecare element din $S(E, G)$ se numește E -lanț cu coeficienți din G . Modulul $S(E, G)$ este suma directă a E exemplare a modulului G . Modulul $S(E, G)$ poate fi identificat cu totalitatea aplicațiilor $f: E \rightarrow G$ cu proprietatea: mulțimea $\{x \in E : f(x) \neq 0\}$ este finită. Modulul $S(E, G)$ poate fi prezentat și ca un submodule al produsului cartezian G^E . Din acest punct de vedere, considerăm $S(\emptyset, G) = \{0\}$.

Dacă H este o submulțime nevidă a mulțimii E , atunci $S(E, G)$ este un ideal al modulului $S(E, G)$. Construim aplicația multivocă $Sup_E: S(E, G) \rightarrow E$ la care $Sup_E(c) = \cap \{H \subset E : c \in S(H, G)\}$ pentru orice $c \in S(E, G)$. Mulțimea $Sup_E(c)$ se numește suportul elementului $c \in S(E, G)$. Mulțimile $Sup_E(c)$ sunt finite și numai pentru $c = 0$ mulțimea $Sup_E(c)$ este vidă. Dacă $c = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$, unde $a_1, a_2, \dots, a_m \in G \setminus \{0\}$ și $x_1, x_2, \dots, x_m \in E$ sunt elemente diferite, atunci $Sup_E(c) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$.

Orce aplicație $g: E \rightarrow Y$ generează un unic omomorfism $\bar{g}: S(E, G) \rightarrow S(Y, G)$ pentru care $\bar{g}(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m) = a_1g(x_1) + a_2g(x_2) + \dots + a_mg(x_m)$. De asemenea, orice aplicație $g: E \rightarrow A$, unde A este un R -modul, generează un unic omomorfism $\bar{g}: S(E, G) \rightarrow A$ pentru care $\bar{g}(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m) = a_1g(x_1) + a_2g(x_2) + \dots + a_mg(x_m)$.

2.4. Exemplu. Fie $R = G = Z$ și E o mulțime nevidă. Notăm $-E = \{-x : x \in E\}$ și $E^* = E \cup (-E)$. Atunci expresia formală $c = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, unde $x_1, x_2, \dots, x_m \in E^*$ se numește Z -cuvânt de lungimea m . Simbolul 0 se consideră Z -cuvânt de lungimea 0 . Dacă $\sigma: \{1, 2, \dots,$

$m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ este o permutare și $c = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ un Z -cuvânt, atunci Z -cuvintele $c = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ și $c_\sigma = x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)} + \dots + x_{\sigma(m)}$ se consideră echivalente și se identifică. Clasele de Z -cuvinte echivalente formează Z -modulul liber (grupul abelian liber) $F(E)$ generat de mulțimea E . Vom avea $E \subset F(E) = S(E, Z)$. Orice aplicație $g: E \rightarrow Y$ generează un unic omomorfism $\bar{g}: F(E) \rightarrow F(Y)$ pentru care $g = \bar{g}|_E$. De asemenea, orice aplicație $g: E \rightarrow A$, unde A este un Z -modul (grup abelian), generează un unic omomorfism $\bar{g}: F(E) \rightarrow A$ pentru care $g = \bar{g}|_E$. Și în acest caz vom avea aplicația suport $Sup_E: F(E) \rightarrow E$. Fie $x \in E$ și $a \in G$. Atunci $-x \in E^*$ și considerăm că $a(-x) = (-a)x$. Prin urmare elementele $a \in G$ și $c = x_1 + x_2 + \dots + x_m \in F(E)$ determină elementul $ac = ax_1 + ax_2 + \dots + ax_m \in S(E, G)$.

2.5. Exemflu. Fie $R = G$ și E o mulțime nevidă. Notăm $-E = \{-x: x \in E\}$ și $E^* = E \cup (-E)$. Atunci expresia formală $c = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$, unde $x_1, x_2, \dots, x_m \in E$ și $a_1, a_2, \dots, a_m \in R$, se numește R -cuvânt de lungimea $\leq m$. Simbolul 0 se consideră R -cuvânt de lungimea 0 . Dacă $\sigma: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ este o permutare și $c = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$ un R -cuvânt, atunci R -cuvintele $c = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$ și $c_\sigma = a_{\sigma(1)}x_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)}x_{\sigma(2)} + \dots + a_{\sigma(m)}x_{\sigma(m)}$ se consideră echivalente și se identifică. Considerăm $0 + c = c + 0 = c$ pentru orice R -cuvânt c . Dacă $c = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$, elementele $x_1, x_2, \dots, x_m \in E$ sunt diferite și $a_1, a_2, \dots, a_m \in R \setminus \{0\}$, atunci cuvântul c se numește simplu. Cuvântul 0 se consideră simplu. Orice cuvânt este echivalent cu un cuvânt simplu. Clasele de R -cuvinte echivalente formează R -modulul liber $S(E, R)$ generat de mulțimea E . Identificăm $x \in E$ cu $1x$. Vom avea $E \subset S(E, R)$. Orice aplicație $g: E \rightarrow Y$ generează un unic omomorfism $\bar{g}: S(E, R) \rightarrow S(Y, R)$ pentru care $g = \bar{g}|_E$. De asemenea, orice aplicație $g: E \rightarrow A$, unde A este un R -modul generează un unic omomorfism $\bar{g}: F(E) \rightarrow A$ pentru care $g = \bar{g}|_E$.

2.6. Module de omomorfisme. Fixăm un inel R . Fie A și B R -module și $f: A \rightarrow B$ un omomorfism. Notăm cu $Hom(A, G)$ totalitatea omomorfismelor $g: A \rightarrow G$. Pentru orice două omomorfisme $g, h: A \rightarrow G$ se determină suma $g+h: (g+h)(x) = g(x)+h(x)$ pentru orice $x \in A$. Dacă $\lambda \in R$, atunci λf , unde $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$, este de asemenea un omomorfism. Prin urmare $Hom(A, G)$ față de aceste operații este un R -modul, numit modulul de omomorfisme. Omomorfismul $f: A \rightarrow B$ generează omomorfismul dual $\bar{f}: Hom(B, G) \rightarrow Hom(A, G)$, unde $\bar{f}(g) = g \bullet f$ pentru orice $g \in Hom(B, G)$.

Dacă $g \in Hom(A, G)$ și $x \in A$, atunci notăm $\langle g, x \rangle = g(x)$. Obținem operatorul de evaluare $\langle \cdot, \cdot \rangle: Hom(A, G) \times A \rightarrow G$ care pentru orice $x \in A$ generează omomorfismul $e_x: Hom(A, G) \rightarrow G$, unde $e_x(g) = \langle g, x \rangle = g(x)$. Putem considera că $e_x = \langle \cdot, x \rangle |_{Hom(A, G) \times \{x\}}$.

2.6. Complexe de lanțuri. Fixăm un inel R . Orice modul se consideră R -modul.

Se numește complex de lanțuri un șir $C = \{C_n, \partial_n: n \in \mathbb{N}\}$ format din modulele C_n și omomorfismele $\partial_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow C_n$ cu proprietățile:

- $\partial_0: C_0 \rightarrow 0$ este omomorfismul în modulul trivial format numai din elementul 0;
- $\partial_n \partial_{n+1} = 0$, adică $\partial_n(\partial_{n+1}(C_{n+1})) = \{0\} \subset C_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$.

Omomorfismele ∂_n se numesc operatori de frontieră sau diferențiali. Complexul de lanțuri poate fi scris sub forma

$$\dots \rightarrow C_{n+1} \rightarrow C_n \rightarrow \dots \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0.$$

Un șir $A \rightarrow B \rightarrow C$ format din trei module și două omomorfisme $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ se numește:

- *semiexact* în terminul B , dacă $\text{Im} f = f(A) \subset g^{-1}(0) = \text{Ker } g$;
- *exact* în terminul B , dacă $\text{Im} f = f(A) = g^{-1}(0) = \text{Ker } g$.

Șirul $A \rightarrow B \rightarrow C$ format din trei module și omomorfismele $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ se numește *direct* sau *despicat* sau *scindat*, dacă modulul $B = A \oplus C$ este sumă directă a modulelor A și $C, f: A \rightarrow B$ este o scufundare isomorfică și $g: B \rightarrow C$ este proiecția naturală. Conform definiției, complexul de lanțuri

$$\dots \rightarrow C_{n+1} \rightarrow C_n \rightarrow \dots \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

întotdeauna este semiexact, adică semiexact în fiecare termen C_n . Fixăm un complex de lanțuri $C = \{C_n, \partial_n: n \in \mathbb{N}\}$. Elementele din C_n se numesc lanțuri n -dimensionale. Lanțul $c \in C_n$ se numește ciclu n -dimensional, dacă $\partial_n c = 0$, adică $c \in \text{Ker } \partial_n$. Modulul format din cicluri n -dimensionale se notează cu $Z_n(T)$. Lanțul $c \in C_n$ se numește lanț n -dimensional de frontieră, dacă $c = \partial_{n+1}(c')$ pentru un careva lanț $n+1$ -dimensional $c' \in C_{n+1}$ adică $c \in \text{Im } \partial_{n+1} = \partial_{n+1}(C_{n+1})$. Modulul format din lanțuri n -dimensionale de frontieră se notează cu $B_n(T)$. Submodulele $Z_n(T)$ și $B_n(T)$ sunt ideale ale modulului C_n . Modulul $H_n(T) = Z_n(T)/B_n(T)$ se numește modul sau grup n -dimensional de omologie al complexului de lanțuri T . Deoarece $\partial_{n+1}(Z_{n+1}(T)) \subset Z_n(T)$ și $\partial_{n+1}(B_{n+1}(T)) \subset B_n(T) \subset Z_n(T)$, vom considera $\partial_{n+1} = \partial_{n+1}|_{Z_{n+1}(T)}$. Fie $p_n: Z_n(T) \rightarrow H_n(T) = Z_n(T)/B_n(T)$ proiecția naturală. Atunci omomorfismul ∂_{n+1} induce omomorfismul $\partial_{n+1}: H_{n+1}(T) \rightarrow H_n(T)$ astfel încât $p_n \bullet \partial_{n+1} = \partial_{n+1} \bullet p_{n+1}$. În rezultat se obține șirul de omologii $H(T) = \{H_n(T), \partial_n: n \in \mathbb{N}\}$ al complexului de lanțuri T :

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(T) \rightarrow H_n(T) \rightarrow \dots \rightarrow H_2(T) \rightarrow H_1(T) \rightarrow H_0(T) \rightarrow 0.$$

Este evident că șirul de omologii $H(T)$ este și un complex de lanțuri.

2.7. Complexe de co-lanțuri. Fixăm un inel R . Orice modul se consideră R -modul. Se numește complex de co-lanțuri un șir $C = \{C_n, \delta_n: n \in \mathbb{N}\}$ format din modulele C_n și omomorfisme $\delta_{n+1}: C_n \rightarrow C_{n+1}$ cu proprietățile:

- $\delta_0: 0 \rightarrow C_0$ este omomorfismul modulului trivial;
- $\delta_{n+1} \delta_n = 0$, adică $\delta_{n+1}(\delta_n(C_{n-1})) = \{0\} \subset C_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$.

Omomorfismele δ_n se numesc operatori de frontieră sau diferențiali. Complexul de co-lanțuri poate fi scris sub forma

$$0 \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_{n-1} \rightarrow C_n \rightarrow C_{n+1} \rightarrow \dots$$

Conform definiției, complexul de co-lanțuri întotdeauna este semiexact, adică semiexact în fiecare termen C_n .

Fixăm un complex de co-lanțuri $C = \{C_n, \delta_n: n \in N\}$. Elementele din C_n se numesc co-lanțuri n -dimensionale. Co-lanțul $c \in \text{Ker } \delta_{n+1}$ se numește co-ciclu n -dimensional. Idealul format din toate co-ciclurile n -dimensionale se notează cu $Z^n(T)$. Lanțul $c \in C_n$ se numește lanț n -dimensional de frontieră, dacă $c = \delta_{n-1}(c')$ pentru un careva co-lanț $n-1$ -dimensional $c' \in C_{n-1}$ adică $c \in \text{Im } \delta_n = \delta_n(C_{n-1})$. Modulul format din co-lanțuri n -dimensionale de frontieră se notează cu $B^n(T, G)$. Modulul $H^n(T) = Z^n(T)/B^n(T)$ se numește modul sau grup n -dimensional de coomologie al complexului de co-lanțuri T . Deoarece $\delta_{n+1}(Z^n(T)) \subset Z^{n+1}(T)$ și $\delta_{n+1}(B^n(T)) \subset B^{n+1}(T) \subset Z^{n+1}(T)$, vom considera $\delta_{n+1} = \delta_{n+1}|_{Z^n(T)}$. Fie $p_n: Z^n(T) \rightarrow H^n(T) = Z^n(T)/B^n(T)$ proiecția naturală. Atunci omomorfismul δ_{n+1} induce omomorfismul $\delta_{n+1}: H^n(T) \rightarrow H^{n+1}(T)$ astfel încât $p_{n+1} \circ \delta_{n+1} = \delta_{n+1} \circ p_n$. În rezultat se obține șirul de coomologii $H^*(T) = \{H^n(T), \delta_n: n \in N\}$ al complexului de co-lanțuri T :

$$0 \rightarrow H^0(T) \rightarrow H^1(T) \rightarrow H^2(T) \rightarrow \dots \rightarrow H^n(T) \rightarrow H^{n+1}(T) \rightarrow \dots$$

Este evident că șirul de coomologii $H^*(T)$ este și un complex de co-lanțuri.

2.8. Complexul G -dual. Fixăm un inel R și un R -modul G . Complexul de lanțuri $C = \{C_n, \partial_n: n \in N\}$ generează complexul de co-lanțuri $T(G) = \{Hom(C_n, G), \bar{\partial}_n: n \in N\}$. Vom spune că complexul $T(G)$ este G -dualul complexului T . Șirul de coomologii $H^*(T(G)) = \{H^n(T(G)), \bar{\partial}_n: n \in N\}$ se va numi șirul de coomologii cu coeficienți din G al complexului de lanțuri T .

Complexul de co-lanțuri $C = \{C_n, \delta_n: n \in N\}$ generează complexul de lanțuri $T(G) = \{Hom(C_n, G), \bar{\delta}_n: n \in N\}$. Vom spune că complexul $T(G)$ este G -dualul complexului T . Șirul de omologii $H(T(G)) = \{H_n(T(G)), \bar{\delta}_n: n \in N\}$ se va numi șirul de omologii cu coeficienți din G al complexului de co-lanțuri T .

2.9. Șiruri de mulțimi orientate. Fixăm un inel R și un R -modul G .

Sistemul $T = \{E_n, h_n: n \in N\}$ se numește *șir de mulțimi orientate*, dacă satisface condițiile:

- (i) mulțimea E_0 este nevidă și $h_0: E_0 \rightarrow 0$ este o aplicație;
- (ii) dacă $n \geq 1$ și mulțimea E_n este vidă, atunci și mulțimea E_{n+1} este vidă;
- (iii) dacă $n \geq 1$ și mulțimea E_n este nevidă, atunci $h_n: E_n \rightarrow S(E_{n-1}, G)$ este o aplicație.
- (iv) dacă $n \geq 2$, $x \in E_n$ și $h_n(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$, atunci G -cuvântul $h_{n-1}(h_n(x)) = a_1h_{n-1}(x_1) + a_2h_{n-1}(x_2) + \dots + a_mh_{n-1}(x_m)$ este echivalent cu cuvântul nul 0 din $S(E_{n-2}, G)$.

Fie $T = \{E_n, h_n: n \in N\}$ un șir de mulțimi orientate. Modulul $S(E_n, G)$ se numește modulul de lanțuri n -dimensionale al șirului T cu coeficienți din G și ce notează cu $S_n(T, G)$. Dacă mulțimea E_n este vidă, atunci $S_n(T, G) = \{0\} \subset G$. Dacă $n \geq 1$ și mulțimea E_n nu este vidă, atunci construim aplicația multivocă $\Gamma_n: E_n \rightarrow E_{n-1}$ la care $\Gamma_n(x) = \cap \{H \subset E_{n-1}: h_n(x) \in$

$F(H)\} = \text{Sup}_{E_{n-1}}(x)$. Dacă $h_n(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$, unde $a_1, a_2, \dots, a_m \in Z \setminus \{0\}$ și $x_1, x_2, \dots, x_m \in E_{n-1}$ sunt elemente diferite, atunci $\Gamma_n(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Vom spune că Γ_n este aplicația suport a aplicației h_n , iar mulțimea $\Gamma_n(x)$ este frontiera elementului $x \in E_n$ în E_{n-1} . În cazul când mulțimea E_n este vidă aplicația Γ_n este trivială. Elementul $h_n(x)$ reprezintă ”o orientare” a frontierei.

Considerăm omomorfismul trivial $\partial_0: S_0(\mathbb{T}, G) \rightarrow S_{-1}(\mathbb{T}, G) = 0$. Dacă mulțimea E_{n+1} este vidă, atunci considerăm omomorfismul trivial $\partial_{n+1}: S_{n+1}(\mathbb{T}, G) \rightarrow \{0\} \subset S_n(\mathbb{T}, G)$. Fie $n \geq 1$ și mulțimea E_{n+1} nu este vidă. Aplicația $h_{n+1}: E_{n+1} \rightarrow F(E_n)$ generează omomorfismul $\partial_{n+1} = \bar{h}_{n+1}: S_{n+1}(\mathbb{T}, G) \rightarrow S_n(\mathbb{T}, G)$, unde $\partial_{n+1}(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) = a_1h_{n+1}(x_1) + a_2h_{n+1}(x_2) + \dots + a_nh_{n+1}(x_m)$ pentru orice G -cuvânt $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \in S_{n+1}(\mathbb{T}, G)$. Dacă $x \in E_{n+1}$, atunci considerăm că $h_{n+1}(-x) = -h_{n+1}(x)$. În acest caz omomorfismul de frontieră ∂_{n+1} este bine definit.

În rezultat se obține complexul de lanțuri $S(\mathbb{T}, G) = \{S_n(\mathbb{T}, G), \partial_n: n \in N\}$ și complexul de colanțuri G -dual $S^*(\mathbb{T}, G) = \{S^n(\mathbb{T}, G), \delta_n: n \in N\}$ al șirului de mulțimi orientate $\mathbb{T} = \{E_n, h_n: n \in N\}$:

Complexul de lanțuri $S(\mathbb{T}, G) = \{S_n(\mathbb{T}, G), \partial_n: n \in N\}$ induce șirul de omologii $H(\mathbb{T}, G) = \{H_n(\mathbb{T}, G), \partial_n: n \in N\}$ al șirului de mulțimi orientate $\mathbb{T} = \{E_n, h_n: n \in N\}$:

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(\mathbb{T}, G) \rightarrow H_n(\mathbb{T}, G) \rightarrow \dots \rightarrow H_2(\mathbb{T}, G) \rightarrow H_1(\mathbb{T}, G) \rightarrow H_0(\mathbb{T}, G) \rightarrow 0.$$

Complexul de co-lanțuri $S^*(\mathbb{T}, G) = \{S^n(\mathbb{T}, G), \delta_n: n \in N\}$ induce șirul de coomologii $H^*(\mathbb{T}, G) = \{H^n(\mathbb{T}, G), \delta_n: n \in N\}$ al șirului de mulțimi orientate $\mathbb{T} = \{E_n, h_n: n \in N\}$:

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{T}, G) \rightarrow H^1(\mathbb{T}, G) \rightarrow H^2(\mathbb{T}, G) \rightarrow \dots \rightarrow H^n(\mathbb{T}, G) \rightarrow H^{n+1}(\mathbb{T}, G) \rightarrow \dots$$

Notă. Dacă $n \geq 1$, mulțimea E_n nu este vidă și mulțimea E_{n+1} este vidă, atunci:

- $H_n(\mathbb{T}, G) = Z_n(\mathbb{T}, G)$;
- $H_m(\mathbb{T}, G) = 0$ pentru oricem $m \geq n+1$.

Notăm cu $v(\mathbb{T}) = \max\{n: E_n \text{ nu este vidă}\}$.

Definiția 1. Șirul de mulțimi orientate $\mathbb{T} = \{E_n, h_n: n \in N\}$ se numește singular, dacă mulțimea $h_n(E_{2n}) = \{h_{2n}(x): x \in E_{2n}\}$ generează algebric modulul $F(E_{2n-1})$ pentru orice $n \geq 1$.

Definiția 2 ([11], Definiția V.4.7). Șirul de mulțimi orientate $\mathbb{T} = \{E_n, h_n: n \in N\}$ se numește similar cu un punct, dacă $\partial_{2n}: S_{2n}(\mathbb{T}, G) \rightarrow S_{2n-1}(\mathbb{T}, G)$ este o bijecție pentru orice $n \geq 1$.

Orice șir de mulțimi orientate similar cu un punct este și un șir singular de mulțimi orientate.

Teorema 1. Fie $\mathbb{T} = \{E_n, h_n: n \in N\}$ un șir singular de mulțimi orientate. Atunci:

1. $v(\mathbb{T})$ este număr par sau $v(\mathbb{T}) = \infty$.
2. $H_{2n-1}(\mathbb{T}, G) = 0$ pentru orice $n \geq 1$.
3. $\partial_{2n}(S_{2n}(\mathbb{T}, G)) = S_{2n-1}(\mathbb{T}, G)$ pentru orice $n \geq 1$.
4. $H_0(\mathbb{T}, G) = S(E_0, G)$ și $H_{2n}(\mathbb{T}, G) = Z_{2n}(\mathbb{T}, G)$ pentru orice $n \geq 1$.

5. Dacă complexul de omologii este exact, atunci $H_n(T, G) = 0$ pentru orice $n \geq 1$.

Demonstrație. Observăm că $Z(E_0, G) = S(E_0, G)$. Fixăm $n \geq 1$. Din faptul că mulțimea $h_n(E_{2n}) = \{h_{2n}(x) : x \in E_{2n}\}$ generează algebric modulul $F(E_{2n-1})$ rezultă că $E_{2n-1} = \cup \{F_{2n}(x) : x \in E_{2n}\}$ și $\partial_{2n}(S_{2n}(T, G)) = S_{2n-1}(T, G)$. Dacă E_{2n} este mulțime vidă, atunci și E_{2n-1} este mulțime vidă. Deci $v(T)$ este număr par sau $v(T) = \infty$, $B_{2n}(T, G) = 0$, $Z_{2n-1}(T, G) = B_{2n-1}(T, G) = S_{2n-1}(T, G)$, $B_{2n}(T, G) = 0$, iar $Z_{2n}(T, G) \subset S_{2n}(T, G)$. Dacă aplicația $\partial_{2n} : S_{2n}(T, G) \rightarrow S_{2n-1}(T, G)$ este o biecție, atunci $Z_{2n}(T, G) = 0$. Afirmările 1-4 sunt demonstrate. Afirmarea 5 este o consecință a afirmației 2.

Următoarea afirmație este evidentă și a fost demonstrată în ([11], Teorema V.4.8).

Teorema 2. Fie $T = \{E_n, h_n : n \in N\}$ un șir de mulțimi orientate similar cu un punct. Atunci $H_0(T, G) = C(E_0, G)$, iar $H_n(T, G) = 0$ pentru orice $n \geq 1$.

Admitem că este dată o clasă de obiecte Ω , numite spații, cu proprietățile:

K1. Pentru orice obiect $A \in \Omega$ sunt determinate subobiectele, subobiecte admisibile, subobiecte deschise și complementările lor.

K2. Pentru orice obiecte $A, B \in \Omega$ sunt determinate morfismele și scufundările $A \rightarrow B$.

K3. Pentru orice obiect $A \in \Omega$, inelul dat R și orice R -modul G în careva mod se construiesc șirul de omologii $H(A, G) = \{H_n(A, G), \partial_n : n \in N\}$ și șirul de coomologii $H^*(A, G) = \{H^n(A, G), \delta_n : n \in N\}$.

Eilenberg și Steenrod (vezi [11]) au propus următoarele axiome ale teoriilor de omologii.

Axioma 1. Axioma comutativității.

Orice morfism $A \rightarrow B$ și orice omomorfism $G_1 \rightarrow G_2$ generează diagrame comutative

$$H_{n+1}(A, G_1) \rightarrow H_{n+1}(B, G_2)$$

$\downarrow \downarrow$

$$H_n(A, G_1) \rightarrow H_n(B, G_2)$$

pentru orice n .

Axioma 2. Axioma exactității.

Această axiomă presupune exactitatea șirului de omologii.

Axioma 3. Axioma omotopiei.

Pentru a formula această axiomă este necesar de definit noțiunea de "omotopie" pentru obiectele (spațiile) din Ω . Apoi se definesc spații omotopic echivalente. Axioma omotopiei presupune că la obiectele "omotopic" echivalente grupurile de omologii coincid.

În legătură cu această axiomă este bine venită noțiunea de "retract", care este un morfism special al obiectului pe un subobiect.

Axioma 4. Axioma exciziei.

Pentru a formula această axiomă este necesar de definit pentru perechea (X, Y) , unde Y este subspațiu admisibil al spațiului X , grupurile de omologii $H_n(X, Y)$. Dacă U este o mulțime deschisă în X și $U \subset Y$, iar perechea $(X \setminus U, Y \setminus U)$ este admisibilă, atunci incluziunea $(X \setminus U, Y \setminus U) \rightarrow (X, Y)$ generează scufundări isomorfe $H_n(X \setminus U, Y \setminus U) \rightarrow H_n(X, Y)$.

Axioma 5. *Axioma dimensiunii.*

Această axiomă presupune: dacă obiectul A este format dintr-un singur "element", atunci grupurile H_0 și G sunt isomorfe, iar $H_n = \{0\}$ pentru $n \geq 1$.

Din teoria generală a omologiilor [11, 17, 20] se obține:

1. Dacă șirul de omologii $H(T, G) = \{H_n(T, G), \partial_n: n \in N\}$ este exact, atunci și șirul de coomologii $H^*(T, G) = \{H^n(T, G), \delta_n: n \in N\}$ este exact.
2. Dacă șirul de omologii $H(T, G) = \{H_n(T, G), \partial_n: n \in N\}$ este exact și direct, atunci și șirul de coomologii $H^*(T, G) = \{H^n(T, G), \delta_n: n \in N\}$ este exact și direct.

2.10. Referitor la omologii poliedrale. Se numește complex poliedral o familie γ de poliedre simple cu proprietățile: dacă $P \in \gamma$ și H este o fațetă a poliedrului P , atunci $H \in \gamma$; dacă $P, Q \in \gamma$, atunci P și Q sau nu se intersectează, sau ele au o fațetă comună de o anumită dimensiune.

Fixăm un complex poliedral γ . Notăm cu E_n totalitatea poliedrelor de dimensiunea n din γ . Pentru a construi șirul omological de mulțimi $T = \{E_n, h_n: n \in N\}$ trebuie să determinăm și aplicațiile h_n . Cu acest scop, este necesar să orientăm poliedrele din γ .

Vom spune că pe poliedrul n -dimensional P este dată o orientare coerentă, dacă fiecărei fațete H i se pune în corespondență un număr $\alpha(H) \in \{-1, 1\}$ astfel încât pentru orice $m \leq n$ și orice fațetă m -dimensională H vom avea $\Sigma\{\alpha(F): F \text{ este o față } m\text{-dimensional pentru } H\} = 0$.

Admitem că pentru fiecare poliedru $P \in \gamma$ este fixată o orientare coerentă. Atunci notăm $h_n(P) = \Sigma\{\alpha(F)F: F \text{ este o fațetă } n\text{-dimensional pentru } P\}$ pentru orice poliedru n -dimensional $P \in \gamma$. În aceste condiții șirul de mulțimi orientate $T = \{E_n, h_n: n \in N\}$ este construit. Apoi se construiesc și se cercetează grupurile sau modulele de omologii și coomologii. De asemenea se demonstrează că aceste obiecte nu depind de orientarea coerentă fixată.

2.11. Exemplu. Simplexul n -dimensional este un tetraedru n -dimensional. El este determinat de $n+1$ vârfuri ale lui. Din această simplexul n -dimensional abstract este o mulțime din $n+1$ elemente diferite. Simplexul abstract cu vârfurile a_0, a_1, \dots, a_n se notează $[a_0, a_1, \dots, a_n]$. Dacă $\sigma: \{0, 1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$ este o permutare și $\text{sgn } \sigma = 1$, atunci $[a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}] = [a_0, a_1, \dots, a_n]$.

Pe fiecare simplex $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ există o orientare admisibilă. Considerăm că ordinea elementelor a_0, a_1, \dots, a_n este fixată. O față $n-1$ -dimensională are forma $[a_0, a_1, \dots, a_{i-1},$

$a_{i+1}, \dots, a_n]$ și orientarea $\alpha([a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n]) = (-1)^i$. Fără obstacole se determină că această orientare este coerentă. Vom considera că pe fiecare simplex este fixată o orientare construită în modul indicat. Nu se cere ca orientările la diferite simplexe să fie acordate.

Un complex simplicial abstract este o pereche ordonată de mulțimi $K = (V, F)$, unde V este o mulțime nevidă de elemente numite vârfurile complexului, iar F este o familie de submulțimi finite a mulțimii V , numite simplexe, cu proprietățile: dacă $v \in K$, atunci $\{v\} \in F$; dacă $f \in F$ și g este submulțime nevidă a mulțimii F , atunci $g \in F$; dacă $f \in F$ conține $k+1$ elemente din V , atunci k se numește dimensiunea simplexului f .

Fixăm un complex simplicial abstract $K = (V, F)$. Vom considera că pe mulțimea V este fixată o ordine liniară sau o bine ordonare. Notăm cu E_n totalitatea simplexelor n -dimensionale din K . Atunci $E_0 = \{\{v\} : v \in V\}$. Dacă $f \in E_n$, atunci $f = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ și ordinea elementelor a_0, a_1, \dots, a_n coincide cu ordinea din V . Conform acestei ordonări orientăm toate simplexele din K . Fie $f = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ și $f_i = [a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n]$. Atunci notăm $h_n(f) = \sum (-1)^i f_i$. În aceste condiții șirul de mulțimi orientate $T(K) = \{E_n, h_n : n \in N\}$ este construit. În rezultat se obține complexul de lanțuri $S(K, G) = \{S_n(K, G), \partial_n : n \in N\}$ și complexul de colanțuri G -dual $S^*(K, G) = \{S^n(K, G), \delta_n : n \in N\}$ al șirului de mulțimi orientate $T(K) = \{E_n, h_n : n \in N\}$. Complexul de lanțuri $S(K, G)$ și complexul de colanțuri $S^*(K, G)$ nu depind de ordonarea și orientările simplexelor. Deci pentru orice complex simplicial abstract K se determină șirul de omologii $H(K, G) = \{H_n(K, G), \partial_n : n \in N\}$ și șirul de coomologii $H^*(K, G) = \{H^n(K, G), \delta_n : n \in N\}$. Aceste șiruri sunt exacte [5, 10, 11, 17, 19, 20, 9].

2.12. Exemflu. Complexele cubice abstracte permit construirea omologiilor și coomologiilor cubice. Este suficient să construim orientări coerente pe cubul abstract n -dimensional I^n . Vom efectua aceasta inductiv. Cubul $I^0 = \{0\}$ și se va considera orientat pozitiv. Cubul $I^1 = \{0, 1\}$ și are o pereche de fețe $F^1_{10} = \{I^1_{10} = \{0\}, I^1_{11} = \{1\}\}$. Admitem că pentru cubul n -dimensional I^n coerent sunt definite n perechi de fețe $n-1$ -dimensionale $\{F^n_i = \{I^n_{i0}, I^n_{i1}\} : 1 \leq i \leq n\}$. Notăm $I^{n+1} = I^n \times \{0, 1\}$, $F^{n+1}_i = \{I^{n+1}_{i0} = I^n_{i0} \times \{0, 1\}, I^{n+1}_{i1} = I^n_{i1} \times \{0, 1\}\}$ pentru orice $i \leq n$ și $F^{n+1}_{n+1} = \{I^{n+1}_{(n+1)0} = I^n \times \{0\}, I^{n+1}_{(n+1)1} = I^n \times \{1\}\}$. Considerăm că $\alpha(I^{n+1}_{ij}) = (-1)^{i+j}$.

2.13. Referitor la morfismele șirurilor de mulțimi orientate.

Definiția 1. Fie $T_1 = \{E_{(1,n)}, h_{(1,n)} : n \in N\}$ și $T_2 = \{E_{(2,n)}, h_{(2,n)} : n \in N\}$ două șiruri de mulțimi orientate. Șirul de aplicații $\Psi = \{\psi_n : E_{(1,n)} \rightarrow E_{(2,n)} : n \in N\}$ se numește morfism al șirului de mulțimi orientate T_1 în șirul de mulțimi orientate T_2 și notăm $\Psi : T_1 \rightarrow T_2$, dacă $\bar{\psi}_n = \psi_n \bullet h_{(1,n)} = h_{(2,n)} \bullet \psi_n$ pentru orice $n \geq 1$, unde $\bar{\psi}_{n-1} : F(E_{(1,n-1)}) \rightarrow F(E_{(2,n-1)})$ este omomorfismul generat de aplicația ψ_{n-1} .

Teorema 1. Fie $T_1 = \{E_{(1,n)}, h_{(1,n)} : n \in N\}$ și $T_2 = \{E_{(2,n)}, h_{(2,n)} : n \in N\}$ două șiruri de mulțimi orientate, iar $\psi = \{\psi_n : E_{(1,n)} \rightarrow E_{(2,n)} : n \in N\}$ un morfism al șirului T_1 în șirul T_2 . Atunci

morfismul Ψ induce un șir de omomorfisme $\mu = \{\mu_n : C_n(T_1, G) \rightarrow C_n(T_2, G) : n \in N\}$ cu proprietățile:

1. Pentru orice $c = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m \in S_n(T_1, G)$ vom avea $\mu_n(c) = a_1\psi_n(x_1) + a_2\psi_n(x_2) + \dots + a_m\psi_n(x_m)$.
2. $\partial_{(1,n)} \bullet \mu_{n-1} = \mu_n \bullet \partial_{(2,n)}$ pentru orice $n \geq 1$.
3. $\mu_n(Z_n(T_1, G)) \subset Z_n(T_2, G)$ și $\mu_n(B_n(T_1, G)) \subset B_n(T_2, G)$ pentru orice $n \geq 1$.
4. Dacă $\psi_n(E_{(1,n)}) = E_{(2,n)}$ pentru orice $n \geq 1$, atunci și $\mu_n(B_n(T_1, G)) = B_n(T_2, G)$ pentru orice $n \geq 1$.

Demonstrare. Fie $n \geq 1$ și mulțimea $E_{(1,n)}$ nu este vidă. Pentru $c = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m \in S_n(T_1, G)$ notăm $\mu_n(c) = a_1\psi_n(x_1) + a_2\psi_n(x_2) + \dots + a_m\psi_n(x_m)$. Obținem un omomorfism $\mu_n : S_n(T_1, G) \rightarrow S_n(T_2, G)$. Vom avea $\mu_n(S_n(T_1, G)) = S_n(T_2, G)$ dacă $\psi_n(E_{(1,n)}) = E_{(2,n)}$. În particular, λ_n este un omomorfism injectiv, o scufundare. Observăm că omomorfismul $\mu_n = \bar{\psi}_n$ este indus de aplicația ψ_n . Omomorfismul μ_n este surjectiv dacă și numai dacă aplicația ψ_n este surjectivă.

Considerăm complexe de lanțuri $S(T_1, G) = \{S_n(T_1, G), \partial_{(1,n)} : n \in N\}$ și $S(T_2, G) = \{S_n(T_2, G), \partial_{(2,n)} : n \in N\}$. Obținem diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_n(T_1, G) & \xrightarrow{\mu_n} & S_n(T_2, G) \\ \partial_{(1,n)} \downarrow & & \downarrow \partial_{(2,n)} \\ S_{n-1}(T_1, G) & \xrightarrow{\mu_{n-1}} & S_{n-1}(T_2, G) \end{array}$$

Din egalitatea $\bar{\psi}_{n-1} \bullet h_{(1,n)} = h_{(2,n)} \bullet \psi_n$ obținem că diagrama este comutativă: $\partial_{(2,n)} \bullet \mu_n = \mu_{n-1} \bullet \partial_{(1,n)}$. Deci $\mu_n(Z_n(T_1, G)) \subset Z_n(T_2, G)$ și $\mu_{n-1}(B_{n-1}(T_1, G)) \subset B_{n-1}(T_2, G)$. Prin urmare $\mu_n : Z_n(T_1, G) \rightarrow Z_n(T_2, G)$ este un omomorfism surjectiv. Din comutativitatea diagramei și din faptul că μ_n și μ_{n-1} vor fi omomorfisme surjective vom avea $\mu_{n-1}(B_{n-1}(T_1, G)) = B_{n-1}(T_2, G)$.

Notă. Șirul de omomorfisme $\mu = \{\mu_n : S_n(T_1, G) \rightarrow S_n(T_2, G) : n \in N\}$ cu proprietatea $\partial_{(1,n)} \bullet \mu_{n-1} = \mu_n \bullet \partial_{(2,n)}$ pentru orice $n \geq 1$ se numește morfism al unui complex de lanțuri în altul.

2.14. Referitor la omotopia morfismelor șirurilor de mulțimi orientate.

Noțiunea de omotopie a complexelor de lanțuri a fost definită de S. Eilenberg și N. Steenrod ([11], Definiția V.4.1): Fie $T_1 = \{S_{(1,n)}, \partial_{(1,n)} : n \in N\}$ și $T_2 = \{S_{(2,n)}, \partial_{(2,n)} : n \in N\}$ două complexe de lanțuri. Morfismele $\psi, \varphi = \{\psi_n, \varphi_n : S_{(1,n)} \rightarrow S_{(2,n)} : n \in N\}$ ale complexului T_1 în complexul T_2 se numesc omotopice, dacă există un șir de omomorfisme $D = \{D_n : S_{(1,n)} \rightarrow S_{(2,n+1)} : n \in N\}$ astfel încât $\partial_{(2,n+1)} \bullet D_n + D_{n-1} \bullet \partial_{(1,n)} = \varphi_n - \psi_n$ pentru orice $n \geq 1$ și se spune că D este o omotopie de transfer ψ în φ (se notează $D : \psi \approx \varphi$).

Se demonstrează că relația $\psi \approx \varphi$ este o relație binară de echivalență ([10], Lema V.4.2). Dacă $\psi \approx \varphi$, atunci morfismele ψ , φ induc același morfism al complexelor de omologii ([11], Teorema V.4.4).

Aceste noțiuni în mod identic se extind pentru șiruri de mulțimi orientate.

Definiția 1. Fie $T_1 = \{E_{(1,n)}, h_{(1,n)}: n \in N\}$ și $T_2 = \{E_{(2,n)}, h_{(2,n)}: n \in N\}$ două șiruri de mulțimi orientate. Morfismele $\psi, \varphi = \{\psi_n, \varphi_n: E_{(1,n)} \rightarrow E_{(2,n)}: n \in N\}$ ale șirului T_1 în șirul T_2 se numesc omotopice, dacă există un șir de aplicații $D = \{D_n: E_{(1,n)} \rightarrow F(E_{(2,n+1)}): n \in N\}$ astfel încât $\partial_{(2,n+1)} \bullet D_n + \bar{D}_{n-1} \bullet h_{(1,n)} = \varphi_n - \psi_n$ pentru orice $n \geq 1$ și se spune că D este o omotopie de transfer ψ în φ (se notează $D: \psi \approx \varphi$).

Următoarea teoremă permite să extindem proprietățile omotopiilor complexelor de lanțuri pentru șiruri de mulțimi orientate.

Teorema 1. Fie $T_1 = \{E_{(1,n)}, h_{(1,n)}: n \in N\}$ și $T_2 = \{E_{(2,n)}, h_{(2,n)}: n \in N\}$ două șiruri de mulțimi orientate, iar ψ, φ a complexelor: $T_1 \rightarrow T_2$ două morfisme ale șirului T_1 în șirul T_2 . Dacă $\bar{\psi}, \bar{\varphi} = \{\bar{\psi}_n, \bar{\varphi}_n: S_n(T_1, G) \rightarrow S_n(T_2, G): n \in N\}$ sunt șirurile de omomorfisme induse de morfismele ψ, φ , atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. ψ, φ sunt omotopic echivalente.
2. $\bar{\psi}, \bar{\varphi}$ sunt omotopic echivalente pentru orice grup de coeficienți G .

Demonstrare. Fie $D: \psi \approx \varphi$. Examinăm șirul de omomorfisme $\bar{D} = \{\bar{D}_n: S(E_{(1,n)}, G) \rightarrow S(E_{(2,n+1)}, G): n \in N\}$, unde $\bar{D}_n(ax) = aD_n(x)$ pentru orice $n \geq 0, x \in E_{(1,n)}$ și $a \in G$. Din $D: \psi \approx \varphi$ obținem $\bar{D}: \bar{\psi} \approx \bar{\varphi}$.

Dacă $G = Z$, atunci $E_{(1,n)} C(E_{(1,n)}, G) = F(E_{(1,n)})$ și $D = \bar{D}|_{E_{(1,n)}}$. Prin urmare și din $\bar{D}: \bar{\psi} \approx \bar{\varphi}$ obținem $D: \psi \approx \varphi$. Teorema este demonstrată.

Corolarul 1. Relația de omotopie a morfismelor șirurilor de mulțimi orientate este o relație de echivalență.

Corolarul 2. Morfismele omotopice ale unui șir de mulțimi orientate pe alt șir de mulțimi orientate induc același morfism al complexelor de omologii și același morfism al complexelor de coomologii.

Notă. Se poate spune că Teoria Omologiilor începe de la formula lui Euler, sau caracteristica Euler a poliedrelor. În anul 1857 Riemann a introdus noțiunea de varietate și unele caracteristici omologice ca noțiunile de gen și n -conexiune. Apoi în 1871 Betti [2] demonstrează independența ”numerelor omologice” de modul cum a fost aleasă baza. În faimoasa sa lucrare "Analysis situs" Henri Poincaré [18] a introdus pentru prima dată noțiunile de complex de lanțuri simpliciale și de omologie simplicială a varietății triangulabile. Studiul claselor omologice ca grupuri abeliene a fost inițiat de Emmy Noether, Leopold Vietoris și Walther Mayer în perioada 1925-1928 [23, 5, 17]. Cărțile [1, 3, 10, 13, 18, 23] conțin diverse momente din istoria apariției noțiunilor topologice.

Conexiuni cu diverse domenii sunt reflectate în lucrările [1, 4, 6, 10, 13, 16, 22, 24, 25, 26, 27].

Teorii omologice sunt construite în lucrările [4, 5, 11, 12, 18, 20]. Rolul poliedrelor în natură și diverse teorii este oglindit în lucrările [1, 3, 4, 7, 8, 9, 15, 16, 17].

Bibliografie

1. P. Alexandroff, *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, Springer Verlag, Berlin, 1932 (English translation: *Elementary concepts of topology*, Dover Publications, Inc., New York, 1961).
2. E. Betti, *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni*, Ann. Mat. Pura Appl. 2/4, 1871, 140-158.
3. D. W. Brisson, *Visual Comprehension in n-Dimensions*, in: D. Brisson (editor), *Hypergraphics: Visualizing Complex Relationships in Art, Science and Technology*, AAAS Selected Symposium 24, Washington, D.C.: AAAS, 1978, 109–145.
4. S. Cataranciuc, *Topologia algebrică a relațiilor multi-are*, Ed. USM, Chișinău, 2015.
5. H. P. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton, 1956.
6. M. CIOBANU, R. MIRON, *O cercetare originală în topologia modernă. Reflecții asupra corelațiilor dintre real și abstract*, Academos. 2015, 1, 68-77.
7. H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes* (third edition), New York, Dover Publications, 1973.
8. H. S. M. Coxeter, *The Beauty of Geometry: Twelve Essays*, Dover Publications, 1999.
9. P. R. Cromwell, *Polyhedra*. Cambridge University Press. , 1997.
10. B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern Geometry - Methods and Application*, Springer: Part 1, 1992, Part 2, 1992, Part 3, 1993.
11. S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton U. Press, Princeton, 1952 (In rusă: Н. С т и н р о д, С. Э й л е н б е р г, Основания алгебраической топологии, М.: ГИФМЛ, 1958).
12. J. G. Hocking, G. S. Young, *Topology*, Addison-Weiley Publ. Co., 1961.
13. A. T. Fomenko, *Visual and hidden symmetry in geometry*, Computers Math. Applic. 17, no. 1-3, 1989, 301-320.
14. J. E. Goodman and J. O'Rourke (Editors), *Handbook of discrete and computational geometry*, Chapman & Hall, 2004
15. B. Grünbaum, *Polyhedra with hollow faces*, Proc of NATO-ASI Conference on Polytopes (Toronto 1993), ed T. Bisztriczky et al., Kluwer Academic pp. 43–70.
16. R. B. King (editor), *Chemical applications of topology and graph theory*, Elsevier, 1983.
17. P. McMullen and S. Schulte, *Abstract Regular Polytopes*, Cambridge University Press, 2002.

18. R. Miron, I. Pop, *Topologie Algebrică: Omologie.Omotopie. Spații de acoperire*, București, 1974.
19. Henri Poincaré, *Analysis situs*, J. Ecole polytech. (2) **1**, 1895, 1–121.
20. L.S. Pontryagin. *Foundations of Combinatorial Topology*. Graylock Press. 1952.
21. E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer, 1982.
22. M. Tegmark, *The Mathematical Universe*, *Foundations of Physics* **38** (2), 2008, 101–150(arxiv:0704.0646. Bibcode:2008FoPh.38.101T. doi:10.1007/s10701-007-9186-9)
23. C. A. Weibel, *History of Homological Algebra*, chapter 28 in the book: *History of Topology* by I.M. James, Elsevier, 1999.
24. Э. Зиман, О. Бьюнеман, *Толерантные пространства и мозг*, Сборник: *На пути к теоретической биологии*, М.: Мир, 1970
25. А. А. Хусаинов, В. Е. Лопаткин, И.А. Трещев, *Исследование математической модели параллельных вычислительных процессов методами алгебраической топологии*, *Сибирский журнал индустриальной математики* 11:1, 2008, 141-151.
26. А. А. Хусаинов, В. В. Ткаченко, *О группах гомологий асинхронных систем переходов*, *Дальневосточный математический журнал*. 2005. Т.6. №1-2. С.23-38.
27. А. А. Хусаинов, *Кубические гомологии и размерность Лица свободных частично коммутативных моноидов*, *Математический сборник*, 2008, 199:12, 129–154.

REFERITOR LA STUDIUL TOPOLOGIILOR DE REȚEA

Mitrofan CIOBANU, academician, dr. hab., prof. univ.

Dorin PAVEL, dr., conf. univ. interimar

Universitatea de Stat din Tiraspol

Abstract. Topology allows one to naturally build a bridge between the discrete and the continuous. Any topology is generated by some family of pseudo-quasimetrics. In particular, the topology of a finite space is generated by some quasimetric. The results of this article contribute to study *the networks from a topological point of view*. We have also contributed to some topological aspect of quasi-metric spaces.

Rezumat. Topologia permite să se construiască în mod natural o punte de legătură între discret și continuu. Orice topologie este generată de o familie de pseudo-quasimetrici. În special, topologia unui spațiu finit este generată de o quasimetrică. Rezultatele acestui articol contribuie la studierea rețelelor din punct de vedere topologic. Contribuim, de asemenea, la un anumit aspect topologic al spațiilor quasimetricice.

1. Introducere

Fie X un T_0 -spațiu finit. Pentru orice punct x din X notăm cu $Q(x)$ intersecția tuturor mulțimilor deschise ce conțin punctul dat x . Mulțimea $Q(x)$ este cea mai mică mulțime deschisă ce conține punctul x . Dacă $y \in Q(x)$, atunci notăm $d(x, Y) = 0$. În caz contrar, considerăm $d(x, y) = 1$. Funcția d este o quasimetrică care generează topologia spațiului finit X . Rețelele sunt obiecte finite. Din această cauză quasimetricile pot fi folosite la studiul topologic al rețelelor și grafurilor. În grafuri arcele pot fi ponderate cu mărimi diferite în diferite direcții. Pentru unele direcții ponderea poate fi egală cu zero. Din această cauză distanța pierde proprietatea de simetrie și face topologia grafului mult mai complicată, dar generată de o quasimetrică și nu de o metrică. Acest fapt se aplică la studiul topologiei rețelelor. Menționăm că quasimetricile și topologia au devenit un instrument de cercetare a diferitor probleme legate de studiul tehnologiilor informaționale [2, 6, 7, 8, 9, 15, 16]. Diverse noțiuni generale pot fi găsite în [1, 3, 11, 12, 15]. Vom folosi terminologia din [6, 9, 17]. În lucrările [4, 5] au fost examinate diverse spații de distanțe. Acest articol este o continuare a cercetărilor din lucrările [4, 5].

2. Spații quasimetricice

Se numește distanță pe mulțimea X o funcție $d: X \times X \rightarrow X$ cu proprietățile:

$$(D1) \quad d(x, y) \geq 0;$$

$$(D2) \quad d(x, y) + d(y, x) = 0, \text{ dacă și numai dacă } x = y.$$

În acest caz perechea (X, d) se numește spațiu cu distanță, iar X se numește spațiu.

Fie (X, d) un spațiu cu distanță. Dacă $x \in X$ și numărul $r > 0$, atunci $B(x, r) = \{ y \in X: d(x, y) < r \}$ se numește vecinătatea punctului x de raza r . O submulțime U din X se numește d -deschisă, dacă pentru orice punct $x \in U$ există un număr pozitiv r astfel încât

$B(x,r) \subseteq U$. Totalitatea $T(d)$ a submulțimilor d -deschise formează topologia spațiului cu distanță (X,d) sau topologia generată de distanța d . Această topologie este T_0 -topologie. Distanța d se numește quasi-metrică, dacă satisface proprietatea:

$$(D3) \quad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$$

Fie X un spațiu topologic. Șirul $\{x_n \in X: n = 1, 2, \dots\}$ converge către punctul $x \in X$ și notăm $x \in \text{Lim } x_n$ sau $\lim x_n = x$, dacă pentru orice vecinătate U a punctului x în X mulțimea $\{x_n : n = 1, 2, \dots\} \setminus U$ este finită. Spațiul X se numește secvențial, dacă submulțimea L nu este închisă în X dacă și numai dacă există un punct $x \in X \setminus L$ și un șir $\{x_n \in L: n = 1, 2, \dots\}$ pentru care $\lim x_n = x$.

Orice spațiu cu distanță este secvențial. Nu orice spațiu topologic este secvențial. Nu orice spațiu secvențial este spațiu cu topologia generată de o distanță. Nu orice topologie generată de o distanță este generată și de o quasi-metrică. Topologia generată de o quasi-metrică satisface primei axiome a numerabilității. Spațiul numerelor transfinite numărabile în topologia generată de ordinea obișnuită satisface primei axiome a numerabilității și nu este quasi-metrizabil. Topologia spațiului cu prima axiomă a numerabilității este generată de o distanță.

Dacă (X, d) este un spațiu cu distanță, $\{x_n \in X: n = 1, 2, \dots\}$ este un șir și $x \in X$, atunci $\lim x_n = x$ dacă și numai dacă $\lim d(x, x_n) = 0$.

Dacă (X, d) este un spațiu cu distanță, atunci $\{x_n \in X: n = 1, 2, \dots\}$ se numește șir fundamental sau șir Cauchy, dacă $\lim d(x_m, x_n) = 0$. Spațiul cu distanță se numește complet, dacă orice șir fundamental este Cauchy. În spațiul quasi-metric un șir Cauchy poate avea mai multe limite.

Exemplul 2.1. Fie $X = \{a, b, c_n : n = 1, 2, \dots\}$ este o mulțime cu toate elementele indicate diferite. Considerăm $d(a,b) = d(b,a) = d(c_n, a) = d(c_n, b) = 1$, $d(a, c_n) = d(b, c_n) = 2^{-n}$, $d(x, x) = 0$ pentru orice $n = 1, 2, \dots$ și orice $x \in X$. Atunci d este o quasi-metrică pe X și șirul $\{c_n : n = 1, 2, \dots\}$ nu este fundamental, dar converge către punctele a, b . Deci în spațiul quasi-metric nu orice șir convergent este șir Cauchy și nu orice șir convergent are o unică limită.

S. Nedev pentru orice distanță d a introdus distanța conjugată $d^c(x,y) = d(y,x)$ și distanța simetrică $d^s(x,y) = d(x,y) + d(y,x)$. Sunt adevărate următoarele afirmații.

Propoziția 2.1. Spațiile cu distanță (X, d) , (X, d^c) , (X, d^s) au aceleași șiruri Cauchy.

Propoziția 2.2. Spațiile cu distanță (X, d) , (X, d^c) sunt complete, atunci și numai atunci dacă spațiul (X, d^s) este complet.

Propoziția 2.3. Dacă d este o quasi-metrică, atunci d^s este o metrică.

Aceste afirmații permit de a extinde multe afirmații despre spații metrice (complete) pentru spații quasi-metric (complete).

Exemplul 2.2. Fie X o mulțime linear ordonată și pentru orice submulțime non-vidă L în X există infimumul $\inf(L)$ și supremul $\sup(L)$. Notăm $d(x,x) = d(x,y) = 0$ și $d(y,x) = 1$, dacă $x < y$. Atunci (X, d) este un spațiu quasi-metric. Aplicația $f: X \rightarrow X$ este continuă dacă și

numai dacă ea este isotonă (păstrează ordinea). Deoarece X este o latice completă, din teorema lui Knaster-Tarski rezultă că orice aplicație continuă $f: X \rightarrow X$ are puncte fixe și cel mai mic punct fix.

Exemplul 2.3. Fie $X = \{0, n^{-1} : n = 1, 2, \dots\}$, $d(n, m) = |n^{-1} - m^{-1}|$, $d(0, 0) = 0$, $d(n, 0) = 1$ și $d(0, m) = m^{-1}$ pentru orice $n, m > 0$. Spațiul cu distanță (X, d) este complet și compact, iar spațiile cu distanță (X, d^s) , (X, d^c) sunt discrete și nu sunt complete. Spațiile topologice $(X, T(d))$, $(X, T(d^s))$, $(X, T(d^c))$ admit metrici complete.

Exemplul 2.4. Fie $X = \{a, b, 1, 2, \dots\}$ mulțimea numerelor naturale împreună cu două elemente diferite a, b . Considerăm $d(x, x) = 0$, $d(a, b) = d(b, a) = d(n, a) = d(n, b) = 1$, $d(a, n) = d(b, n) = 2^{-n}$ și $d(n, m) = |2^{-n} - 2^{-m}|$ pentru orice $x \in X$ și $n, m \in \{1, 2, \dots\}$. Atunci d este o quasi-metrică pe X și șirul $\{1, 2, \dots\}$ este fundamental care converge către punctele a, b . Spațiul $(X, T(d))$ este compact.

3. Topologia unui graf

Un graf este o pereche ordonată de mulțimi $G = (V, E)$, unde V este o mulțime nevidă și finită de elemente numite nodurile (vârfurile) grafului, iar E este o mulțime de perechi de vârfuri din graf. În cazul grafurilor neorientate, perechile de vârfuri din mulțimea E sunt neordonate și sunt denumite muchii. Perechea neordonată sau ordonată formată din vârfurile x și y se notează (x, y) , vârfurile x și y se numesc extremitățile muchiei. Se admite existența a mai multe muchii cu aceleași extremități. Muchia de tipul (x, x) se numește buclă. Dacă există o muchie cu extremitățile x și y , atunci vârfurile x și y sunt adiacente. În cazul grafurilor orientate, perechile de vârfuri din mulțimea E sunt ordonate și sunt numite arce. Perechea ordonată formată din vârfurile x și y se notează (x, y) , vârful x se numește extremitatea inițială a arcului, iar vârful y se numește extremitate finală a arcului. Se admite existența a mai multe arce cu aceleași extremități. Fiecare extremitate a unei muchii (sau a unui arc) este considerată incidentă cu muchia (sau arcul) respectiv. Se numește grad al unui vârf x numărul de muchii incidente cu vârful x . Gradul vârfului x se notează cu $gr(x)$. Se numește vârf izolat un vârf care are grad 0. Se numește vârf terminal un vârf cu gradul 1.

Nota 3.1. Bucla (x, x) se consideră muchie dublă deoarece ambele ei capete au același vârf. Deci fiecare buclă (x, x) mărește gradul $gr(x)$ cu două unități.

Se numește *lanț* sau *drum* într-un graf neorientat sau orientat, o secvență de vârfuri (v_1, v_2, \dots, v_k) , unde vârful v_i este adiacent cu vârful v_{i+1} pentru orice $i < k$. Orice drum poate fi reprezentat și ca o succesiune de arce. Un lanț este *simplu*, dacă el nu conține de mai multe ori aceeași muchie sau arc. Un lanț este *elementar*, dacă el nu conține de mai multe ori același vârf (cu excepția $v_1 = v_k$). Dacă $v_1 = v_k$, atunci lanțul se numește *închis* sau *contur*. Se numește *ciclu* un lanț simplu închis. Graful ce nu conține cicluri simple se numește *arbore*.

Lanțul (sau ciclul) care conține fiecare muchie a grafului exact o singură dată se numește lanț (sau ciclu) eulerian. Lanțul (sau ciclul) care conține fiecare vârf al grafului exact o singură dată se numește lanț (sau ciclu) hamiltonian.

În ciclul eulerian orice vârf este vârf inițial al unei muchii de același număr de câte ori el este și vârf final al altor muchii. Din această cauză în așa grafuri toate vârfurile sunt pare. Graful se numește conex dacă orice două vârfuri pot fi unite cu un lanț. Graful cu lanțuri hamiltoniene este conex.

L. Euler a stabilit următoarele teoreme:

Teorema 3.1. Graful neorientat G conține un lanț eulerian care nu este ciclu, dacă și numai dacă numai două vârfuri sunt impare (au grad impar).

Teorema 3.2. Graful neorientat G conține un ciclu eulerian dacă și numai dacă toate vârfurile sunt pare (au grad par).

Notăm cu $p(x,y)$ ponderea muchiei (x,y) . De regulă, $p(x,y)$ și $p(y,x)$ pot fi definite. Așa graf se va numi ponderat asimetric. Dacă $p(x,y) = p(y,x)$ pentru orice muchie (x,y) , atunci graf se va numi ponderat simetric. Dacă ponderile coincide la toate arcele, atunci graful este orientat omogen. Se consideră că $p(x, y) + p(y,x) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$. Lungimea a unui lanț este numărul de muchii conținute. Suma ponderilor muchiilor (arcelor) din lanț se numește ponderea lanțului.

Suma ponderilor muchiilor (arcelor) din lanț se numește ponderea lanțului.

Notăm prin $d(v, w)$ valoarea minimă a ponderilor lanțurilor elementare, ce unesc vârful v cu vârful w . Numărul $d(v, w)$ exprimă distanța de la v până la w . În cazul când de la vârful v până la vârful w nu există nici un lanț, se consideră $d(v, w) = \infty$. În graful cu pondere omogenă $d(v,w) = d(w,v)$. Graful se numește conex, dacă $\min\{d(v,w), d(w, v)\} < \infty$ pentru orice două vârfuri v, w . Distanța $d(v,w)$ satisface axiomele quasi-metricii, adică au loc următoarele relații:

$$1) d(x, y) + d(y,x) = 0 \text{ dacă și numai dacă } x = y;$$

$$2) d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$$

$$\text{Deoarece } 0 \leq p(x,y) \leq +\infty, \text{ vom avea } 0 \leq d(x,y) \leq +\infty.$$

Dacă graful este cu pondere simetrică sau omogenă, atunci distanța $d(v,w)$ satisface axiomele metricii, adică au loc următoarele relații:

$$1) d(x, y) = 0 \text{ dacă și numai dacă } x = y;$$

$$2) d(x, y) = d(y, x);$$

$$3) d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$$

Exemplul 3.1. Examinăm graful ponderat asimetric $G = (V, E)$ în care $V = \{a,b,c, d\}$, iar $E = \{(a,b), (a,c), (c,a), (c, d), (d,c), (d,b)\}$ cu ponderile $p(a,b) = 1, p(a,c) = 2, p(c,a)=3, p(c,d) = 3, p(d,c) = 2, p(d,b) = 1$. Atunci $d(a,b)=1, d(a,c)=2, d(a,d) = 5, d(b,a) = d(b,c) = d(b,d) = \infty, d(c,a)= d(c,d)=3, d(c,b) = 2, d(d, a) = 5, d(d,b) = 1, d(d,c) = 2$.

Exemplul 3.2. Examinăm graful ponderat $G = (V, E)$ în care $V = \{a, b\}$, iar $E = \{(a, b)\}$ cu ponderile $p(a, b) = p \geq 0$, $p(b, a) = q \geq 0$, unde $p + q > 0$. Muchia (a, b) o imaginăm ca un segment numeric: $(a, b) = \{ta + (1-t)b : 0 \leq t \leq 1\}$. Vom avea $a = 1a + 0b$ și $b = 0a + 1b$. Dacă $x = ua + (1-u)b$ și $y = va + (1-v)b$, atunci $d(x, y) = p/|u-v|$ și $d(y, x) = q/|u-v|$. Funcția construită d este o quasi-metrică pe X .

Exemplul 3.3. Examinăm graful ponderat $G = (V, E)$, unde $p(a, b) + p(b, a) > 0$ pentru orice muchie (a, b) din E . Muchia $(a, b) \in E$ o imaginăm ca un segment numeric: $(a, b) = \{ta + (1-t)b : 0 \leq t \leq 1\}$. Vom avea $a = 1a + 0b$ și $b = 0a + 1b$. Totalitatea acestor segmente formează spațiul X . Vom avea că $V \subseteq X$. Dacă $x = ua_1 + (1-u)b_1$ și $y = va_2 + (1-v)b_2$ sunt două puncte diferite din X , atunci sunt posibile două cazuri:

Cazul 1. $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$.

Fie $u < v$. În acest caz la graful G adăugăm două vârfuri $G_1 = G \cup \{x, y\}$, iar în V muchia (a_1, b_1) o înlocuim cu trei muchii (a_1, x) , (x, y) , (y, b_1) cu ponderile $p(a_1, x) = up(a_1, b_1)$, $p(x, y) = (v-u)p(a_1, b_1)$, $p(y, b_1) = (1-v)p(a_1, b_1)$, $p(x, a_1) = up(b_1, a_1)$, $p(y, x) = (v-u)p(b_1, a_1)$, $p(b_1, y) = (1-v)p(b_1, a_1)$. În acest graf ponderat determinăm distanțele $d(x, y)$, $d(y, x)$.

Cazul 1. $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$.

Fie $u < v$. În acest caz la graful G adăugăm două vârfuri $G_1 = G \cup \{x, y\}$, iar în V muchiile (a_1, b_1) , (a_2, b_2) se înlocuiesc cu patru muchii (a_1, x) , (x, b_1) , (a_2, y) , (y, b_2) cu ponderile $p(a_1, x) = up(a_1, b_1)$, $p(x, b_1) = (1-u)p(a_1, b_1)$, $p(b_1, x) = (1-u)p(b_1, a_1)$, $p(x, a_1) = up(b_1, a_1)$, $p(a_2, y) = vp(a_2, b_2)$, $p(y, b_2) = (1-v)p(a_2, b_2)$, $p(b_2, y) = (1-v)p(b_2, a_2)$, $p(y, a_2) = vp(b_2, a_2)$. În acest graf ponderat determinăm distanțele $d(x, y)$, $d(y, x)$.

Funcția construită d este o quasi-metrică pe X , care este o extindere a quasi-metricii d pe V . Spațiul (X, d) este linear conex și compact. Dacă în G toate ponderile sunt pozitive, atunci acest spațiu este metrizabil. Topologia $T(d)$ a spațiului (X, d) mai efectiv descrie proprietățile topologice ale grafului G .

Dacă graful G este un arbore, atunci orice aplicație continuă $f: X \rightarrow X$ are puncte fixe.

4. Topologia rețelelor de calculatoare

Rețeaua de calculatoare reprezintă un ansamblu de calculatoare interconectate prin intermediul unor medii de comunicație, asigurându-se astfel schimbul de date și informații prin utilizarea în comun a resurselor fizice, logice și informaționale de care dispune ansamblul de calculatoare conectate.

Metodele de conectare sunt în continuă dezvoltare și deja foarte diverse, începând cu tot felul de cabluri metalice și de fibră de sticlă, cabluri submarine, și terminând cu legături prin radio cum ar fi WLAN, Wi-Fi sau Bluetooth, prin raze infraroșii, prin intermediul tehnologiilor de telefonie mobilă (GPRS, EDGE, CDMA, 3G, 4G) sau chiar prin intermediul sateliților.

Fie dată o rețea de calculatoare. Dacă a , b sânt două noduri incidente, atunci volumul de informație ce se transmite de la nodul a spre b poate fi considerată ca ponderea arcului (a,b) în direcția de la a spre b . De regulă volumul de informații în diferite direcții este diferit.

Un alt motiv care duce la asincronismul rețelei constă în asincronismul parametrilor echipamentului. De exemplu, la modemele ADSL, 3G vitezele de intrare și ieșire a semnalului sânt diferite.

În aceasta se exprimă faptul că rețeaua de calculatoare ca graf ponderat este asincron.

La proiectarea topologiei rețelei trebuie de ținut cont de toți factorii (atât sincroni, cât și asincroni).

După *aria de cuprindere* se deosebesc rețele de calculatoare:

- personale - **PAN** (Personal AreaNetwork);
- locale - **LAN** (Local AreaNetwork);
- metropolitane - **MAN** (Metropolitan AreaNetwork);
- de arie largă - **WAN** (WideAreaNetwork).

Rețeaua PAN este o rețea de foarte mică întindere, de cel mult câțiva metri, constând din aparatele interconectabile pe care o persoană le poartă cu sine, ca de exemplu telefon mobil, player MP3 sau aparat de navigație portabil.

Rețelele locale includ stații (calculatoare, terminale) și sistemul de transfer date, plasate în aria uneia sau a câtorva clădiri vecine la distanțe de la sute de metri până la câțiva kilometri.

Rețelele metropolitane cuprind aria unui oraș, asigurând distanțe între componente de până la zeci de kilometri.

Rețelele de arie largă nu sunt limitate, practic, în aria posibilă de cuprindere. În caz general terminalele, calculatoarele pot fi plasate în cele mai îndepărtate colțuri ale Pământului.

Topologia rețelelor este studiul de aranjament sau cartografiere a elementelor (legături, noduri) dintr-o rețea la dispunerea spațială a calculatoarelor într-o rețea, în special interconexiunile fizice și logice dintre noduri.

Rețeaua locală este un exemplu de rețea care prezintă atât o topologie reală cât și o topologie logică. Orice nod în rețeaua locală are unul sau mai multe linkuri (legături, muchii) către unul sau mai multe noduri din rețea. Pentru determinarea topologiei reale a rețelei, toate nodurile și linkurile sunt reprezentate în formă de graf. De asemenea, reprezentarea fluxului de date dintre noduri în formă de graf determină topologia logică a rețelei. Deci pentru orice rețea de calculatoare, ca și în cazul Exemplului 3.3, se construiește spațiul quasi-metric (X, d) care permite studiul topologic al rețelei. Pentru o

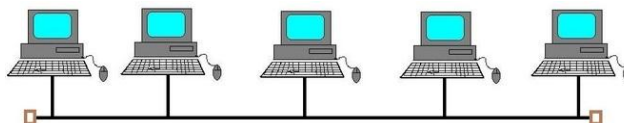
rețea anume topologiile logică și fizică pot fi identice, dar pot fi și diferite. Studiul topologiilor se complică, dacă:

- Fiecare link este ponderat în fiecare direcție;
- Ponderile linkului în diverse direcții pot fi diferite;
- La momentul dat unele noduri pot fi neaccesibile, dar păstrând interacțiunea altor noduri.

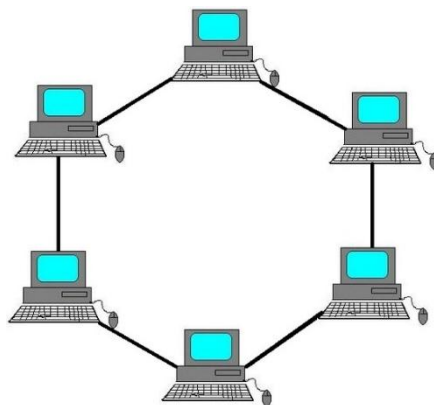
Ieșirea din rețea a unor calculatoare poate fi din careva motive tehnice sau din motive că la moment aceste calculatoare sunt ocupate cu îndeplinirea altor comenzi, care nu pot fi întrerupte.

Pe rețele există diverse tipuri de topologii. Prezentăm unele tipuri de topologii pe rețele.

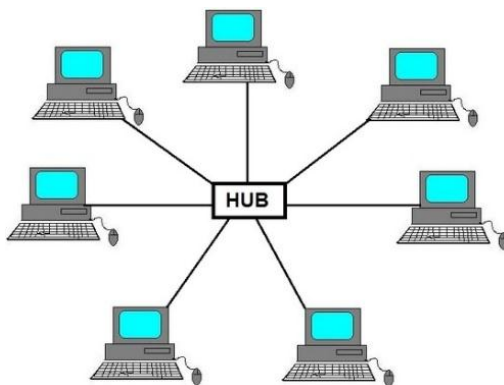
Topologia rețelei Magistrală (Bus): În cadrul acestui tip de rețea toate calculatoarele sunt interconectate la cablul principal al rețelei. Calculatoarele conectate în acest tip de rețea au acces în serie și în mod egal la toate resursele rețelei. Pentru utilizarea cablului nivelul logic trebuie să aștepte până se eliberează cablul pentru a evita coliziunile de date. Acest tip de rețea are însă un defect și anume: dacă rețeaua este întreruptă într-un loc fie accidental fie prin adăugarea unui alt nod de rețea atunci întreaga rețea este scoasă din funcțiune. Este totuși una din cele mai ieftine moduri de a pune la cale o rețea.



Topologia rețelei Inel (Ring): Tipul de rețea circular face legătura între calculatoare prin intermediul unui port de intrare (*In Port*) și a unui port de ieșire (*Out Port*). În această configurație fiecare calculator transmite date către următorul calculator din rețea prin portul de ieșire al calculatorului nostru către portul de intrare al calculatorului adresat. În cadrul acestei topologii instalarea cablurilor este destul de dificilă și atunci se recurge la un compromis între acest tip de rețea și cel de tip magistrală folosindu-se o unitate centrală care să închidă cercul numita **Media Acces Unit (MAU – unitate de acces a mediilor)**.



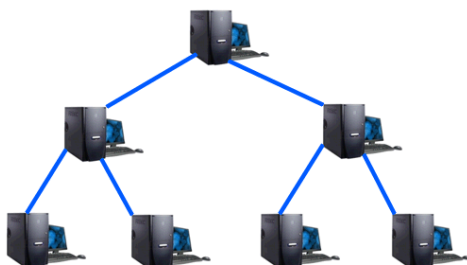
Topologia rețelei Stea (Star): Este tipul de topologie de rețea în care fiecare din nodurile de rețea este conectat la un nod central, numit hub sau switch. Toate datele care sunt transmise între nodurile din rețea sunt întâi transmise în acest nod central și abia apoi sunt retransmise la unele sau la toate celelalte noduri în rețea. Această conexiune centralizată permite o conexiune permanentă chiar dacă un dispozitiv de rețea iese din funcție. Singurul pericol este ieșirea din funcție a nodului central, care ar duce la pierderea legăturii cu toată rețeaua.



Topologia rețelei Inel-Dublu (Dual-Ring): O topologie de rețea în care două inele concentrice conectează fiecare nod dintr-o rețea. Pe fiecare inel din rețea este utilizată topologia de inel.

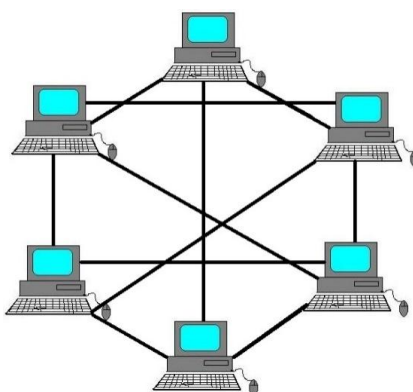
Topologia Stea Extinsă (Extended Star): Este prezentă multiplicarea nodurilor centrale, permițând lucrul rețelei chiar dacă unul din nodurile centrale se defectează. Are o performanță mai mare ca Star.

Topologia rețelei Arbore (Tree): Combină caracteristicile topologiilor bus și star. Nodurile sânt grupate în mai multe topologii star care la rândul lor sunt legate la un cablu central. Acestea pot fi considerate topologiile cu cea mai bună scalabilitate. Avantajul fiind segmentele individuale care au legături directe, iar dezavantajul este lungimea maximă a unui segment care este limitată. Dacă apar probleme pe conexiunea principală, sunt afectate toate calculatoarele de pe acel segment. Arborele se mai numește o stea ierarhică. Terminii provin din teoria grafurilor.

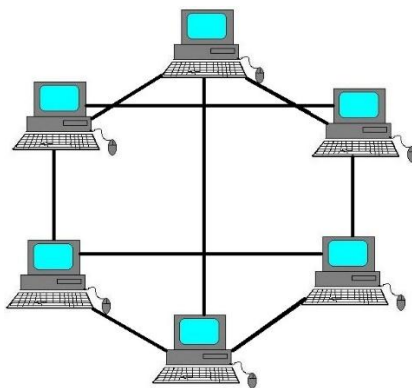


Topologia rețelei Completă (Fully Connected Network): Reprezintă o rețea în care fiecare nod este legat fizic cu toate nodurile din rețea (în teoria grafurilor acesta se numește graf complet). Rețelele cu topologia completă devin din ce în ce mai greu de instalat o dată

cu creșterea numărului de calculatoare din rețea. O rețea completă cu șase calculatoare va necesita 15 legături, în timp ce o rețea cu șapte calculatoare va necesita 21 de legături, etc. Această topologie este folosită în sisteme multiprocesor (cluster, minicomputer, computer, supercomputer) sau în rețele cu număr mic de noduri. Avantajul major al acestei topologii este marea toleranță la defecte, capacitatea de transfer garantată a canalului, precum și ușurința depănării. Dezavantajele topologiei de tip plasă includ dificultatea instalării și a reconfigurării precum și costurile relativ ridicate ale întreținerii legăturilor redundante.



Topologia rețelei Plasă (Mesh): Este o variantă simplificată a topologiei complete. Se obține din topologia completă prin eliminarea a câteva legături redundante. Acest tip de rețea oferă o conexiune continuă și dispune de algoritmi de reconfigurare în caz de noduri blocate sau neoperaționale. Scopul principal al acestor algoritmi este de a găsi cea mai bună rută pentru a ocoli nodurile neoperaționale și de a transmite până la destinație pachetele de date, în ciuda dificultăților.



Rețelele Hibride: Combină două sau mai multe topologii în așa fel încât rețeaua rezultantă nu prezintă una dintre topologii standard.

5. Aplicații

Cele mai des utilizate topologii la proiectarea rețelelor locale ce conțin de la câteva zeci până la câteva sute de calculatoare sunt cele de tip arbore.

Din punct de vedere practic la construirea modelului unei rețele este necesar:

- Să nu fie depășite distanțele maximal admisibile între două noduri adiacente (pentru a evita coliziunile și pierderea calității semnalului);
- Amplasarea optimală și folosirea cât mai eficientă a nodurilor centrale;
- Amplasarea optimală a router-elor Wi-Fi în vederea acoperirii cu semnal a spațiului de utilizare.

În rezultatul cercetărilor s-a ajuns la concluzia că, în cadrul Universității de Stat din Tiraspol este oportună implementarea rețelei cu topologia de tip arbore. Necesitatea elaborării unei rețele bine structurate a fost motivată de majorarea numărului de calculatoare în cadrul laboratoarelor de informatică, precum și în secțiile și subdiviziunile universității. Un alt motiv a fost necesitatea accesului la rețeaua internet pentru aceste calculatoare.

Nodurile principale ale rețelei LAN au fost amplasate în modul următor:

- câte un nod în fiecare sală de calculatoare;
- câte un nod în cadrul rectoratului, contabilității și a serviciului personal;
- pentru decanate, catedre, bibliotecă și alte subdiviziuni nodurile au fost distribuite în vederea respectării rigorilor enunțate mai sus.
- router-ele WiFi au fost amplasate în diferite zone ale blocului precum și la diferite etaje pentru a obține acoperirea maximală cu semnal.

Rețeaua construită este destul de complexă, deoarece sunt conectate peste 120 computere staționare prin intermediul a circa 20 de noduri (hub-uri și switch-uri) și un număr impunător de laptopuri și dispozitive mobile ce se pot conecta pentru moment la 8 router-e WiFi amplasate în interiorul blocului de studii și în router amplasat în curtea din fața blocului.

Bibliografia

1. M. A. Ahmed and F. M. Zeyada, *Generalization of some results to quasi-metric spaces and its applications*, Bulletin of International Mathematical virtual Institute 2 (2012), 101-107.
2. M. Chiang and M. Yang, *Towards Network X-ties From a Topological Point of View: Evolvability and Scalability*, Proc. 42nd Allerton Conference, 2004.
3. M. M. Choban, *Fixed points of mappings defined on spaces with distance*, Carpathian J. Math. **32** (2016), No. 2, 173 – 188.
4. M.M.Choban, D.I.Pavel, *On dense subspaces of the spaces of continuous pseudometrics*, Romai Journal 9 (2013), no. 2, 61-74.
5. M.M.Choban, D.I.Pavel, *On a space of pseudometrics*, International Conference "Mathematics and Information Technologies: Research and Education (MITRE-2011)", August 22-25, 2011, Abstracts, Moldova State University, Chișinău, 2011, 36-37.

6. S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, *Evolution of Networks*, Oxford University Press, 2002.
7. D. Duffus and I. Rival, *A structure theory for ordered sets*, *Discrete Mathematics* 35 (1981), 53-118.
8. A. Edalat and R. Heckmann, *A computational model for metric spaces*, *Theoretical Computer Science*, 193 (1982), 53-73.
9. R. Engelking, *General Topology*. PWN, Warszawa, 1977.
10. K. Funahashi, *On the approximate realization of continuous mappings by neural networks*, *Neural Networks* 2 (1989), 183—192.
11. B. Knaster and A. Tarski, *Un théorème sur les fonctions d'ensembles*. *Ann. Soc. Polon. Math.* 6 (1928), 133–134.
12. S. Y. Nedev, *O-metrizable spaces* (Russian) *Trudy Moskov. Mat. Ob-va* 24 (1971), 201{236. (English translation: *Trans. Moscow Math. Soc.* 24 (1974), 213{247).
13. B. Sosinsky, *Networking Bible*. Indianapolis: Wiley Publishing, 2009.
14. A.S. Tanenbaum, D. J. Wetherall, *Computer networks - 5th ed.*, Prentice Hall, 2013
15. A. Tarski, *A lattice-theoretical fix point theorem and its applications*, *Pacific J. Math.* 5 (1955), 285-309.
16. P. Waszkiewicz, *The local triangle axioms in topology and domain theory*, *Applied General Topology* 4 (2003), No. 1, 47-70.
17. M. Yang and M. Chiang, *END Tool User Manual*, Princeton University, 2004
18. В. Г. Олифер, Н. А. Олифер, *Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы: Учебник для вузов. 3-е изд.* — СПб.: Питер, 2006.

COMPORTAREA NICHELULUI ÎN ANTIMONIDUL DE GALIU CA DOPANT

Andrian GHEORGHITĂ, dr.

Eugeniu GHEORGHITĂ, dr. hab., prof. univ.

Leonid GUȚULEAC, dr., conf. univ.

***Mihail CARAMAN**, dr. hab., prof. univ.

Boris KOROLEVSKI, dr., conf. univ.

Pantelei UNTILA, dr., conf. univ.

Victoria MELINTE

Universitatea de Stat din Tiraspol, Chișinău, Moldova

**Universitatea de Stat din Moldova, Chișinău, Moldova*

e.gheorghita@mail.ru

Rezumat. În lucrare se analizează particularitățile proprietăților fizice ale antimonidului de galiu dopat cu nichel pentru un diapazon vast de concentrații, până la 3% atomare și temperaturi (2÷300)K. Din analiza în ansamblu a efectelor galvanomagnetice, optice și de iradiere se evidențiază în premieră un șir de particularități ale proprietăților fizice determinate de interacțiunea purtătorilor de sarcină cu momentul magnetic excitat de structura energetică a substratului electronic incomplet 3d.

Abstract. This work describes the features of the physical properties of the gallium's antimonide doped with nickel for a wide range of concentration, of up to 3% atoms and temperatures between (2 ÷ 300) K. After the overall analysis of the galvanomagnetic, optic and irradiation effects, it becomes possible to highlight, for the first time, a number of features of the physical properties determined by the interaction between charge carriers and magnetic moment generated by the energy of uncompleted electronic structure of the substrate 3d.

INTRODUCERE

Antimonidul de galiu se cercetează intens în ultimii ani, datorită perspectivei de a confecționa pe baza acestui semiconductor cu banda energetică interzisă la temperatura 300K $\varepsilon_g = 0,77eV$, dispozitive optoelectronice și microelectronice pentru diapazonul spectral infraroșu apropiat (1,0÷2,5) μ m: elemente termofotoelectrice, fotoelemente, fotodiode, LED-uri, lasere. Problema comportării elementelor din grupa de tranziție în familia semiconductorilor A^{III}B^V este actuală și are cum un aspect teoretic, așa și un aspect aplicativ de perspectivă. [1,2] Particularitățile comportării neobișnuite a dopanților din grupa elementelor de tranziție este determinată de prezența unui moment magnetic mare excitat de structura energetică a substratului electronic incomplet 3d, care contribuie la formarea în banda energetică interzisă a diferitor stări localizate specifice. Doparea combinațiilor din familia A^{III}B^V cu elemente din grupa fierului contribuie la formarea unui grup de materiale semimagnetice noi. Proprietățile neobișnuite a materialelor semimagnetice de diferite tipuri, inclusiv Hg_{1-x}Mn_xTe, Hg_{1-x-y}Cd_xMn_yTe sunt cunoscute în literatura de specialitate. [3] Spectrul de proprietăți fizice ale semiconductoarelor din grupa A^{III}B^V dopate cu elemente din

grupa de tranziție în diferite concentrații este mai vast și mai cu perspective decât materialele magnetice clasice.

Datele cunoscute în literatura de specialitate ne confirmă că dopanții elementelor din grupa de tranziție în matricile combinațiilor $A^{III}B^V$ formează stări localizate acceptoare în banda energetică interzisă. Aceste elemente, în diferite combinații formează stări energetice cu diferite energii de localizare. [4] În unele combinații formează stări energetice cu energii de localizare mari, iar în altele stări-acceptoare cu energii de activare mici. Spre exemplu, elementele din grupa fierului (grupa de tranziție) formează nivele acceptoare adânci în arsenidul de galiu [5], fosfidul de indiu [6], fosfidul de galiu [7] și nivele energetice acceptoare cu energii de ionizare mici, cum ar fi în antimonidul de indiu [8], antimonidul de galiu [9]. Fierul în antimonidul de galiu formează un acceptor cu energia de localizare $\varepsilon_i = (22 \pm 0,3) meV$ [9], manganul în antimonidul de galiu formează un nivel acceptor cu energia de localizare $\varepsilon_i = (18 \pm 0,5) meV$. [8] Comportarea neadecvată a acestor dopanți determină și o modificare serioasă a proprietăților fizice a materialelor dopante. La fel, delocalizarea esențială a funcțiilor de undă a electronilor din stările $3d$ presupune posibilitatea formării diferitor structuri ce se deosebesc de structura matricei, numite clustere. Proprietățile clusterilor acestor dopanți în antimonidul de galiu sunt discutate în lucrarea [10]. Comportarea nichelului ca dopant în diferite combinații este studiată insuficient. Proprietățile fizice ale arsenidului de galiu dopat cu nichel sunt studiate în lucrarea [11], în antimonidul de galiu informație este prezentată în lucrarea [12, 14].

În lucrarea dată se prezintă unele aspecte de comportare a nichelului în antimonidul de galiu în baza studierii efectelor galvanomagnetice și de iradiere.

1. REZULTATE EXPERIMENTALE ȘI DISCUȚIA LOR

Probele de antimonid de galiu dopat cu nichel, studiate în această lucrare au fost obținute prin metoda modificată a topirii zonale, descrisă în lucrarea [10]. Concentrația nichelului introdus în procesul tehnologic a variat în intervalul $(0,01 \div 3)$ procente atomare. Toate probele analizate au avut conductivitatea de tipul p. Majorarea concentrației nichelului contribuie la majorarea concentrației golurilor în probele studiate. Studiul efectelor galvanomagnetice în ansamblu cu proprietățile mecanice, utilizând metodele obișnuite, ne confirmă următoarele: antimonidul de galiu dopat cu nichel în concentrații mici de până la 0,01 procente atomare se obține în formă omogenă fără careva incluziuni. Deci, nichelul în așa concentrații se comportă ca un acceptor și am putea presupune că ocupă locul galiului în rețeaua cristalină a antimonidului de galiu. În lingoul monocristalin de antimonid de galiu dopat cu nichel în

concentrații mai mari de 0,1 procente atomare, se evidențiază niște incluziuni aciculare cu un diametru de dimensiuni nanometrice orientate de-a lungul deplasării zonei topite, de-o structură chimică și cristalină, după părerea noastră, ce diferă de structura matricii de bază. Cu majorarea concentrației dopantului respectiv crește și densitatea acestor incluziuni, numite de noi clustere. Am obținut și informații privitor la omogenitatea lingourilor din care au fost confecționate eșantioane pentru experimentele realizate în această lucrare. Diagrama eșantioanelor utilizate pentru experiment este prezentată în figura 1. În necesitatea determinării omogenității repartizării impurităților de-a lungul lingoului, pentru experiment s-au confecționat eșantioane de forma cerută de experiment. din diferite regiuni și cu diferite orientări ale incluziunilor, în modalitatea indicată în figura 1.

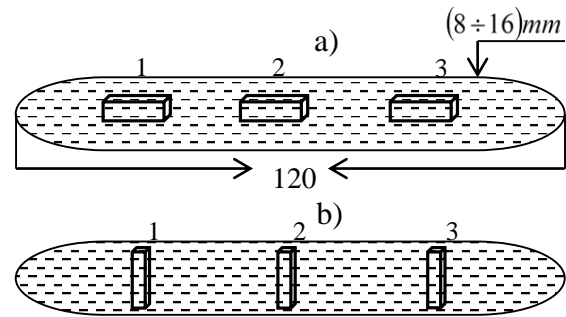


Figura 1. Diagrama confectionării probelor de antimonid de galiu dopat cu Fe, Mn, Ni în concentrații mai mari de 0,1% atomare.
a) de-a lungul incluziunilor aciculare sedimentate în procesul tehnologic;
b) perpendicular incluziunilor aciculare sedimentate în procesul tehnologic.

Analiza rezultatelor măsurătorilor efectelor de transport pentru eșantioanele cu aceeași concentrație a dopanților, indicate în figura 2 (1,2,3) cu aceeași orientare a incluziunilor, ne determină o repartiție a impurităților de-a lungul deplasării zonei topite ce nu întrece 10 procente. Acest rezultat este specific tuturor concentrațiilor dopantului mai mari de 0,1 procente atomare. În acest aspect conchidem că tehnologia utilizată pentru obținerea antimonidului de galiu dopat cu nichel ne permite să obținem materiale omogene cu caracteristici performante. Rezultatele măsurătorilor efectelor de transport pentru eșantioanele din regiunea 2 (figura 1, incluziunile orientate de-a lungul deplasării zonei topite), concentrațiile $(N_A - N_D)cm^{-3}$ pentru două temperaturi (80K și 300K) sunt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

Nr. probei	300K		80K	
	Concentrația Ni în soluție, %	$(N_A - N_D)cm^{-3}$	Concentrația Ni în soluție, %	$(N_A - N_D)cm^{-3}$
1	0,1	$1,56 \cdot 10^{17}$	0,1	$6,25 \cdot 10^{16}$
2	0,15	$1,64 \cdot 10^{17}$	0,15	$7,8 \cdot 10^{16}$
3	0,20	$1,78 \cdot 10^{17}$	0,20	$8,3 \cdot 10^{16}$
4	0,3	$1,95 \cdot 10^{17}$	0,3	$8,9 \cdot 10^{16}$
5	0,5	$2,1 \cdot 10^{17}$	0,5	$9,2 \cdot 10^{16}$
6	1	$2,2 \cdot 10^{17}$	1	$9,6 \cdot 10^{16}$
7	2	$3 \cdot 10^{17}$	2	$1,3 \cdot 10^{17}$

Din rezultatele experimentale prezentate în acest tabel, evidențiem următoarele: majorarea concentrației dopantului nichelului de la 0,1 procente atomare până la 2 procente

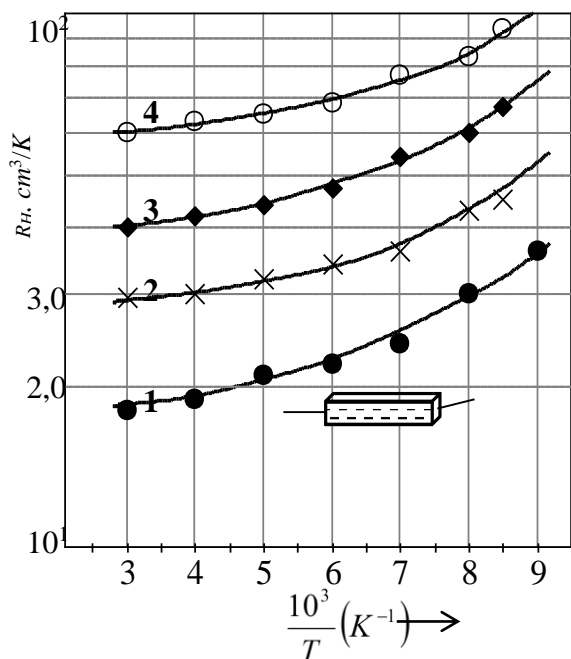


Figura 2. Dependenta constantei Hall de temperatura și concentrația nichelului.

1 – 2,0% Ni; 3 – 1,0% Ni;
2 – 0,5% Ni; 4 – 0,01% Ni.

intermetalice de o altă structură cristalină în raport cu structura cristalină a antimonidului de galiu. Problema structurii chimice a incluziunilor cere un studiu, special suplimentar,

atomare exercită o micșorare respectivă a constantei Hall și o majorare respectivă a concentrației ($N_A - N_D$) de la $1,56 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ până la $3,2 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ până la $3,2 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. Variația nemonotonă a concentrației ($N_A - N_D$) în raport cu concentrația dopantului introdus evidențiază faptul că solubilitatea nichelului în antimonidul de galiu nu este destul de eficientă. Pentru concentrații mici ale dopantului, proprietățile fizice ale monocristalelor dopate puțin se deosebesc de caracteristicile antimonidului de galiu nedopat.

În concentrații mai mari de 0,1% atomare dopantul, în cazul dat nichelul, interacționează, fie cu atomul de galiu sau cu atomul de stibiu formând niște combinații

intermetalice de o altă structură cristalină în raport cu structura cristalină a antimonidului de galiu. Problema structurii chimice a incluziunilor cere un studiu, special suplimentar,

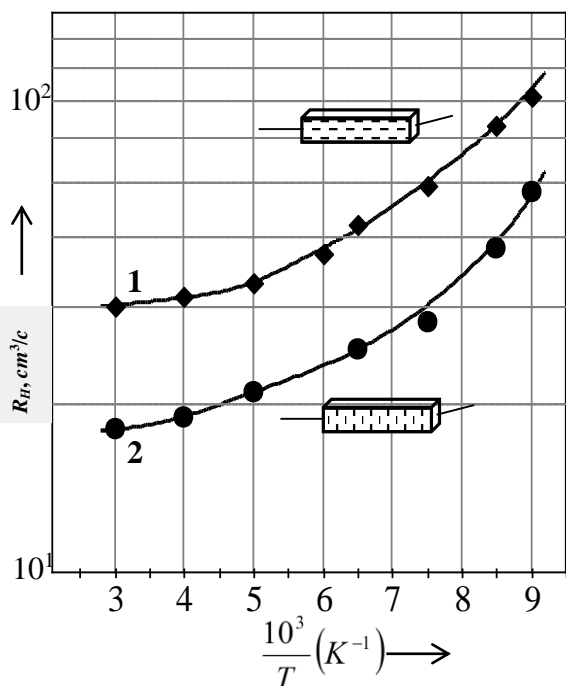


Figura 3. Spectrul constantei Hall pentru antimonidul de galiu dopat cu nichel pentru diferite orientări a incluziunilor (orientarea este indicată în figură).

rezultatele căruia vor fi prezentate adăugător. În figura 2 sunt prezentate dependențele constantei Hall de temperatură și de concentrația nichelului, pentru cazul când incluziunile sunt orientate de-a lungul deplasării zonei topite. Rezultatele prezentate în această figură confirmă concluziile formulate mai sus.

În figura 3 sunt prezentate dependențele constantei Hall pentru proba N6 din tabel, conținutul de nichel 1 procent atomar în raport de temperatură, înregistrate pentru două situații: acicularele orientate paralel câmpului magnetic și perpendicular curentului ce circulă prin probă (curba 1) și curba 2 incluziunile sunt perpendiculare cum curentului ce circulă prin probă, așa și

câmpului magnetic. Datele prezentate în această figură ne înregistrează o anizotropie a efectelor galvanomagnetice.

Asimetria constantei Hall în cazul probei date alcătuiește ~40 procente. La fel, experimental este înregistrat faptul că valoarea asimetriei crește cu mărirea concentrației dopantului. Evident, că creșterea asimetriei constantei Hall, în principiu, este determinată de creșterea respectivă a densității incluziunilor orientate fie într-un caz sau în alt caz. În general, prezența asimetriei, ce depinde de orientarea incluziunilor nanometrice, poate fi explicată, dacă admitem o șuntare a curentului electric ce circulă prin probă de aceste incluziuni intermetalice. Din punct de vedere teoretic, în lucrarea [13] este demonstrat, că constanta Hall pentru probele cu incluziuni aciculare orientate perpendicular câmpului magnetic este determinată de relația

$$R_x = \frac{kR_1\sigma_1 - R_2\tau_2^2 / \sigma_1}{k\sigma_1 + \sigma_2}, \quad (1)$$

unde R_1 și R_2 corespunzător este constanta Hall pentru matricea de bază, adică pentru antimonidul de galiu și constanta Hall pentru materialul incluziunilor; σ_1 și σ_2 - conductivitățile electrice ale antimonidului de galiu și materialului incluziunilor; k - este o constantă ce reprezintă raportul suprafeței secțiunii matricii de bază (antimonidul de galiu) și suprafața sumară a incluziunilor (perpendiculară lungimii incluziunilor). Din relația (1) rezultă: valoarea constantei Hall (R_x) depinde nu numai de proprietățile fizice ale matricii și materialului incluziunilor exprimată prin valoarea constantei k . Evident că această constantă, în principiu, depinde de concentrația dopantului care contribuie la mărirea densității incluziunilor orientate. Parametrii incluziunilor intermetalice R_2 și τ_2 la temperaturile 80K și 300K practic sunt aceiași.

În așa caz, sumar, dependența constantei Hall de temperatură este determinată de R_1 și τ_1 ($R_1 > R_2$). La fel, în această lucrare, este specificat că pentru probele în care incluziunile sunt orientate paralel câmpului magnetic, efectul de șuntare a tensiunii Hall lipsește. În așa caz $R_x \approx R_1$ corespunde unui material dopat puternic ce nu conține incluziuni. Concepțiile discutate mai sus justifică rezultatele experimentale înregistrate pentru antimonidul de galiu dopat cu nichel.

S-au analizat și dependențele mobilităților purtătorilor de sarcină de temperatură și de concentrația dopantului. Experimental se evidențiază următoarele particularități: cu majorarea concentrației nichelului în matricea de bază, experimental se înregistrează o micșorare neliniară respectivă a mobilităților golurilor: deosebiri esențiale în raport cu rezultatele noastre discutate pentru antimonidul de galiu dopat cu fier nu s-au înregistrat [10]; în intervalul de temperaturi studiat (80÷300)K, este cunoscut faptul, împrăștierea purtătorilor de sarcină, de obicei, are loc pe centrele impuritate de diferite categorii, pe fononi acustici și

optici, fiecare din care este o funcție de temperatură [10]. Deci, la general, pentru mecanismele de împrăștiere integral este cunoscută relația:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}; \quad (2)$$

unde μ_1, μ_2, μ_3 - mobilitățile purtătorilor de sarcină determinate de împrăștierea lor pe impurități, fie ionizate, fie neutre; fononi acustici și fononi optici. Analiza realizată pentru trei mecanisme enunțate nu ne permit să obținem o corelație a datelor teoretice cu cele experimentale. În acest caz, procedăm ca și în cazul antimonidului de galiu dopat cu fier [10] și mangan [15], introducem un nou mecanism de împrăștiere numit împrăștierea purtătorilor de sarcină pe clustere, deci integral, rezultatele experimentale se prezintă

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_4}; \quad (3)$$

μ_4 - împrăștierea suplimentară pe clustere. Aceste patru mecanisme de împrăștiere ne-au permis să obținem o corelare suficientă dintre experiment și calculele teoretice. Ajustarea mecanismului μ_4 a permis determinarea dimensiunilor clusterelor răspunzătoare de această împrăștiere, sunt de ordinul $\sim 100 \text{ \AA}$.

2. ANALIZA STRUCTURII SPECTRELOR DE ABSORBȚIE ȘI IRADIERE ALE ANTIMONIDULUI DE GALIU DOPAT CU NICHEL

2.1. Analiza structurii spectrelor de absorbție ale antimonidului de galiu dopat cu nichel

Pentru înregistrarea spectrelor de absorbție, utilizând metodele cunoscute mecanice și chimice, s-au pregătit plăcuțe cu grosimea $(150-200)\mu m$ cu incluziunile perpendicular suprafetei de incidență a radiației. Instalația pentru înregistrarea spectrelor de transparență a fost confecționată pe baza spectrofotometrului difracționic MDR-2. Se analizează segmentele spectrelor din regiunea absorbției fundamentale. Spectrele de absorbție înregistrate pentru probele cu diferite orientări a incluziunilor (în planul incident și în planul perpendicular incidenței) evidențiază o asimetrie de valoare aproximativ egală cu 10% ce proporțional crește cu majorarea concentrației nichelului. Deosebiri esențiale în forma spectrelor de absorbție înregistrate pentru materialul nedopat și dopat cu nichel în experiment nu s-au înregistrat, mai ales pentru cazul unei concentrații a dopantului mai mică decât 10^{15} atomi de nichel introdus în matricea antimonidului de galiu.

În figura 4 sunt prezentate segmente ale spectrelor de absorbție ale antimonidului de galiu nedopat (spectrul 1) și dopat cu nichel în diferite concentrații înregistrate la temperatura de 80K. După cum am menționat, deosebiri esențiale în forma spectrelor de absorbție nu se înregistrează. Din spectrul de absorbție a antimonidului de galiu nedopat, utilizând metoda cunoscută am determinat lărgimea benzii energetice interzise, ca valoare $(800 \pm 1) \text{ meV}$. Acest rezultat corelează cu valoarea acestui parametru cunoscută în literatura de specialitate. Rezultatele experimentale confirmă o deplasare practic paralelă în domeniul energiilor mici, păstrându-și forma. Valoarea deplasării depinde de concentrația dopantului și variază în intervalul $(10 \div 30) \text{ meV}$ pentru diapazonul de concentrații a dopantului inclus $(5 \cdot 10^{16} \div 3,2 \cdot 10^{18}) \text{ cm}^{-3}$. Această deplasare servește ca indicatoriu că atomii impuritari de nichel formează în banda energetică interzisă a compusului GaSb stări energetice activ optic. Creșterea rapidă a coeficientului de absorbție atât în cristalele de antimonid de galiu nedopate, cât și dopate cu nichel este condiționată de concentrația relativ mare a purtătorilor de sarcină liberi.

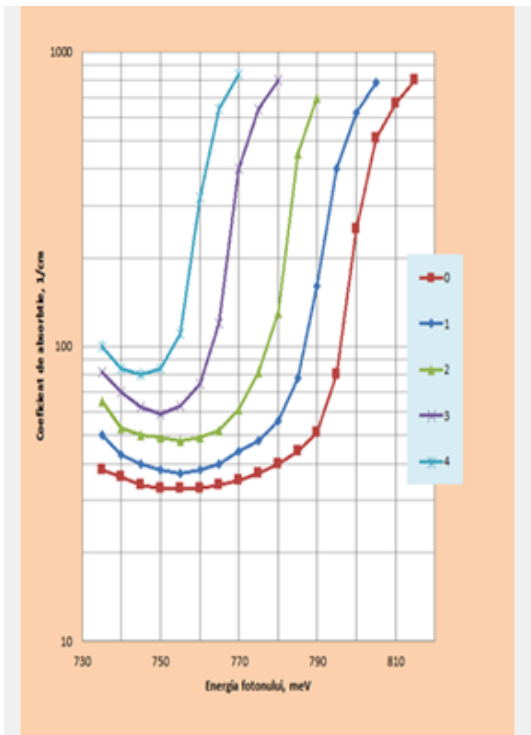


Figura 4. Spectrele de absorbție ale antimonidului de galiu dopat cu nichel ($T=80\text{K}$):
 0 – antimonid de galiu nedopat;
 1 – GaSb concentrația $2,8 \cdot 10^{16}$ atomi Ni ;
 2 – GaSb concentrația $2 \cdot 10^{17}$ atomi Ni ;
 3 – GaSb concentrația $5 \cdot 10^{17}$ atomi Ni ;
 4 – GaSb concentrația $4 \cdot 10^{18}$ atomi Ni

energetică a frontierei absorbției fundamentale sub influența impurităților.

Utilizând relația pentru variația lărgimii benzii energetice interzise în raport de concentrația dopantului din lucrarea [16], am calculat concentrația nichelului în antimonidul de galiu:

$$\Delta \varepsilon_g = 2,5 \cdot 10^5 \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{eN^{1/3}}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_s};$$

unde $\Delta \varepsilon_g$ - valoarea deplasării benzii fundamentale de absorbție exprimată în meV, e – sarcina electronului, N – concentrația impurităților exprimată în cm^{-3} , ε_s - constanta dielectrică. Pentru antimonidul de galiu $\varepsilon_s = 15,7$. Datele obținute sunt prezentate în tabelul 2.

Datele tabelului confirmă o concordanță suficientă între concentrația nichelului inclus în procesul tehnologic și concentrația dopantului calculată, având din experiment deplasarea

Tabelul 2.

Nr.	Concentrația nichelului inclus, cm^{-3}	$\Delta\varepsilon_g$, meV	Concentrația nichelului calculată, cm^{-3}
1	10^{14}	0	-
2	10^{16}	10	$2,86 \cdot 10^{16}$
3	$5 \cdot 10^{16}$	12	$4,94 \cdot 10^{16}$
4	$2 \cdot 10^{17}$	22	$3,04 \cdot 10^{17}$
5	$5 \cdot 10^{17}$	25	$4,97 \cdot 10^{17}$
6	$2 \cdot 10^{18}$	30	$3,1 \cdot 10^{18}$

Pentru concentrația nichelului mai mare de $10^{20} cm^{-3}$ se modifică esențial structura spectrului de absorbție determinată, după părerea noastră, de creșterea densității clusterilor și de orientarea lor mai mult haotică.

2.2. Analiza structurii spectrelor de iradiere ale antimonidului de galiu dopat cu nichel și dopat dublu cu nichel și telur

Spectrele de iradiere au fost înregistrate utilizând instalația și condițiile experimentului descrise în lucrarea [11]. Excitarea procesului de recombinare radiativă a fost realizată cu ajutorul laserului de tipul LG-126 cu energia fotonului de excitare 1,07eV. Spectrele de fotoluminescență înregistrate sunt polarizate. Efectele de relaxare spinică pentru cristalele de antimonid de galiu dopate cu nichel în această lucrare nu se analizează. Se discută structura

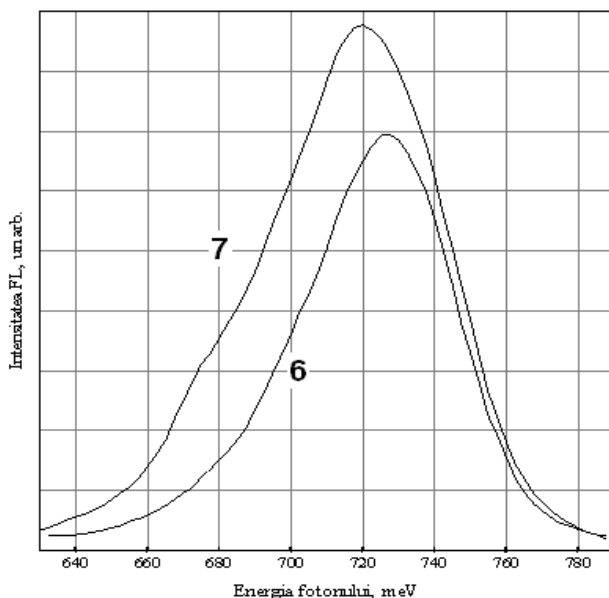


Figura 5. Spectrele de iradiere ale antimonidului de galiu dopat dublu cu nichel și telur la $T=300K$

- 6 - Concentrația nichelului 0,5%;
Concentrația telurului $10^{19} cm^{-3}$;
- 7 - Concentrația nichelului ~1%;
Concentrația telurului $10^{19} cm^{-3}$.

spectrelor de iradiere ale antimonidului de galiu dopat cu nichel în diferite concentrații, precum și structura spectrelor de fotoluminescență pentru cristalele de antimonid de galiu dopat dublu cu telur (ca donor în antimonidul de galiu) și nichel (cele discutate mai sus ne permite să conchidem, că acest dopant în antimonidul de galiu se comportă ca acceptor). Procesele de recombinare radiativă se analizează pentru trei temperaturi: 300K, 77K și 2K în lipsa câmpului magnetic exterior.

În figura 5 sunt prezentate spectrele de iradiere a monocristalelor de antimonid de galiu dopate cu telur ($\sim 10^{19} cm^{-3}$) și nichel cu concentrația 0,5% atomare și 1% atomar inclus înregistrate la temperatura camerei în lipsa

câmpului magnetic exterior. Datele experimentale din această figură ne confirmă că spectrele de iradiere conțin o bandă largă, cu contur asimetric din partea energiilor mici. Astfel asimetria benzii de emisie radiativă în mare măsură este condiționată de prezența unei concentrații mari (10^{19}cm^{-3}) de atomi de telur în probele studiate. Totodată și în apropierea nemijlocită a maximumului benzii de emisie din partea energiilor mari se conturează slab un prag la $\sim 735\text{meV}$.

Poziția energetică a acestei particularități nu se schimbă la majorarea concentrației nichelului de la 0,5% atomare pînă la 1 % atomic. După cum este știut, lățimea benzii energetice interzise la temperatura camerei se aproximează cu $\sim 730\text{meV}$. Așa dar, este natural de admis că această particularitate a spectrelor de emisie radiativă este determinată de tranziții radiative din minimumul benzii energetice de conducție în centrul zonei Brillouin în banda de valență. La fel, experimental este înregistrat faptul că la majorarea concentrației nichelului de două ori de la 0,5% atomare pînă la 1 % atomic, maximumul benzii de fotoluminescență se deplasează spre energii mici cu $\sim 10\text{meV}$. Totodată are loc majorarea intensității absolute a fotoluminescenței la majorarea concentrației nichelului în antimonidul de galiu. Aceste rezultate sunt în bună corelare cu cele înregistrate în spectrele de absorbție și confirmă că nichelul formează în banda energetică interzisă un nivel impuritar deplasat la $\Delta E_{\text{Ni}} \sim 10\text{meV}$ de la extremitatea benzii energetice respective. Structura spectrului capătă o formă bine conturată la temperaturi joase (77K) și, în deosebi, la 2K.

În figura 6 sunt prezentate spectrele de emisie radiativă a probelor de antimonid de galiu dopate cu nichel și telur la temperatura 77K și dopate numai cu nichel la 2K.

Caracteristic pentru spectrele de fotoluminescență la 77K este structura cu trei benzi de emisie bine cunoscută în literatura de specialitate. Banda de emisie A bine corelată cu lățimea benzii energetice interzise la această temperatură poate fi considerată ca formată prin suprapunerea benzii de emisie obținute în rezultatul anihilării radiative a excitonilor cu banda de emisie bandă-bandă în centrul zonei Brillouin. La această temperatură capătă o continuare distinctă și banda de emisie cu participarea nivelului radiativ determinat de atomii impuritari de telur.

Emisia fotoluminescentă cu participarea acestui nivel duce la formarea benzii C cu maxim în regiunea 750meV . Această fâșie radiativă este determinată de interacțiunea donor-acceptor.

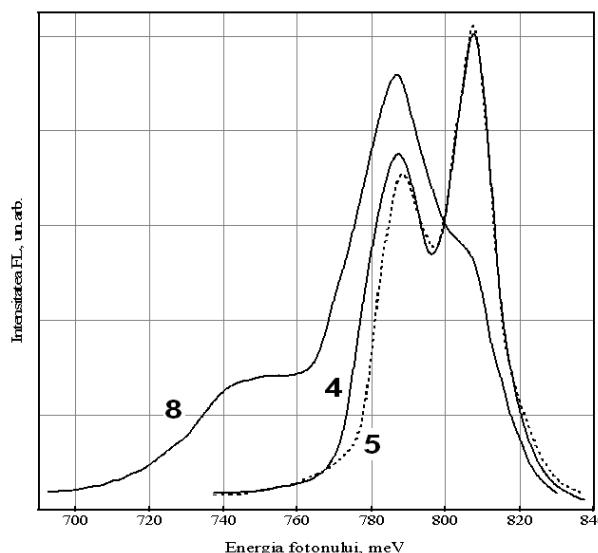


Figura 6. Modificarea spectrelor de iradiere ale antimonidului de galiu dopat cu Ni, Ni+Te
4 - T=2K; B=0 Concentrația nichelului 1%;
5 - T=2K; B=0 Concentrația nichelului 0,5%;
8 - T=77K; B=0 Concentrația nichelului 0,5%
 Concentrația telurului 10^{18}cm^{-3}

În regiunea 750meV este bine cunoscută banda de emisie prin intermediul defectelor proprii în rețeaua cristalină GaSb (vacantele Ga/Sb). După cum se vede din figurile 5 și 6 nichelul în concentrație de (0,1÷1,0)% atomare lichidează defectele proprii în cristal, conducând astfel la amplificarea intensității fotolu-minescenței benzii A. Energetic această bandă bine corelează cu lățimea benzii energetice interzise. Lățimea relativ mare (~15meV) a acestei benzi indică că aceasta este formată prin suprapunerea benzii de emisie excitonică cu emisia bandă-bandă. Dar la formarea conturului acestei benzi predomină anihilarea radiativă a excitonilor.

După cum s-a menționat mai sus, defectele proprii formează banda de emisie B atât la 77K cât și la 2K. Totodată atomii impuritari de nichel formează un nivel localizat, energia căruia puțin diferă de energia defectelor proprii, iar slaba dependență a intensității benzii B de concentrația atomilor de nichel în antimonidul de galiu este un indicator că nichelul analogic ca și fierul formează în antimonidul de galiu clusteri cu compoziția NiSb/NiGa localizați în regiunea macrodefectelor (de obicei, dislocativ).

Așa dar, putem admite că o concentrație mică de atomi de nichel lichidează defectele proprii în cristalele primare, conducând astfel la amplificarea emisie excitonice, iar partea majoritară din acestea sunt concentrați în regiunea dislocațiilor formând clusteri de tipul NiGa/NiSb.

Concluzii

Rezultatele experimentale discutate în această lucrare permit evidențierea următoarelor concluzii:

1. În premieră s-au studiat particularitățile proprietăților fizice ale antimonidului de galiu dopat cu nichel pentru un interval larg de concentrații;
2. Monocristalele de antimonid de galiu studiate în această lucrare s-au obținut prin metoda modificată a topirii zonale;
3. Analiza procesului tehnologic utilizat demonstrează, că nichelul în concentrații mai mari ca 0,1% atomare formează în matricea de bază niște incluziuni de o altă structură cu baza orientată de-a lungul deplasării zonei topite, numite clusteri. Densitatea clusterilor crește proporțional cu creșterea concentrației dopantului;
4. În raport de orientarea clusterilor față de câmpurile electric și magnetic exterioare, s-a înregistrat o anizotropie ~(20÷30)% a efectelor galvanomagnetice. Se propune un model de explicație a acestei asimetrii.
5. În premieră se demonstrează că doparea antimonidului de galiu cu nichel contribuie la deplasarea marginii benzii fundamentale de absorbție; s-a calculat concentrația dopantului;
6. S-a identificat structura complexă a spectrelor de iradiere ale antimonidului de galiu dopat cu nichel în diferite concentrații. Structurile identificate ne permit să conchidem, că în concentrații mici nichelul lichidează unele din defectele proprii ale cristalului, iar

în concentrații mari partea majoritară din acestea sunt concentrați în regiunea dislocațiilor formând clustere de tipul NiSb/NiGa;

7. Doparea concomitentă a antimonidului de galiu cu telur și nichel a permis evidențierea și modificarea proprietăților fizice sub influența interacțiunii donor-acceptor.

Bibliografie

1. Кусраев, Ю.// УФН, 2010, е 180, № 7, с 759 – 773.
2. Ивченко, Е.// УФН, 2012, е 182, № 8, с 869 – 876.
3. Георгицэ, Е., Иванов-Омский, В., Постолаки, И. Полумагнитные полупроводники $Hg_{1-x}Mn_xTe$, $Hg_{1-x-y}Cd_xMn_yTe$ как детекторные материалы: сравнение с $Hg_{1-x}Cd_xTe$ // Обзор, препринт, Кишинэу, 2005, 60страниц.
4. Омеляновский, Э., Пантюхов, А., Фистуль, В.// ФТП, 1975, т 9, с 1390.
5. Омеляновский Э. и др.// ФТП, 1975, т 9, с 576-578.
6. Андрианов, Д. и др.// ФТП, 1976, т 10, с 1173-1176.
7. Виноградова, К. и др.// ФТП, 1972, т 6, с 1845-1850.
8. Георгицэ, Е. и др.// Письма в ЖТФ, 1991, № 17, с 21.
9. Круковская Л. и др.// ФТП, 1978, т 12, с 689.
10. Mihălache, A. Particularitățile proprietăților optice ale antimonidului de galiu dopat cu fier// Teza de doctor, Chișinău, 2014.
11. Georgitse, E.; Gutzuleac, L.; Mikhelake, A.; Postolaci, I.; Yuldashev, S.; Kang, T. Photoluminescence Features of GaSb Doped by Fe// Columbia International Publishing. Journal of Luminescence and Applications. Vol. 1. No.1. pp. 1-6. 2014, IF 2,367, ISSN: 0022-2313
12. Сучкова, Н., Андрианов, Д., Омеляновский, Э., Дашевская, Е., Соловьев Н. Свойства арсенида галлия, легированного никелем// ФТП, 1975, т 9, с 718.
13. Gheorghitse E., Gutuleac L., Melinte V.// Актуальні проблеми фізики напівпровідників. Дрогобыч, Україна, 2013.
14. Ильменков, Г.// Кандидатская диссертация, Ленинград, 1972.
15. Миронов И.// Кандидатская диссертация, Кишинев, 1972.
16. Георгицэ, Е.// Докторская диссертация, Кишинев, 1991.
17. Ваксман Ю. и др.// ФТП, 2010, т 44, № 2, с 149.

PARTICULARITĂȚILE EFECTELOR GALVANOMAGNETICE ÎN CÂMPURI MAGNETICE PUTERNICE ÎN BICRISTALE DE TORSIUNE ALE IZOLATORULUI TOPOLOGIC 3D $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($0.07 \leq x \leq 0.2$)

Fiodor MUNTEAN¹, dr. hab., prof. univ.

Eugeniu GHEORGHITĂ², dr. hab., prof. univ.

Viorel MUNTEANU¹, doctorand

Victoria BEJAN², doctorand

Vitalie CHISTOL³, dr., conf. univ.

¹ Institutul de Inginerie Electronică și Nanotehnologii al AȘM, 2028 Chisinau, Moldova

² Universitatea de Stat din Tiraspol, 2069 Chișinău Moldova

³ Universitatea Tehnică a Moldovei, 2004 Chisinau, Moldova

Rezumat. Se prezintă rezultatele studiului efectelor galvanomagnetice în bicristale de torsionare ale aliajelor $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($0.07 < x < 0.15$) în câmpuri magnetice puternice (de până la 40T), direcționate în planul interfețelor cristaline. S-a depistat că în bicristalele cu unghi mic de torsionare tranzițiile semiconductor-semimetal sunt induse în cristalite și straturile componente ale interfeței la diferite valori ale câmpului magnetic, ceea ce indică o schimbare semnificativă a interacțiunii spin-orbită. Pe de altă parte, în bicristalele cu unghi mare de torsionare în aceleași regiuni ale câmpului magnetic asemenea tranziții nu se detectează, dar se manifestă în mod evident oscilații cuantice, care denotă densități mai înalte de stare în componentele interfețelor, precum și purtători de sarcină cu masa mult mai mare ca în cristalite. Datele obținute certifică diverse stări electronice în izolatorul topologic 3D, induse și controlate de unghiul de dezorientare a cristalitelor și de câmpul magnetic aplicat.

Abstract. We report an investigation of the galvanomagnetic effects of twisting bicrystals of $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($0.07 < x < 0.15$) in high (up to 40T) magnetic fields, directed along the crystallite interface plane (near the C_3 axes of crystallites). It has been found that in bicrystals with small crystallite disorientation angle, the semiconductor-semimetal transition is induced in crystallites and interface layers at different values of magnetic field. On the other hand, in the same region of magnetic fields a semiconductor – semimetal transitions in large disorientation angle interfaces are unlikely, but clearly manifest the quantum oscillations of galvanomagnetic effects, denoting the high density of state in layer components of CI and the heavier than in crystallites charge carriers.

I. INTRODUCERE

Aliajele semiconductoare cu bandă interzisă îngustă $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($0.07 < x < 0.15$), posedând o ordine a benzilor energetice în punctele L inversă relative celei a Bi , precum și o bandă interzisă (gap) indirectă între L - minimum electronic și T - maximum goluri, sunt niște izolatori tridimensionali topologici (3D TI), cu proprietăți semiconductoare în bulk, dar care manifestă stări de suprafață metalice protecționate.¹⁻⁴ La general, 3D TI este un material cu gap de excitație electronică în bulk, număr impar de inversări de bandă, stări de suprafață Dirac asimetrice,⁵ stări spin polarizate de interacțiunea spin-orbită, care conectează benzile de valență și de conducție bulk într-un mod topologic non-trivial.⁶ Având o structură de bandă excepțională în bulk și la suprafață,^{6,7} aliajele

$\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($0.07 < x < 0.15$) oferă o posibilitate unică de a studia efectul câmpului magnetic puternic asupra mișcării purtătorilor de sarcină, care conduce la: (i) schimbări drastice în dimensionalitatea sistemului electronic, (ii) la diverse tranziții electronice de fază.^{8,9}

Efectele galvanomagnetice sunt foarte atractive pentru evaluarea caracteristicilor purtătorilor de sarcină în cazul limitei ultracuantice (UQL) și pentru elucidarea specificului tranzițiilor electronice de fază induse de câmpul magnetic. UQL-ul sistemului electronic poate fi obținut la temperaturi joase și în câmpuri magnetice puternice și permite efectuarea unor studii ale sistemului electronic în condițiile când doar ultimul nivel Landau este populat. Bicristalele $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($0.07 < x < 0.15$), constituite din două cristalite monocristaline cu 3D TI proprietăți și o interfață cristalină (CI) supraconductoare de grosimi nano, conduc la oportunitatea unică de a investiga interacțiunea purtătorilor de sarcină în diferite sisteme solide, inclusiv quasi 2D supraconductor-TI interfață.¹⁰

În prezenta lucrare se raportează rezultatele măsurătorilor magnetoresistenței și efectului Hall în bicristale de torsiune ale 3D TI $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($0.07 < x < 0.15$) pentru a elucidă particularitățile sistemului electronic în câmpuri magnetice puternice, în special la limită ultracuantică. La aceste bicristale, stările cuantice topologic distincte pot fi racordate prin dopaj, schimb de unghi de dezorientare sau cu ajutorul câmpului magnetic aplicat.¹¹

II. PROCEDURI EXPERIMENTALE

Bicristalele de torsiune ale aliajelor $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($0.07 < x < 0.15$) au fost preparate prin metoda recristalizării zonare, utilizând germeul dublu. Eșantioanele pentru măsurători au fost fabricate în formă de bare rectangulare ($1 \times 2 \times 4 \text{ mm}^3$), fracțiunea de volum a CI coraportată la volumul total a bicristalului constituia $\sim 10^{-4}$. Compoziția eșantioanelor a fost controlată cu SEM echipat cu Oxford și PV 9800 energy-dispersive X-ray (EDX) analyzers, precum și prin metodele spectrometriei optice de emisie folosind Jobin-Yvon spectrometr JY-38-S. Au fost studiate două grupe de bicristale: cu unghi mic de dezorientare (SDA, $\theta_1 < 9^\circ$) și cu unghi mare de dezorientare (LDA, $\theta_1 > 12^\circ$) a cristalitelor. Definiția lui θ_1 este dată în insetul Figurei 1(a). Lățimea interfețelor cristaline de $\sim 100 \text{ nm}$ a fost estimată prin intermediul microscopiei electronice de scanare (SEM) și prin valoarea câmpului magnetic la care oscilațiile cuantice încep să se dezvolteze. Magnetorezistența și efectul Hall s-au studiat după tranziția arealului CI în stare normală (non-supraconductibilă), aplicând câmpul magnetic ori/și curentul electric. Măsurătorile au fost efectuate în câmpuri magnetice staționare (până la 18 T) și de impuls (până la 40 T), orientate în planul CI, în apropierea axelor C_3 ale cristalitelor.

Interfețele cristaline ale bicristalelor $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ manifestă simultan proprietăți feromagnetice și supraconductibile cu o temperatură critică onset ~ 36 K,^{12,13} în timp ce monocristalele masive nu sunt nici supraconductoare nici feromagnetice. Interfața cristalină este compusă, la rândul ei, dintr-un strat solitar cu ~ 60 nm grosime și două straturi similare adiacente de ~ 20 nm, amplasate din ambele părți ale stratului central.¹²

Investigațiile au fost efectuate în Laboratorul Internațional de Temperature Joase și Câmpuri Magnetice Puternice din Wrocław, Polonia.

III. REZULTATE ȘI DISCUȚII

Monocristalele aliajelor $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($0.07 < x < 0.15$) oferă o oportunitate unică de obținere a UQL în câmpuri magnetice mai mici de 40T. În această stare electronii (sau golurile) populează doar ultimile nivele Landau ($j=0$), care se pot deplasa în câmp magnetic (vezi Fig.1 (b)) în funcție de raportul dintre desplicarea după spin $\Delta\varepsilon_s$ și cea orbitală $\Delta\varepsilon_o$, valoarea deplasării

$$\Delta\varepsilon = 1/2 h\omega \left(1 - \frac{\Delta\varepsilon_s}{\Delta\varepsilon_o}\right).$$
 Și mai important este faptul, că în camp magnetic ultracuantic se pot realiza tranziții electronice de fază, inclusiv tranziții semiconductor-semimetal [8,9].

Fig.1 prezintă dependențele de câmp ale magnetorezistenței $\Delta\rho/\rho$ în monocristale și SDA bicristale de torsiune ale aliajelor $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($0.07 < x < 0.15$). În câmpuri magnetice staționare orientate în planul CI se observă (vezi Fig.1a, curba No 3) oscilații Shubnikov- de Haas ordinare doar până la 2 T. În câmpuri magnetice mai puternice de 2T purtătorii de sarcină se află deja în UQL și la $B \sim 8.5$ T (vezi maximumul în Fig. 1a) are loc tranziția semiconductor-semimetal concomitent în monocristale (curba No 1), dar și în SDA bicristale (curbele No 2, 3, și 4). Notăm, că la SDA bicristale, primul maximum la dependențele $\Delta\rho/\rho(B)$ se observă la aceeași valoare a câmpului magnetic ca și la monocristale, ceea ce denotă că tranziția semiconductor-semimetal se induce la cristalitele bicristalelor.

În câmpuri magnetice $B > 11$ T, se face observabil la bicristale un maximum adițional (al doilea). Acest maximum apare în câmpuri distincte după valoare pentru bicristalele cu diferite unghiuri de dezorientare θ_1 și θ_2 . Se poate afirma cu certitudine, că maximum secund reflectă tranziția semiconductor-semimetal în straturile adiacente ale CI din SDA bicristale. Tranziția apare la valori complet diferite ale câmpului magnetic, astfel că masele ciclotronice ale purtătorilor de sarcină relevanți și coraportul desplicărilor după spin și orbită ale nivelelor energetice $\Delta\varepsilon_s/\Delta\varepsilon_o$ în cristallite și în aria CI a SDA bicristalelor diferă considerabil. Aceasta implică o creștere semnificativă a interacțiunii spin-orbită și denotă existență unor stări electronice gaples la interfața bicristalelor.

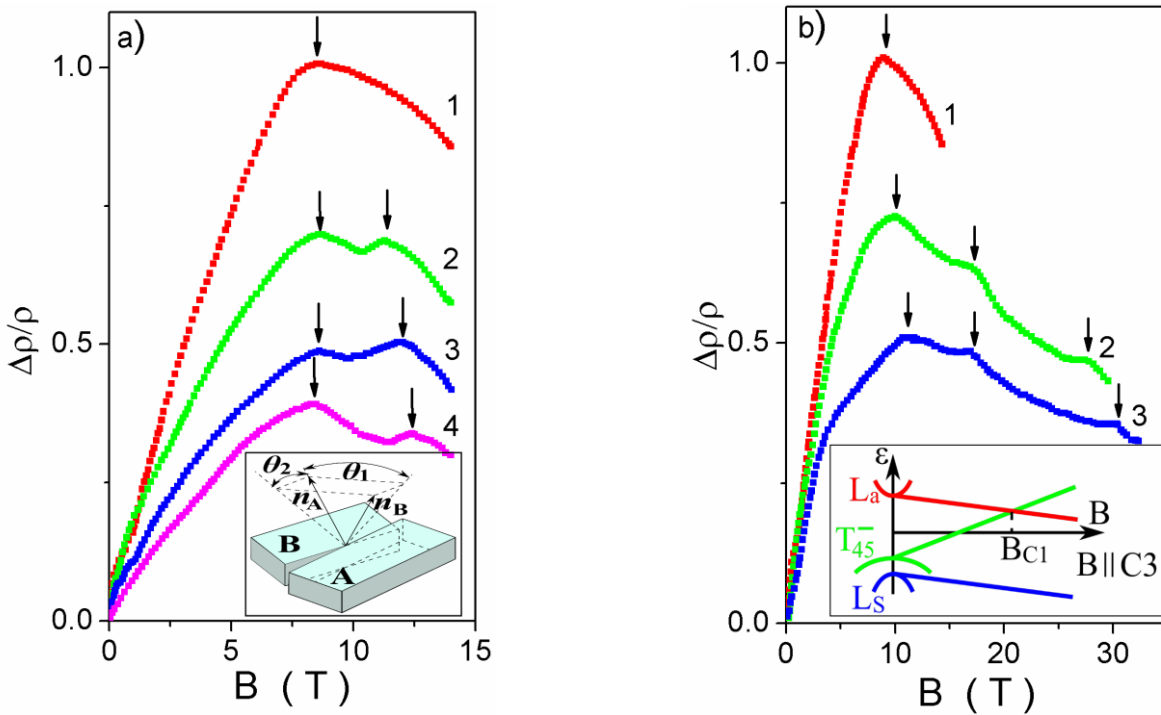


Fig.1. Magnetoresistența $\Delta\rho/\rho$ versus câmpul magnetic în monocristale și SDA bicristale de torsiune (vezi textul) ale 3D izolator topologic $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($x = 0.08$ și 0.09) la 4.2 K. (a) Rezultatele obținute în câmpuri magnetice staționare: (1) monocristale, $x = 0.08$; (2), (3), și (4) bicristale, $x = 0.08$. Caracteristicile unghiulare: (2) $\theta_1 = 4^\circ$, $\theta_2 = 2^\circ$; (3) $\theta_1 = 1^\circ$, $\theta_2 = 4^\circ$; (4) $\theta_1 = 9^\circ$, $\theta_2 = 2^\circ$. (b) Rezultatele obținute în câmpuri magnetice de impuls: (1) monocristale, $x = 0.08$; (2) și (3) bicristale: (2) $x = 0.08$, $\theta_1 = 4^\circ$, $\theta_2 = 2^\circ$; (3) $x = 0.09$, $\theta_1 = 12^\circ$, $\theta_2 = 2^\circ$. Săgețile indică valorile câmpului la care se produc tranzițiile semiconductor-semimetal: primele (la câmpuri mai slabe) pentru bicristale și monocristale și secundare și terțe doar pentru bicristale. Fig. 1a inset: Diagrama schematică a bicristalului cu IC de torsiune; θ_1 - unghiul de dezorientare a cristalitelor, θ_2 - unghiul de rotație în planul interfeței. Fig. 1b inset: Evoluția benzilor energetic în câmp magnetic UQL în bulk (cristalite) $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($0.07 < x < 0.15$). B_{C1} este valoarea câmpului magnetic critic a tranziției semiconductor-semimetal.

Rezultatele obținute în câmpuri magnetice de impuls sunt prezentate în Fig.1b. La câmpuri mai puternice de 25 T apare al treilea maximum, care poate fi atribuit tranziției semiconductor-semimetal în stratul central al CI. Curbele No (2) în Fig.1a și 1b sunt obținute pentru același bicristal. Maximumul secund în Fig.1b se manifestă în câmpuri mai puternice, probabil, din cauza efectelor de încălzire, conexe cu măsurătorile în câmp magnetic de impuls.

Particularități $\Delta\rho/\rho$ specifice tranziției semiconductor-semimetal nu au fost depistate la LDA ($\theta_1 > 12^\circ$) $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ bicristale. În schimb, la acestea apar niște armonice ale oscilațiilor cuantice $\rho_{ii}(B)$ și Hall-efect longitudinal $\rho_{ij}(B_i)$, similare celor observate la bicristale de Bi.¹⁴ Oscilații vizate sunt prezentate în Fig. 2 și, desigur, se atribuie specificului proprietăților suprafeței Fermi din arealul interfețelor.

Spectrele oscilațiilor LDA bicristalelor $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ au fost analizate grafic în baza poziției piscurilor oscilațiilor B_n versus indicelui nivelului n , unde B_n este câmpul la care nivelul Fermi trece printre două nivele Landau consecutive. Relația dintre B_n și n se descrie prin formula: $1/B_n = ne/(hN_s)$, unde: e este sarcina elementară, h constanta Planck, și N_s densitatea stărilor de suprafață. Dependențele B_n - n obținute pentru trei LDA bicristale sunt redată în insetul Fig. 2. Au fost depistate două frecvențe conexe cu suprafața Fermi a straturilor centrale și adiacente ale interfețelor. În insetul Fig. 2, acestea corespund: liniile (1) și (3) la bicristalul cu curbele oscilatorii (2), liniile (2) și (5) la bicristalul cu curbele oscilatorii (1), și în sfârșit linia (4) la bicristalul cu curbele oscilatorii (3). Rezultatele obținute denotă că stările electronice la CI sunt de tipul Schrödinger, dat fiind faptul că n preia valori întregi (pentru electronii Dirac, $n_D = n + 1/2$). La bicristalele $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ nu s-au înregistrat anomalii ale efectului Hall longitudinal (quasi-platouri, deplasamentul piscurilor oscilațiilor, etc.) altele decât cele reportate pentru bicristalele de Bi.¹⁵

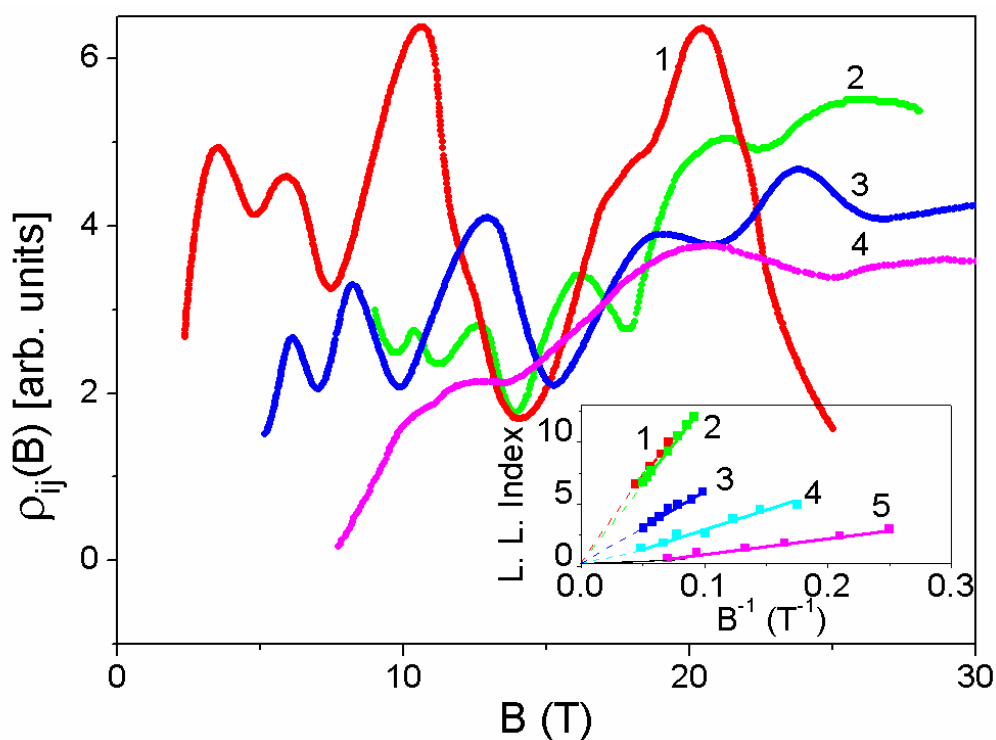


Fig.2. Oscilațiile cuantice $\rho_{ii}(B)$ și $\rho_{ij}(B_i)$ în LDA bicristale de torsiune ale aliajelor $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ($x = 0.08, 0.12, 0.15$) și $\text{Bi}_{0.93}\text{Sb}_{0.07}\text{Te}$ at 4.2 K: (1) $\rho_{ii}(B)$, $x = 0.08$, $\theta_1 = 15^\circ$, $\theta_2 = 3^\circ$; (2) $\rho_{ij}(B_i)$, $x = 0.12$, $\theta_1 = 12^\circ$, $\theta_2 = 2^\circ$; (3) $\rho_{ii}(B)$, $\text{Bi}_{0.93}\text{Sb}_{0.07}\text{Te}$, $\theta_1 = 19^\circ$, $\theta_2 = 2^\circ$; (4) $\rho_{ii}(B)$, $x = 0.15$, $\theta_1 = 15^\circ$, $\theta_2 = 3^\circ$. Inset: Indicele nivelului Landau n , versus poziției B_n^{-1} a piscurilor oscilațiilor: dependențele (2) și (5) au fost obținute pentru curbele oscilatorii (1), (1) și (3) pentru curbele (2) iar (4) pentru curbele oscilatorii (3).

S-a constatat, că masele ciclotronice ale purtătorilor de sarcină, evaluate din dependențele de temperatură ale amplitudinilor oscilațiilor, precum și ariile secțiunilor

transversal ale suprafeței Fermi a straturilor CI depășesc de câteva ori pe cele observate la cristalite.¹⁶ De exemplu, în câmp magnetic orientat de-a lungul planului interfeței la LDA Bi_{0,93}Sb_{0,07}Te bicristale, masele ciclotronice ale purtătorilor de sarcină m_c/m_e (unde m_e este masa electronului liber) în cristallite (bulk) și straturile centrale și adiacente ale CI sunt: 0.05, 0.25 și 0.5, respectiv. Oscilațiile cuantice în LDA bicristale Bi_{1-x}Sb_x posedă caracteristici spectrale similare cu cele ale Bi, deși acesta este un semimetal tipic, iar aliajele Bi_{1-x}Sb_x ($0.07 < x < 0.15$) sunt semiconductori cu banda interzisă îngustă. Densitatea stărilor straturilor N_s la CI ale LDA bicristale Bi_{1-x}Sb_x a fost estimată din oscilațiile cuntrice conform metodicii descrise în.¹⁷ Valorile N_s constituie $(0.2-0.3) 10^{19} \text{ m}^{-2}$ și $(1.5-2.5) 10^{19} \text{ m}^{-2}$, pentru straturile adiacente și stratul central, respectiv, ceea ce este cu câteva ordine mai înalt decât N_s obținut la pelicule subțiri a aliajelor Bi_{1-x}Sb_x.¹⁸

Toate aceste rezultatele indică faptul că straturile CI ale LDA bicristalelor 3D TI Bi_{1-x}Sb_x ($0.07 < x < 0.15$) sunt puternic degenerate, adică benzile relevante conțin stări care captează purtători de sarcină mult mai grei decât în cristallite.

IV. CONCLUZII

Au fost specificate caracteristicile cuantice ale bicristalelor de torsiune ale 3D izolator topologic Bi_{1-x}Sb_x ($0.07 < x < 0.15$). La SDA bicristale au fost depistate tranziții semiconductor-semimetal induse de câmp magnetic puternic mai întâi în cristallite (bulk) la ~8.5 T, iar apoi în câmpuri mai înalte și în straturile central și adjacent ale nanointerfețelor cristaline. La LDA bicristale, tranziții semiconductor-semimetal nu au fost observate. În schimb, la aceste bicristale au fost revelate oscilații cuantice ale efectelor galvanomagnetice în straturile CI, care caracterizază o densitate mai înaltă de stare și purtători de sarcină mai grei decât în bulk.¹⁹ Bicristalele investigate par a fi obiecte de studiu utile în cercetările exotice a fizicii moderne, precum ar fi: superfluidul topologic, sistemul supraconductibil fermionic cu puncte Dirac nodale, Majorana mode²⁰⁻²⁴ și spin Hall faze cuantice.⁶

BIBLIOGRAFIE

- (1) Fu, L.; Kane, C. L. *Phys. Rev. B* 2007, 76, 045302.
- (2) Bernevig, B. A.; Hughes, T.; Zhang, S. C. *Science* 2006, 314, 1757.
- (3) Moore, J. E. *Nature* 2010, 464, 194-198.
- (4) Fu, L.; Kane, C. L.; Mele, E. J. *Phys.Rev.Lett.* 2007, 98, 106803.
- (5) Teo, J. C. Y.; Fu, L.; Kane, C. L. *Phys. Rev. B* 2008, 78, 045426.
- (6) Hsieh, D.; Qian, D; Wray, L.; Xia, Y.; Hor, Y.; Cava, R. J.; Hasan, M. Z. *Nature (London)* 2008, 452, 970.
- (7) Brandt, N. B.; Ponomarev, Ya. G.; Chudinov, S. M. *J. Low Temp. Phys.* 1972, 8, 389.

- (8) Fenton, E. W. *Phys. Rev.* 1968, *170*, 816.
- (9) Brandt, N. B.; Chudinov, S. M. *J. Low Temp. Phys.* 1972, *8*, 339.
- (10) Qi, X. L.; Zhang, S. C. *Rev. Mod. Phys.* 2011, *83*, 1057-1110.
- (11) He, L. P.; Hong, X. C.; Dong, J. K.; Pan, J.; Zhang, Z.; Zhang, J.; Li, S. Y. *Phys. Rev. Lett.* 2014, *113*, 246402.
- (12) Muntyanu, F. M.; Gilewski, A.; Nenkov, K.; Zaleski, A.; Chistol, V. *Solid State Comm.* 2008, *147*, 183.
- (13) Muntyanu, F. M.; Gilewski, A.; Nenkov, K.; Rogacki, K.; Zaleski, A. J.; Fuks G.; Chistol, V. *Physics Lett. A* 2014, *378*, 1213.
- (14) Muntyanu, F. M.; Gilewski, A.; Nenkov, K.; Zaleski, A. J.; Palewski, T.; Chistol, V. *Solid State Comm.* 2013, *158*, 9.
- (15) Muntyanu, F. M.; Gilewski, A.; Nenkov, K.; Zaleski, A. J.; Chistol, V. *Phys. Rev. B* 2007, *76*, 014532.
- (16) Muntyanu, F. M.; Dubkovetskii, Yu. A.; Gilevski, A. *Sov. Phys. Solid State* 2004, *46*, 1822.
- (17) Hajdu, J.; Landwehr, G. *Strong and Ultrastrong Magnetic Fields and Their Applications* 1985, edited by F. Herlach (Springer-Verlag, Berlin).
- (18) Van Hulst, J. A.; Jaeger, H. M.; Radelaar, S. *Phys. Rev. B* 1995, *52*, 5953.
- (19) Diehl, S.; Micheli, A.; Kantian, A.; Kraus, B.; Büchler, H. P.; Zoller, P. *Nature Phys.* 2008, *4*, 878.
- (20) Zhu, Z.; Cheng, Y.; Schwingenschlögl, U. *Sci. Rep.* 2014, *4*, 4025.
- (21) Wilczek, F. *New J. Phys.* 2014, *16*, 082003.
- (22) Wilczek, F. *Nature* 2012, *486*, 195.
- (23) Sasaki, S.; Kriener, M.; Segawa, K.; Yada, K.; Tanaka, Y.; Sato, M.; Ando, Y. *Phys. Rev. Lett.* 2011, *107*, 217001.
- (24) Tian, M.; Wang, J.; Ning, W.; Mallouk, T. E.; Chan, M. H. W. *Nano Lett.* 2015, DOI: 10.1021/nl503398d.

ASUPRA COMPACITĂȚII UNOR OPERATORI INTEGRALI SINGULARI

Vasile NEAGU, dr. hab., prof. univ., USM

vasileneagu45@gmail.com

Abstract. The operators such as $aP - PaI$, $aQ - QaI$ and integral operators with weak singularities are studied in the work. It is proven that the operators $aP - PaI$ and $aQ - QaI$ are totally continuous (or compact) in spaces with weights in one and only one case, when the function $a(t)$ is continuous on the contour of integration. As a corollary, it is shown that the factor-algebra generated by singular operators with piecewise continuous coefficients is not commutative and the symbol on that algebra is a matrix-function.

Rezumat. În această lucrare sunt studiați operatorii de forma $aP - PaI$ și $aQ - QaI$ precum și operatorii integrali cu nuclee cu singularități slabe. Se demonstrează că operatorii $aP - PaI$ și $aQ - QaI$ sunt compacți în spații cu ponderi, dacă și numai dacă funcția $a(t)$ este continuă pe conturul de integrare. În consecință, algebra generată de operatorii integrali singulari cu coeficienți continui pe porțiuni nu este comutativă și simbolul lor reprezintă o matrice de funcții.

Fie Γ un contur compus format din n curbe închise $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ de tip Liapunov pe porțiuni, care au un singur punct comun t_0 . Notăm prin F_Γ^+ domeniul mărginit de conturul Γ . Vom presupune că domeniile $F_j^+ (= F_{\Gamma_j}^+)$ nu au puncte comune și la mișcarea punctului t_0 pe coturul Γ în sens pozitiv domeniul F_{j+1}^+ urmează după domeniul F_j^+ ($j = 1, 2, \dots, n-1$). Conturul Γ este orientat astfel încât parcurgând curba Γ_j , domeniul F_j^+ rămâne la stânga.

În figura 1 este reprezentat un astfel de contur Γ pentru $n = 4$.

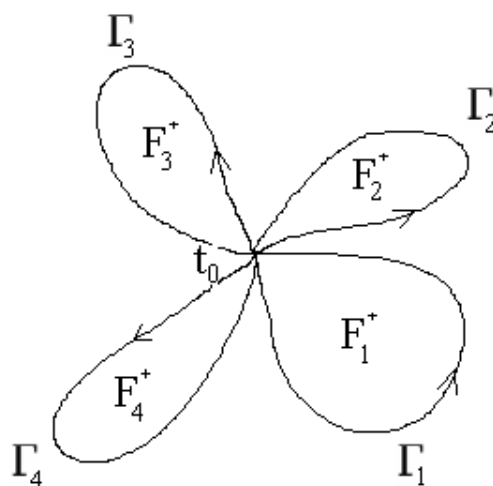


Fig. 1

Notăm prin $CP(\Gamma)$ mulțimea tuturor funcțiilor $a(t)$ continue în orice punct $t \in \Gamma$, cu excepția punctului t_0 , în care există limitele finite $a_j(t_0 + 0)$ și $a_j(t_0 - 0)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) atunci când t tinde către t_0 pe curba Γ_j dinspre și, respectiv, spre punctul t_0 . Prin $CP_+(\Gamma)$

notăm mulțimea funcțiilor $f(t)$ din $CP(\Gamma)$, pentru care $f_j(t_0 + 0) = f_j(t_0 - 0)$ ($j = 1, 2, \dots, n$), iar prin $CP_-(\Gamma)$ mulțimea funcțiilor $f(t)$ din $CP(\Gamma)$, pentru care $f_j(t_0 + 0) = f_{j+1}(t_0 - 0)$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) și $f_n(t_0 + 0) = f_1(t_0 - 0)$. Intersecția $C_+P(\Gamma) \cap C_-P(\Gamma)$ coincide cu mulțimea $C(\Gamma)$ de funcții continue pe Γ .

Fie

$$\rho(t) = \prod_{k=0}^n |t - t_k|^{\beta_k},$$

unde $t_0, t_1, t_2, \dots, t_m$ sunt puncte diferite pe Γ și β_k sunt numere reale, care verifică condițiile $-1 < \beta_k < p-1$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$. În monografia [1] s-a arătat că operatorii $aP - PaI$ și $aQ - QaI$ sunt compacți în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$ pentru orice funcție continuă pe Γ . Amintim că operatorii (proectorii) P și Q integrali singulari F.Riesz sunt definiți de egalitățile

$$P = \frac{1}{2}(I + S), \quad Q = \frac{1}{2}(I - S), \quad (1)$$

unde S este operatorul integral cu nucleul Cauchy,

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \Gamma. \quad (2)$$

În studiul ecuațiilor integrale singulare cu nucleu Cauchy, în special la determinarea regularizatorilor acestor ecuații, deseori apare necesitatea de a considera operatori de forma

$$(T_a\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a(\tau) - a(t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau \quad (t \in \Gamma), \quad (3)$$

unde $a(t)$ este o funcție cunoscută definită pe Γ . În acest context este important de cunoscut în ce condiții operatorul T_a este compact în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$.

Teorema 1. Fie Γ un contur compus și $a \in CP(\Gamma)$. Operatorul $T_a = aS - SaI$ este compact în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$, dacă și numai dacă $a \in C(\Gamma)$.

Demonstrație. Suficiența. Dacă funcția a este un polinom sau o funcție rațională, atunci teorema este evidentă. În acest caz operatorul T_a este de rang finit.

Fie a orice funcție continuă pe Γ . Atunci există un șir $\{a_n(t)\}$ de polinoame (dacă Γ este deschis) sau de funcții raționale (dacă Γ este închis) cu polurile în afara conturului Γ , care converge uniform către funcția a : $\max_{t \in \Gamma} |a_n(t) - a(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Așa cum

$$\|T_a - T_{a_n}\|_{L_p(\Gamma, \rho)} \leq 2 \max_{t \in \Gamma} |a(t) - a_n(t)| \|S\|_{L_p(\Gamma, \rho)},$$

rezultă că operatorul T_a este compact în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$.

Demonstrația necesității teoremei se va baza pe următoarele două exemple. Anume, vom arăta mai întâi că operatorul $T_h = hS - ShI$ nu este compact în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$ pentru funcțiile $h \in CP_+(\Gamma)$ și $h \in CP_-(\Gamma)$.

Exemplul 1. Fie conturul Γ reprezentat în figura 2

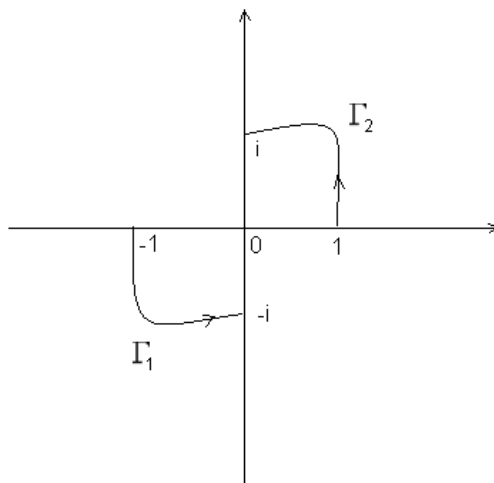


Fig. 2

În calitate de funcție $h(t)$ considerăm funcția caracteristică a curbei Γ_2 :

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t \in \Gamma_1, \\ 1, & \text{dacă } t \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (4)$$

Evident funcția $h(t)$ aparține mulțimii $CP_+(\Gamma)$. Admitem că operatorul $T_h = hS - ShI$ este compact. Fie $\chi(t)$ funcția caracteristică a segmentului $[-1, 0]$ și $A = \chi(t)T_h$. Vom demonstra că operatorul A nu este compact. Astfel, vom obține o contradicție.

În spațiul $L_2(\Gamma)$ considerăm șirul normat de funcții, definite de egalitatea

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{dacă } t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{dacă } t \in \Gamma \setminus \left[0, \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Vom demonstra că din șirul $\psi_n(t) = A\varphi_n$ nu se poate extrage un subșir convergent.

Pentru aceasta evaluăm normele $\|\psi_n\|$ în spațiul $L_p(\Gamma)$ ($1 < p < 2$). Avem

$$\begin{aligned} \|\psi_n\|_{L_p}^p &= \int_{\Gamma} |(A\varphi_n)(t)|^p |dt| = \int_{-1}^0 \left| \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(\tau)}{\tau - t} \varphi_n(\tau) d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(t)}{\tau - t} \varphi_n(\tau) d\tau \right|^p |dt| \leq \\ &\leq \frac{2^p}{\pi^p} \left(\int_{-1}^0 \left| \int_{\Gamma} \frac{h(\tau)}{\tau - t} \varphi_n(\tau) d\tau \right|^p |dt| + \int_{-1}^0 \left| \int_{\Gamma} \frac{h(t)}{\tau - t} \varphi_n(\tau) d\tau \right|^p |dt| \right) = \frac{2^p}{\pi^p} \int_{-1}^0 \left| \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{n}}{\tau - t} d\tau \right|^p |dt| \leq \\ &\leq n^{\frac{p-2}{2}} \int_{-\infty}^0 \left| \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| \right|^p dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Așadar, pentru $1 < p < 2$ șirul de norme $\{\|\psi_n\|\}$ tinde la zero în spațiul $L_p(\Gamma)$. De aici rezultă, că dacă în spațiul $L_2(\Gamma)$ șirul $\psi_n(t) = A\varphi_n$ ar conține un subșir convergent $\psi_{n_k}(t)$, atunci el ar converge la zero: $\psi_{n_k}(t) \rightarrow 0$. Aceasta însă este cu neputință, deoarece

$$\begin{aligned} \|\psi_n\|_{L_2}^2 &= \int_{-1}^0 \left| \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(\tau)}{\tau-t} \varphi_n(\tau) d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(t)}{\tau-t} \varphi_n(\tau) d\tau \right|^2 |dt| = \int_{-1}^0 \left| \frac{1}{\pi i} \int_0^{1/n} \frac{h(t)}{\tau-t} \sqrt{n} d\tau \right|^2 |dt| = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^0 \left| \ln \left| \frac{1-t}{t} \right| \right|^2 dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Exemplul 2. Fie Γ același contur de la exemplul 1. Prin $h(t)$ notăm o funcție continuă în orice punct $t \in \Gamma \setminus \{0\}$, care mai verifică următoarele condiții: $h(t)=0$ pentru $t \in [i,0] \subset \Gamma_2$, $h(t)=1$ pentru $t \in [0,1] \subset \Gamma$, există $h_1(0+0)=0$ și $h_1(0-0)=1$.

Așa cum $h_1(0-0)=h_2(0+0)=1$ și $h_1(0+0)=h_2(0-0)=0$, rezultă că $h \in CP_-(\Gamma)$.

În spațiul $L_p(\Gamma)$ considerăm mulțimea funcțiilor $\{\varphi_n(t)\}$ definite în felul următor:

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t \in \Gamma \setminus [0, 1/n] \\ n^{1/p}, & \text{pentru } t \in [0, 1/n] \end{cases}.$$

Este evident că $\|\varphi_n\|_{L_p} = 1$. Fie $\chi(t)$ funcția caracteristică a segmentului $[i,0] \subset \Gamma_2$ și $A = \chi(t)T_a$. Vom demonstra că operatorul A nu este compact în $L_p(\Gamma)$. Pentru aceasta ne vom folosi de criteriul lui F.Riesz de compacitate în spațiul L_p . Avem

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) &= (A\varphi_n)(t) = \frac{\chi(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(\tau)-h(t)}{\tau-t} \varphi_n(\tau) d\tau = \frac{\chi(t)}{\pi i} n^{1/p} \left(\int_0^{1/n} \frac{h(\tau)}{\tau-t} d\tau - h(t) \int_0^{1/n} \frac{d\tau}{\tau-t} \right) = \\ &= \frac{\chi(t)}{\pi i} n^{1/p} \int_0^{1/n} \frac{1}{\tau-t} d\tau = \frac{n^{1/p}}{\pi i} \chi(t) \ln \frac{1-nt}{nt}. \end{aligned}$$

Pentru orice $\sigma > 0$ ($0 < \sigma < 1$) obținem,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |\Phi_n(t+i\sigma) - \Phi_n(t)|^p |dt| &= \int_{[i,0]} |\Phi_n(t+i\sigma) - \Phi_n(t)|^p |dt| = \\ &= \int_0^1 |\Phi_n(it+i\sigma) - \Phi_n(it)|^p dt \geq \int_{1-\sigma/2}^1 |\Phi_n(it+i\sigma) - \Phi_n(it)|^p dt = \\ &= \int_{1-\sigma/2}^1 |\Phi_n(it)|^p dt \geq \frac{n}{\pi} \int_{1-\sigma/2}^1 \left| \ln \frac{1+t^2}{t} \right|^p dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Așa cum $\frac{1+t^2}{t} \geq 2$ pentru $t \in \left[1 - \frac{\sigma}{2}, 1\right]$, atunci $\ln \frac{1+t^2}{t} \geq \ln 2$ și din inegalitatea (7)

rezultă

$$\int_{\Gamma} |\Phi_n(t+i\sigma) - \Phi_n(t)|^p dt \geq \frac{n\sigma}{2\pi} \ln 2. \quad (8)$$

În inegalitatea (8) punem $\sigma = \frac{2\pi}{n}$, $n > 4$, și ea devine

$$\int_{\Gamma} |\Phi_n(t+i\sigma) - \Phi_n(t)|^p dt \geq \ln 2. \quad (9)$$

Așadar, în baza criteriului M.Riess despre compacitatea mulțimilor de funcții în L_p , rezultă că mulțimea de funcții $\{\Phi_n(t)\}$ nu este compactă în $L_p(\Gamma)$, ceea ce înseamnă că operatorul $T_a = aS - SaI$ nu este compact în $L_p(\Gamma)$.

Folosind aceste exemple, vom demonstra necesitatea teoremei 1. Fie $a \in CP(\Gamma)$ și admitem că operatorul T_a este compact în $L_p(\Gamma)$. Fără a diminua generalitatea vom presupune că conturul Γ este cel de la exemplul 1 și $a_1(0+0) \neq a_1(0-0)$. Fie $\omega = a_1(0+0) - a_1(0-0)$ și considerăm funcția

$$b(t) = \begin{cases} a(t) - \omega h(t), & \text{pentru } t \in \Gamma_1 \setminus \{0\}, \\ a_1(t_0 + 0), & \text{pentru } t \in \Gamma_2, \end{cases}$$

unde h este funcția definită de la exemplul 2. Avem

$$b_2(0+0) = b_2(0-0) = a_1(0+0), \quad b_1(0+0) = a_1(0+0) - \omega h_1(0+0) = a_1(0+0) \quad \text{și} \\ b_1(0-0) = a_1(0-0) - \omega h_1(0-0) = a_1(0-0).$$

Așadar, funcția $b(t)$ este continuă pe Γ și, în virtutea celor deja demonstrate, operatorul T_b este compact în $L_p(\Gamma)$. Din egalitatea $\chi_1 T_b \chi_1 = \chi_1 T_a \chi_1 - \omega \chi_1 T_h \chi_1$, unde χ_1 este funcția caracteristică a curbei Γ_1 , și din faptul că operatorul T_a este compact, rezultă că operatorul $\chi_1 T_h \chi_1$ este compact în $L_p(\Gamma_1)$. Atunci operatorul $H_\lambda = \chi_1 T_h \chi_1 - \lambda I$ este noetherien în $L_p(\Gamma_1)$ pentru orice $\lambda \neq 0$, adică simbolul lui, $H_\lambda(t, \mu)$, trebuie să fie nedegenerat pentru orice $\lambda \neq 0, \mu \in [0, 1]$ și orice $t \in \Gamma_1$. Scriem simbolul acestui operator (a se vedea [1, 2]) în punctul t_0 .

$$H_\lambda(t_0, \mu) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2\xi(\mu) \\ -2\xi(\mu) & -\lambda \end{vmatrix},$$

$$\text{unde } \xi(\mu) = \sqrt{f(\mu)(1-f(\mu))} \quad \text{și} \quad f(\mu) = \begin{cases} \frac{\sin \theta \mu}{\sin \theta} e^{i\theta(\mu-1)}, & \text{pentru } p \neq 2 \\ \mu, & \text{pentru } p = 2 \end{cases}.$$

Observăm că

$$\det H_\lambda(t_0, \mu) = \lambda^2 - 4f(\mu)(1-f(\mu))$$

și $\det H_\lambda(t_0, \mu) = 0$ pentru $\lambda = 2\sqrt{f(\mu)(1-f(\mu))}$. Contrazicerea obținută demonstrează că operatorul T_a nu este compact în $L_p(\Gamma)$. Teorema este demonstrată.

Afirmațiile teoremei 1 rămân adevărate și în spațiul L_p cu ponderea $\rho(t)$. Demonstrația se face în mod similar.

Astfel, dacă funcția $a(t)$ aparține mulțimilor $CP(\Gamma)$, $CP_+(\Gamma)$ sau mulțimii $CP_-(\Gamma)$, atunci operatorii $PaI - aP$ și $QaI - aQ$ nu sînt compacți în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$. În cazul funcțiilor $a \in CP_{\pm}(\Gamma)$ au loc următoarele două teoreme.

Teorema 2. Fie $a \in CP_+(\Gamma)$, atunci operatorul $PaP - aP$ este compact în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$.

Demonstrație. Funcția $a(t)$ poate fi reprezentată sub forma $a(t) = b(t)g(t)$, unde $b(t) \in C(\Gamma)$, iar funcția $g(t)$ este constantă pe fiecare curbă Γ_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Vom arăta că $PgP = g$. Fie $\varphi(t)$ orice funcție care verifică condițiile lui Holder pe fiecare curbă Γ_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Atunci funcția $\psi(t) = (P\varphi)(t)$ verifică condițiile lui Holder pe orice arc al conturului Γ , care nu conține punctul t_0 , ea admite o prelungire analitică în fiecare domeniu F_k^+ ($k = 1, 2, \dots, n$), iar în vecinătatea punctului t_0 are o singularitate integrabilă. Aceleași proprietăți le are și funcția $g(t)\psi(t)$. Folosind aceste proprietăți ale funcției $g(t)\psi(t)$, ușor se demonstrează că pentru orice punct $t \in \Gamma$, diferit de t_0 , are loc egalitatea

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau = g(t)\psi(t).$$

Din această egalitate rezultă că $gP\varphi = PgP\varphi$ și, prin urmare, $PgP = gP$. Așa cum $b(t)$ este continua pe Γ , atunci, în baza teoremei 1, operatorul $bP - PbI$ este compact. De aici și din egalitatea $PgP = gP$ rezultă că operatorul $PaP - aP$ este compact. Teorema este demonstrată.

Teorema 3. Fie $a \in CP_-(\Gamma)$, atunci operatorul $QaQ - aQ$ este compact în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$.

Demonstrație. În fiecare domeniu F_k^+ ($k = 1, 2, \dots, n$) considerăm câte un punct z_k și formăm funcțiile $f_j(t)$, definite prin egalitățile

$$f_j(t) = \alpha_j \left(\frac{t - z_j}{t - z_{j+1}} \right)^{\delta_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n; z_{n+1} = z_1).$$

Fiecare funcție $f_j(t)$ este analitică în planul complex extins cu tăietura, care unește punctele z_j și z_{j+1} și această tăietură se află în $F_j^+ \cup F_{j+1}^+ \cup \{t_0\}$. Fără a diminua generalitatea putem considera că valorile limită a funcției $a(t)$ în punctul t_0 sînt diferite de zero. Numerele α_j și δ_j le alegem așa, încît valorile limită ale funcției $f_j(t)$, atunci când t tinde către t_0 pe curba Γ_j dinspre și spre punctul t_0 să fie egale respectiv cu a_{2j-1} și 1. Notăm prin $f(t)$ produsul funcțiilor $f_j(t)$: $f(t) = f_1(t)f_2(t)\dots f_n(t)$. Funcția $f(t)$ este analitică în domeniul $\bar{\mathcal{C}} \setminus (F_1^+ \cup F_2^+ \cup \dots \cup F_n^+ \cup \Gamma)$. Nemijlocit se arată că $QfQ = fQ$. În baza alegerii funcției $f(t)$, produsul

$g(t) = a(t)f^{-1}(t)$ este o funcție continuă pe Γ . Așa cum operatorul $QgI - gQ$ este compact și are loc egalitatea $QfQ = fQ$, obținem că operatorul $QaQ - aQ$ este compact și teorema este demonstrată.

Fie $k(\tau, t)$ o funcție măsurabilă pe $\Gamma \times \Gamma$ cu singularitate slabă, adică ea admite o evaluare de forma

$$|k(\tau, t)| \leq c|\tau - t|^{-\mu}, \quad c = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1.$$

În aceste condiții, așa cum se cunoaște, operatorul integral, definit de relația

$$(T\varphi)(t) = \int_{\Gamma} k(\tau, t)\varphi(\tau) d\tau, \quad (10)$$

este compact în spațiul $L_p(\Gamma)$. Vom demonstra că o afirmație similară are loc și în spațiul

$L_p(\Gamma, \rho)$, unde $\rho(t) = \prod_{k=0}^n |t - t_k|^{\beta_k}$. Are loc următoarea teoremă.

Teorema 4. Fie numerele $p, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ verifică condițiile:

$$1 < p < +\infty, \quad -1 < \beta_k < p-1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m,$$

atunci operatorul integral (10) este compact în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$.

Demonstrație. Se verifică ușor (a se vedea [1]) că operatorul T este compact în $L_p(\Gamma, \rho)$ dacă și numai dacă operatorul $K = h^{-1}ThI$, unde

$$h(t) = \prod_{k=0}^n |t - t_k|^{\alpha_k}, \quad \alpha_k = \beta_k / p,$$

este compact în spațiul $L_p(\Gamma)$. Fie

$$k_n(\tau, t) = \begin{cases} k(\tau, t), & \text{pentru } |\tau - t| \geq 1/n, \\ 0, & \text{pentru } |\tau - t| < 1/n. \end{cases}$$

Notăm prin A, A_n și K_n următorii operatori integrali

$$(A\varphi)(t) = \int_{\Gamma} (h^{-1}(t)k(\tau, t)h(\tau) - k(\tau, t))\varphi(\tau) d\tau,$$

$$(A_n\varphi)(t) = \int_{\Gamma} (h^{-1}(t)k_n(\tau, t)h(\tau) - k_n(\tau, t))\varphi(\tau) d\tau,$$

$$(K_n\varphi)(t) = \int_{\Gamma} (h^{-1}(t)k_n(\tau, t)h(\tau))\varphi(\tau) d\tau.$$

Așa cum $h \in L_q(\Gamma), h^{-1} \in L_p(\Gamma)$ ($p^{-1} + q^{-1} = 1$) și funcția $k_n(\tau, t)$ este mărginită, atunci

$$\int_{\Gamma} dt \left(\int_{\Gamma} |h^{-1}(t)k_n(\tau, t)h(\tau)|^q |d\tau| \right)^{p-1} < +\infty,$$

și prin urmare operatorul K_n este compact în $L_p(\Gamma)$. De aici rezultă continuitatea completă a operatorului A_n în $L_p(\Gamma)$. Vom demonstra că $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\| = 0$. Fie $M_n = A - A_n$ și $m_n(\tau, t)$ nucleul operatorului M_n . Din teorema lui B.Hvedelidze (a se vedea [3]), despre

continuitate operatorului integral singular cu nucleul Cauchy în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$, rezultă continuitatea operatorului

$$(B\varphi)(t) = \int_{\Gamma} \left| \frac{h^{-1}(\tau)h(t)}{\tau-t} - \frac{1}{\tau-t} \right| |\varphi(\tau)| |d\tau|.$$

Notăm prin $b(\tau, t)$ nucleul acestui operator. Așa cum $|m_n(\tau, t) \leq cn^{\mu-1}b(\tau, t)|$, rezultă

$$\|M_n\| \leq cn^{\mu-1}\|B\| \text{ și } \|M_n\| \rightarrow 0 \text{ pentru } n \rightarrow \infty.$$

Așadar, am demonstrat că operatorul A este compact în spațiul $L_p(\Gamma)$. Prin urmare, și operatorul K este compact în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$. Teorema este demonstrată.

Teorema 5. Fie Γ un contur simplu și închis de tip Liapunov, iar $t = \beta(z)$ o funcție care transformă în mod conform discul unitate în domeniul D^+ mărginit de conturul Γ , atunci funcția

$$k(\xi, z) = \frac{\beta'(z)}{\beta(z) - \beta(\xi)} - \frac{1}{\xi - z} \quad (|\xi| = 1, |z| \leq 1)$$

are singularitate slabă pe conturul $\Gamma_0 = \{\xi \mid |\xi| = 1\}$.

Demonstrație. Fie $z, \xi \in \Gamma_0$; $z = e^{i\theta_1}$, $\xi = e^{i\theta_0}$ și, de exemplu, $\theta_0 < \theta_1$. Putem considera că $\theta_1 - \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$. Fie $u = e^{i\theta}$ ($\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$) și $r = |u - \xi|$, atunci $|du| = d\theta = (\cos \theta / 2)^{-1} dr \leq \sqrt{2} dr$.

Așa cum conturul Γ este de tip Liapunov, derivata $\beta'(z)$ verifică condițiile lui Holder cu un exponent α ($0 < \alpha < 1$), adică

$$|\beta'(u) - \beta'(\xi)| \leq c|u - \xi|^\alpha = cr^\alpha, c = const.$$

Prin urmare,

$$|\beta(z) - \beta(\xi) - \beta'(\xi)(z - \xi)| = \left| \int_{\gamma} (\beta'(u) - \beta'(\xi)) du \right| \leq c \int_0^{|z-\xi|} r^\alpha \sqrt{2} dr = c_1 |z - \xi|^{\alpha+1}, \quad (11)$$

unde γ este arcul de cerc, ce unește punctele z și ξ . O evaluare similară de forma (11) se obține și pentru punctele z , $|z| < 1$, dacă punem $u = \lambda z + (1 - \lambda)\xi$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) și în calitate de γ se ia segmentul de dreaptă, care unește punctele z și ξ . Deoarece transformarea β este conformă, atunci este îndeplinită condiția $\beta'(\xi) \neq 0$ ($\xi \in \Gamma_0$) și în consecință

$$\left| \frac{\beta(\xi) - \beta(z)}{\xi - z} \right| \geq c_2 > 0. \quad (12)$$

Din inegalitățile (11) și (12) obținem

$$|k(\xi, z)| = \left| \frac{\beta'(z)}{\beta(z) - \beta(\xi)} - \frac{1}{\xi - z} \right| = \frac{|\beta'(z)(\xi - z) - \beta(z) - \beta(\xi)|}{|(\beta(z) - \beta(\xi))(\xi - z)|} \leq \frac{c_1 |\xi - z|^{\alpha+1}}{c_2 |\xi - z|^2} = c_3 |\xi - z|^{\alpha-1}. \quad (13)$$

Teorema este demonstrată.

Fie Γ_1 și Γ_2 două curbe închise sau deschise fără puncte de autointersecție și $\beta: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2, z = \beta(t)$, o funcție bijectivă. Notăm prin S_1 și S_2 operatorii integrali singulari Cauchy pe aceste curbe:

$$(S_1\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, t \in \Gamma_1, \quad (S_2\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, t \in \Gamma_2,$$

care acționează în spațiile $L_p(\Gamma_1, \rho_1)$ și, respectiv în $L_p(\Gamma_2, \rho_2)$, unde

$$\rho_1(t) = \prod_{k=0}^n |t - t_k|^{\beta_k} \quad \text{și} \quad \rho_2(z) = \prod_{k=0}^n |z - z_k|^{\beta_k}, \quad z_k = \beta(t_k),$$

iar prin B notăm operatorul liniar, inversabil și mărginit din $L_p(\Gamma_1, \rho_1)$ în $L_p(\Gamma_2, \rho_2)$, definit de relația $(B\varphi)(z) = \varphi(\beta^{-1}(z))$.

Teorema 6. Fie funcția $\alpha, \alpha = \beta^{-1}$, posedă derivată α' diferită de zero și verifică condițiile lui Holder pe Γ_2 :

$$|\alpha'(z_1) - \alpha'(z_2)| \leq c |z_1 - z_2|^\mu, c = \text{const}, 0 < \mu < 1,$$

atunci operatorul S_2 poate fi exprimat sub forma

$$S_2 = BS_1B^{-1} + T,$$

unde T este un operator compact în $L_p(\Gamma_2, \rho_2)$, iar $(B\psi)(z) = \psi(\beta(z))$.

Demonstrație. Fie r o funcție rațională pe Γ_2 , $\varphi = B^{-1}r$ și $T = S_2 - BS_1B^{-1}$, atunci

$$(Tr)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{r(\xi)d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - \alpha(z)}.$$

În ultima integrală este justificat schimbul de variabilă $\tau = \alpha(z)$ (a se vedea [4]) și în rezultat se obține

$$(Tr)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_2} \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{\alpha'(\xi)}{\alpha(\xi) - \alpha(z)} \right) r(\xi)d\xi.$$

Din teorema 5 rezultă că nucleul acestui operator are singularitate slabă pe Γ_2 și, în baza teoremei 2, este compact. Teorema este demonstrată.

Referințe:

1. Gohberg, I., Krupnik N. *Introduction to the theory of one-dimensional singular integral operators*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992, 426p.
2. Neagu V. *Operatori noetherieni cu aplicații*, Chișinău, UST, 2015, 200p.
3. Хведелидзе Б.В. *Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной*. Москва: Наука, 1975, 262с.
4. Мухелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения*. Москва: Наука, 1968, 511с.

**LOTKA-VOLTERRA CUBIC DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH (1:-2)-
SINGULARITY AND INVARIANT AFFINE STRAIGHT LINES OF TWO
DIRECTIONS OF TOTAL ALGEBRAIC
MULTIPLICITY SIX**

Silvia TURUTA, doctorand

Abstract. The Lotka-Volterra cubic differential systems with (1:-2)-singularity possessing invariant straight lines of two direction and total multiplicity six are classified. There are obtained fifteen distinct classes modulo the affine transformations and time rescaling. The Darboux first integrals are constructed.

Keywords: differential cubic system, invariant straight line, Darboux integral.

1. Introduction

We consider the real polynomial system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad GCD(P, Q) = 1 \quad (1.1)$$

and the vector field $X = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ associated to system (1.1). Here

$GCD(P, Q) \in \mathbb{R}[x; y]$ is the greatest common divisor of the polynomials P and Q .

Denote $n = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$. If $n = 2$ ($n = 3$), then the system (1.1) is called quadratic (cubic).

A curve $f(x, y) = 0$, $f \in C[x, y]$ (a function $f = \exp(g/h)$; $g, h \in C[x, y]$) is said to be an invariant algebraic curve (an invariant exponential function) of (1.1) if there exists a polynomial $K_f(x, y) \in C[x, y]$, $\deg(K_f) \leq n - 1$, such that the identity

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot P(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot Q(x, y) \equiv f(x, y) \cdot K_f(x, y)$$

holds. If (1.1) has an invariant curve f of degree one, i.e. $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, then the curve f is called the invariant straight line of the system (1.1).

Definition 1. An invariant algebraic curve $f = 0$ of degree d of system (1.1) is called of algebraic multiplicity m , if m is the greatest positive integer such that the f^m divide $E_d(X)$, where

$$E_d(X) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_l \\ X(v_1) & X(v_2) & \dots & X(v_l) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X^{l-1}(v_1) & X^{l-1}(v_2) & \dots & X^{l-1}(v_l) \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

and the system v_1, v_2, \dots, v_l is a basis of $C_d[x, y]$ (see [1]).

In the case of the invariant straight lines ($d = 1$) we can take $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = y$ and the polynomial $E_1(X)$ has the form:

$$E_1(X) = P \cdot X(Q) - Q \cdot X(P).$$

Definition 2. Let D be a domain in R^2 and $F \in C^1(D, R)$ ($\mu \in C^1(D, R)$).

A function $F(x, y)$ ($\mu(x, y)$) is called a first integral (an integrating factor) of the system (1.1) if the following identity

$$P(x, y) \frac{\partial F}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial F}{\partial y} \equiv 0$$

$$\left(P(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} \equiv - \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \mu(x, y) \right)$$

holds in D .

Let the system (1.1) have algebraic invariant curves $f_j(x, y) = 0, j = 1, \dots, s$, i.e. there exist the polynomials $K_j(x, y), j = 1, \dots, s$, such that the following identities hold:

$$\frac{\partial f_j(x, y)}{\partial x} \cdot P(x, y) + \frac{\partial f_j(x, y)}{\partial y} \cdot Q(x, y) \equiv f_j(x, y) \cdot K_j(x, y).$$

When system (1.1) has a first integral (an integrating factor) of the form

$$F(x, y) = \prod_{j=1}^s f_j^{a_j}(x, y) \left(\mu(x, y) = \prod_{j=1}^s f_j^{a_j}(x, y) \right),$$

then we say that the system is Darboux integrable. Darboux proved that if the system (1.1) has at least $s \geq n(n+1)/2$ distinct algebraic invariant curves, then this system is Darboux integrable [6].

These last years, a great number of works are dedicated to the investigation of the problem of integrability for polynomial differential systems and, in particular, of Lotka-Volterra systems, with resonant singular points (see [1], [3], [5]-[13]). This problem was completely solved in [7] for quadratic system with $1:-2$ resonant singular points, but for cubic systems is still open. In this paper, the cubic systems with $1:-2$ resonant singularity, having invariant straight lines of two direction of total multiplicity six, are classified.

We consider the cubic system

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 + a_{20}x + a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2), \\ \dot{y} = y(-2 + b_{11}x + b_{02}y + b_{21}x^2 + b_{12}xy + b_{03}y^2), \end{cases} \quad (1.3)$$

where the variables x, y and coefficients a_{ij}, b_i are real.

Our main results are expressed in the following theorem.

Main Theorem. *The cubic system (1.3) has affine invariant straight lines of two directions of total algebraic multiplicity six if and only if it has one of the following fifteen forms:*

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(ax-1), a \neq 0, a \neq 1, \\ \dot{y} = y(y-1)(by+2), b \neq 0, b \neq -2; \end{cases} & 2) & \begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(ax-1), a \neq 0, \\ \dot{y} = -2y(y-1)^2, a \neq 1; \end{cases} \\ 3) & \begin{cases} \dot{x} = x(x-1)^2, \\ \dot{y} = y(y-1)(cy+2), c \neq 0, c \neq -2; \end{cases} & 4) & \begin{cases} \dot{x} = x(x-1)^2, \\ \dot{y} = -2y(y-1)^2; \end{cases} \\ 5) & \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}x((2-c)y + 3cy^2 + 2), c \neq 0, \\ \dot{y} = y(y-1)(cy+2), c \neq -2, \end{cases} & 6) & \begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(ax-1), a \neq 1, \\ \dot{y} = y(x+ax-2), a \neq 0; \end{cases} \\ 7) & \begin{cases} \dot{x} = x((1+d)y^2 + 1), \\ \dot{y} = y(y-1)(dy+2), d \neq 0, d \neq -2; \end{cases} & 8) & \begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(ax-1), a \neq 0, a \neq 1, \\ \dot{y} = y(-2 + 3x + (a-2)x^2); \end{cases} \\ 9) & \begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(ax-1), a \neq 0, a \neq 1, \\ \dot{y} = y(py^2 + qy - 2), q^2 + 8p < 0; \end{cases} & 10) & \begin{cases} \dot{x} = x(px^2 + qx + 1), q^2 - 4p < 0, \\ \dot{y} = y(y-1)(cy+2), c \neq 0, c \neq -2; \end{cases} \\ 11) & \begin{cases} \dot{x} = x(px^2 + qx + 1), q^2 - 4p < 0, \\ \dot{y} = y(ry^2 + sy - 2), s^2 + 8r < 0; \end{cases} & 12) & \begin{cases} \dot{x} = x(x-1)^2, \\ \dot{y} = y(py^2 + qy - 2), q^2 + 8p < 0; \end{cases} \\ 13) & \begin{cases} \dot{x} = x(px^2 + qx + 1), q^2 - 4p < 0, \\ \dot{y} = -2y(y-1)^2; \end{cases} & 14) & \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}x(3py^2 + qy + 2), \\ \dot{y} = y(py^2 + qy - 2), q^2 + 8p < 0; \end{cases} \\ 15) & \begin{cases} \dot{x} = x(px^2 + qx + 1), q^2 - 4p < 0, \\ \dot{y} = -y(2 + qx), \end{cases} \end{aligned}$$

where $a, b, c, d, q, p, r, s \in \mathbb{R}$. The systems 1) – 15) are Darboux integrable and have the following first integrals, respectively:

$$1) F(x, y) = (x-1)^{\frac{2(2+b)}{(1-a)b}} x^{\frac{2(2+b)}{b}} (ax-1)^{\frac{2a(2+b)}{(a-1)b}} (y-1)^{\frac{2}{b}} y^{\frac{2+b}{b}} (by+2);$$

$$2) F(x, y) = e^{\frac{a-1}{y-1}} x^{2-2a} (ax-1)^{2a} (y-1)^{a-1} y^{1-a} (x-1)^{-2};$$

$$3) F(x, y) = e^{\frac{2c+4}{x-1}} x^{-4-2c} (x-1)^{4+2c} (y-1)^2 y^{-2-c} (cy+2)^c;$$

$$4) F(x, y) = e^{\frac{2}{1-x}} \cdot e^{\frac{1}{1-y}} x^2 (x-1)^{-2} (y-1)^{-1} y;$$

$$5) F(x, y) = e^{\frac{1}{2+cy}} \cdot e^{\frac{5c+2c^2}{4(y-1)}} x^2 (y-1)^{\frac{c^2+5c-4}{2}} (cy+2)y;$$

$$6) F(x, y) = e^{\frac{1}{ax-1}} \cdot e^{\frac{3a-4a^2}{x-1}} x^2 (x-1)^{4a^2-6a-1} (ax-1)y;$$

$$7) F(x, y) = x^2 y (dy+2)^{\frac{2+d}{d}} (y-1)^{-2};$$

$$8) F(x, y) = x^2 y (ax-1)^{\frac{2-2a}{a}} (x-1)^{-1};$$

$$9) F(x, y) = (x-1)^{\frac{-1}{a}} x^{\frac{1-a}{a}} (ax-1)y^{\frac{1-a}{2a}} \left(y + \frac{q + \sqrt{\gamma}}{2p}\right)^{(a-1)(\sqrt{\gamma}-q)\delta} \left(y + \frac{q - \sqrt{\gamma}}{2p}\right)^{(a-1)(\sqrt{\gamma}+q)\beta},$$

$$\text{where } \gamma = q^2 + 8p, \delta = \frac{128p^3 - q^3\gamma\sqrt{\gamma} + q^3\sqrt[3]{\gamma}}{512ap^3\sqrt{\gamma}}, \beta = \frac{128p^3 + q^3\gamma\sqrt{\gamma} - q^3\sqrt[3]{\gamma}}{512ap^3\sqrt{\gamma}};$$

$$10) F(x, y) = (y-1)^{\frac{2}{c}} x^{\frac{-4-2c}{c}} (cy+2)y^{\frac{-2-c}{c}} \left(x + \frac{q + \sqrt{\lambda}}{2p}\right)^{-(c+2)(\sqrt{\lambda}-q)\beta} \left(x + \frac{q - \sqrt{\lambda}}{2p}\right)^{(2+c)(\sqrt{\lambda}+q)\gamma},$$

where

$$\lambda = q^2 - 4p, \beta = \frac{-16p^3 + 4pq^3\sqrt{\lambda} - q^5\sqrt{\lambda} + q^3\sqrt[3]{\lambda}}{16cp^3\sqrt{\lambda}}, \gamma = \frac{16p^3 + 4pq^3\sqrt{\lambda} - q^5\sqrt{\lambda} + q^3\sqrt[3]{\lambda}}{16cp^3\sqrt{\lambda}};$$

$$11) F(x, y) = \frac{1}{4pr} \cdot x^{-32p^3\lambda\delta} \cdot \left(x + \frac{q + \lambda}{2p}\right)^{-(q-\lambda)(16p^3-\gamma)\delta} \cdot (2px + q - \lambda) \cdot$$

$$\cdot y^{-16p^3\lambda\delta} \cdot \left(y + \frac{s - \beta}{2r}\right)^{-16p^3s(q-\lambda)\delta + \frac{\beta}{s+\beta}} \cdot (2ry + s + \beta),$$

$$\text{Where } \lambda = \sqrt{q^2 - 4p}, \beta = \sqrt{8r + s^2}, \gamma = 4pq^3\lambda - q^5\lambda + q^3\lambda^3,$$

$$\delta = \frac{1}{(q + \lambda)(16p^3 + \gamma)};$$

$$12) F(x, y) = e^{\frac{\beta}{x-1}} \cdot (x-1)^\beta \cdot x^{-\beta} \cdot y^{-q\lambda+8p+q^2} \cdot \left(y + \frac{q + \lambda}{2p}\right)^{q\lambda-4p-q^2} \cdot \left(y + \frac{q - \lambda}{2p}\right)^{-4p},$$

$$\text{where } \lambda = \sqrt{8p + q^2}, \beta = 2q\lambda - 16p - 2q^2;$$

$$13) F(x, y) = e^{\frac{\beta}{y-1}} \cdot (y-1)^\beta \cdot x^{-2\beta} \cdot y^{-\beta} \cdot \left(x + \frac{q + \lambda}{2p}\right)^{q\lambda+\beta-q^2} \cdot \left(x + \frac{q - \lambda}{2p}\right)^{4p};$$

where $\lambda = \sqrt{q^2 - 4p}$, $\beta = q\lambda - \lambda^2$;

$$14) F(x, y) = \frac{1}{16} p^{-2} (py^2 + qy - 2)^{-2} x^2 y;$$

$$15) F(x, y) = (px^2 + qx + 1)^{-1} x^2 y.$$

2. Algebraic maximal multiplicity of the invariant straight lines $x = a, y = a, a \in \mathbb{C}$

2.1. Multiplicity of the line $x = 0 (y = 0)$

In this subsection, we compute the maximal algebraic multiplicity of the invariant straight line $x = 0 (y = 0)$ of the system (1.3). For this purpose, we calculate the determinant $E_1(X)$. It has the form $E_1(X) = xy(6 + \omega(x, y))$, where $\omega(x, y)$ is a polynomial of degree six and $\omega(0, 0) \neq 0$. It is evident that the invariant straight line $x = 0 (y = 0)$ has the algebraic multiplicity one. In this way we have proved the following lemma.

Lemma 1. *For system (1.3) the algebraic multiplicity of the invariant straight line $x = 0 (y = 0)$ is one.*

2.2. Multiplicity of the line $x = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$

Without loss of generality, we consider $\alpha = 1$. Then system (1.3) can be written in the following form

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(ax+by-1) \equiv P(x, y), \\ \dot{y} = -y(2+cx+dy+mx^2+nxy+sy^2) \equiv Q(x, y). \end{cases} \quad (2.1)$$

For (1.3) the polynomial $E_1(X)$ looks as

$$E_1(X) = xy(x-1)(A_2(y) + A_3(y)(x-1) + A_4(y)(x-1)^2 + A_5(y)(x-1)^3 + A_6(y)(x-1)^4 + A_7(y)(x-1)^5),$$

where $A_j(y), j = 2, \dots, 7$ are polynomials in y . For example, $A_2(y) = A_{21}(y)A_{22}(y)$,

where $A_{21}(y) = 2 + c + m + dy + ny + sy^2$ and $A_{22}(y) = -1 + a^2 - c + ac - m + am +$

$$2(-b + ab - d + ad - n + an)y + (b^2 + bd + bn - 3s + 3as)y^2 + 2bsy^3.$$

The algebraic multiplicity of the invariant straight line $x = 1$ is at least two if the identity $A_2(y) \equiv 0$ holds. Let $A_2(y) \equiv 0$. As $\text{GCD}(P, Q) = 1$, then the polynomial $A_{21}(y)$ is not identically zero and therefore $A_{22}(y)$ is identically zero. The identity $A_{22}(y) \equiv 0$ holds if one of the following three sets of conditions is satisfied:

$$2.1) b = 0, a = 1;$$

$$2.2) a = 1, s = 0, n = -b - d;$$

2.3) $s = 0, n = -b - d, m = -1 - a - c$.

In each of the cases 2.1), 2.2) and 2.3) the algebraic multiplicity of the line $x = 1$ is at least three if the polynomial $A_3(y)$ is identically zero. Indeed,

In Case 2.1) we obtain $A_3(y) = A_{21}(y)A_{31}(y)$, where $A_{31}(y) = 2 + c + m + 2dy + 2ny + 3sy^2$. If $A_{31}(y) \equiv 0$, then $\deg(\text{GCD}(P, Q)) > 0$. Therefore, $A_{31}(y)$ is not identically zero. Thus, in this case the multiplicity of $x = 1$ is two.

In Case 2.2) we get

$$\{A_3(y) = 4 + 4c + c^2 + 4m + 2cm + m^2 + (b^2 - 2bd - bcd - b^2m - bdm)y^2 + 2b^2dy^3 \equiv 0, \\ \text{GCD}(P, Q) = 1\} \Rightarrow c = -3, d = 0, m = 1 \Rightarrow$$

$$A_4(y) = -4b^2y^2 \neq 0.$$

The system (1.3) has the form

$$\dot{x} = x(x-1)(x+by-1), \quad \dot{y} = y(-2+3x-x^2+bx), \quad b \neq 0. \quad (2.2)$$

In Case 2.3) we have

$$\{A_3(y) = (-1+a+by)(-6+6a-2c+2ac+(3b+bc-3d+3ad)y+2bdy^2) \equiv 0, \\ \text{GCD}(P, Q) = 1\} \Rightarrow \{d = 0, c = -3, \text{GCD}(P, Q) = 1\} \Rightarrow$$

$$A_4(y) = -2(-1+a+by)(-3+3a+2by) \neq 0.$$

The system(1.3) looks as

$$\dot{x} = x(x-1)(ax+by-1), \quad \dot{y} = y(-2+3x+(a-2)x^2+bx), \quad (a, b) \neq (1, 0) \quad (2.3)$$

and has the invariant straight lines: $l_1 \equiv x = 0, l_{2,3,4} \equiv x - 1 = 0, l_5 \equiv y = 0$.

Note that the system (2.2) is a particular case of the system (2.3).

Lemma 2. *The maximal algebraic multiplicity of the real invariant straight line $l \equiv x - \alpha = 0, \alpha \in R^*$ in system (1.3) is three. If $l=0$ has the algebraic multiplicity three for (1.3), then via an affine transformation of coordinates and time rescaling the system (1.3) can be writing in the form (2.3) and $l \equiv x - 1 = 0$ is the unique invariant straight line parallel to $x = 0$.*

2.3. Multiplicity of the line $y = 1$

The straight line $y = 1$ is the invariant straight line for system (1.3) if and only if (1.3) looks as

$$\begin{cases} \dot{x} = x(kx^2 + jxy + ry^2 + ax + by + 1) \equiv P(x, y), \\ \dot{y} = y(y-1)(cx + dy + 2) \equiv Q(x, y). \end{cases} \quad (2.5)$$

To determine the maximal algebraic multiplicity of the line $y = 1$ for (2.5), we write $E_1(X)$ in the form

$$E_1(X) = xy(y-1)(B_2(x) + B_3(x)(y-1) + B_4(x)(y-1)^2 + B_5(x)(y-1)^3 + B_6(x)(y-1)^4 + B_7(x)(y-1)^5).$$

Taking into account that $GCD(P, Q) = 1$, the polynomial $B_2(x) = B_{21}(x)B_{22}(x)$, where

$$B_{21}(x) = 1 + b + r + ax + jx + kx^2 \text{ and } B_{22}(x) = -2 + 2b - 3d + bd - d^2 + 2r + dr + 2(2a - 2c + ad - cd + 2j + dj)x + (ac - c^2 + 6k + 3dk + cj)x^2 + 2ckx^3,$$

is identically zero if one of the following three sets of conditions is satisfied:

$$2.4) \ c = 0, \ d = -2;$$

$$2.5) \ d = -2, \ k = 0, \ c = a + j;$$

$$2.6) \ k = 0, \ c = a + j, \ r = 1 - b + d.$$

In Case 2.4) the condition $GCD(P, Q) = 1$ gives

$$B_3(x) = 2x^2(a + j + kx)(2a + 2j + 3kx) \neq 0.$$

In Case 2.5) we have $\{B_3(x) = (a + j)^2(b + 2ax)x^2 \equiv 0, GCD(P, Q) = 1\} \Rightarrow$

$\{a = b = 0, GCD(P, Q) = 1\} \Rightarrow B_4(x) = 2j^2x^2 \neq 0$. The system (2.5) has the form

$$\dot{x} = x(jxy - y^2 + 1), \quad \dot{y} = y(y-1)(2 + jx - 2y), \quad j \neq 0. \quad (2.6)$$

In Case 2.6) we find that $B_3(x) = B_{31}(x)B_{32}(x)$, where $B_{31}(x) = 2 + d + ax + jx$ and

$$B_{32}(x) = 4b + 2bd + (6a + ab + 3ad + bj)x + (2a^2 + 2aj)x^2. \text{ Assume } B_3(x) \equiv 0. \text{ As}$$

$GCD(P, Q) = 1$ the polynomial $B_{31}(x)$ is not identically zero and therefore $B_{32}(x)$ is

identically zero. $\{a = b = 0, GCD(P, Q) = 1\} \Rightarrow B_4(x) = (2 + d + jx)(6 + 3d + 2jx) \neq 0$.

The system (2.5) looks as

$$\dot{x} = x(jxy + (1 + d)y^2 + 1), \quad \dot{y} = y(y-1)(2 + jx + dy), \quad (d, j) \neq (-2, 0) \quad (2.7)$$

which possesses the invariant straight lines: $l_1 \equiv x = 0, l_2 \equiv y = 0, l_{3,4,5} \equiv y - 1 = 0$.

Note that (2.6) is a particular case of the system (2.7).

Lemma 3. *The maximal algebraic multiplicity of the real invariant straight line $l \equiv y - \alpha = 0, \alpha \in R^*$ in system (1.3) is three. If $l=0$ has algebraic multiplicity three for (1.3), then via an affine transformation of coordinates and time rescaling, the system (1.3) can be brought to the form (2.7) and $l \equiv y - 1 = 0$ is the unique invariant straight line parallel to $y = 0$.*

2.4. Multiplicity of the line $x = \alpha, \alpha \in C \setminus R$

The straight line $x = \alpha, \alpha \in C \setminus R$ is the invariant straight line for system (1.3) if and only if (1.3) looks as

$$\begin{cases} \dot{x} = x(px^2 + qx + 1) \equiv P(x, y), & q^2 - 4p < 0, \\ \dot{y} = -y(2 + cx + dy + mx^2 + nxy + sy^2) \equiv Q(x, y). \end{cases} \quad (2.8)$$

To determine the maximal algebraic multiplicity of the line $x = \alpha$, $\alpha \in C \setminus R$, we write $E_1(X)$ in the form:

$$E_1(X) = xy(px^2 + qx + 1)(A_2(x, y) + A_3(x, y)(px^2 + qx + 1)).$$

where

$$\begin{aligned} A_2(x, y) = & \frac{1}{p^3}(m^2p - c^2p^2 - 2mp^2 + 2cmpq + cp^2q - m^2q^2 - mpq^2 + \\ & (-2cmp^2 + 2cp^3 + 2m^2pq - c^2p^2q + mp^2q - 2p^3q + 2cmpq^2 + cp^2q^2 - m^2q^3 - mpq^3)x + \\ & (-3dmp^2 - 3cnp^2 + 4dp^3 + 3mnpq + np^2q)y + (-2n^2p^2 + 2d^2p^3 - 4mp^2s + 6sp^3)y^2 + \\ & (-3mnp^2 + 3cdp^3 + 4np^3 - 3dmp^2q - 3cnp^2q - dp^3q + 3mnpq^2 + np^2q^2)xy + \\ & (4dnp^3 - 2n^2p^2q + 4cp^3s - 4mp^2qs - p^3qs)xy^2 + 5p^3s(d+n)xy^3 + 3p^3s^2y^4). \end{aligned}$$

The algebraic multiplicity of the invariant straight line $x = \alpha$, $\alpha \in C/R$ is at least two if the identity $A_2(x, y) \equiv 0$ holds. Taking into account that the system's coefficients are real numbers and $GCD(P, Q) = 1$, the last identity yields the following set of conditions: $d = n = m = s = 0$, $c = q$.

In this case we obtain the system 15) from the main theorem with the invariant straight lines:

$$l_1 \equiv x = 0, \quad l_{2,3} \equiv x + \frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} = 0, \quad l_{4,5} \equiv x + \frac{q - \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} = 0, \quad l_6 \equiv y = 0.$$

The polynomial $E_1(X)$ has the form $E_1(X) = 2xy(3 + qx)(1 + qx + px^2)^2$ and it does not divide the polynomial $(px^2 + qx + 1)^3$.

Lemma 4. *The maximal algebraic multiplicity of the non-real invariant straight line $x = \alpha$, $\alpha \in C \setminus R$ in system (1.3) is two.*

2.5. Multiplicity of the line $y = \alpha$, $\alpha \in C \setminus R$

The straight line $y = \alpha$, $\alpha \in C \setminus R$ is the invariant straight line for system (1.3) if and only if (1.3) look as

$$\begin{cases} \dot{x} = x(kx^2 + jxy + ry^2 + ax + by + 1) \equiv P(x, y), \\ \dot{y} = y(py^2 + qy - 2) \equiv Q(x, y), \quad q^2 + 8p < 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

We write $E_1(X)$ in the form

$$E_1(X) = xy(py^2 + qy - 2)(A_2(x, y) + A_3(x, y)(py^2 + qy - 2)).$$

The polynomial $A_2(x, y)$ looks as

$$\begin{aligned} A_2(x, y) = & \frac{1}{p^3} (2b^2 p^2 - 3p^3 + 2bp^2 q - 4p^2 r - 4bpqr - 2pq^2 r + 4pr^2 + 2q^2 r^2 + \\ & (6bjp^2 - ap^3 + 2jp^2 q + 6ap^2 r - 6jpqr)x + 2p^2 (2j^2 + a^2 p + 4kr)x^2 + 5akp^3 x^3 + 3k^2 p^3 x^4 + \\ & (-2bp^3 - b^2 p^2 q + p^3 q - bp^2 q^2 + 4bp^2 r + 4p^2 qr + 2bpq^2 r + pq^3 r - 4pqr^2 - q^3 r^2)y + \\ & (3abp^3 - jp^3 - 3bjp^2 q + ap^3 q - jp^2 q^2 + 6jp^2 r - 3ap^2 qr + 3jpq^2 r)xy + 5kjp^3 x^3 y + \\ & (4bkp^3 + 4ajp^3 - 2j^2 p^2 q + kp^3 q - 4kp^2 qr)x^2 y. \end{aligned}$$

The algebraic multiplicity of the invariant straight line $y = \alpha$, $\alpha \in C \setminus R$ is at least two if the identity $A_2(x, y) \equiv 0$ holds. Under condition $GCD(P, Q) = 1$ and taking into account that the coefficients of the differential system are real, the identity $A_2(x, y) \equiv 0$ holds if the following conditions are satisfied: $a = k = j = 0$, $b = \frac{q}{2}$, $r = \frac{3p}{2}$. In this case we get the system 14) of the main theorem possessing the invariant straight lines:

$$l_1 \equiv x = 0, l_2 \equiv y = 0, l_{3,4} \equiv y + \frac{q + \sqrt{q^2 + 8p}}{2p} = 0, l_{5,6} \equiv y + \frac{q - \sqrt{q^2 + 8p}}{2p} = 0.$$

The multiplicity of the lines $l_{5,6}$ is exactly two as $(py^2 + qy - 2)^3$ does not divide the polynomial $E_1(X) = -\frac{1}{4}xy(py^2 + qy - 2)^2(-6 - qy + 3py^2)$.

Lemma 5. *In the class of systems (1.3) the maximal algebraic multiplicity of the non-real invariant straight line $y = \alpha$, $\alpha \in C \setminus R$ is two.*

3. Configurations of the invariant straight lines

Taking into account Lemmas 1-5 we have for system (1.3) the following twelve configurations of six invariant real straight lines of two directions:

A1) $(3r; 3r);$	A5) $(4(1, 2)r; 2r);$	A9) $(2r; 4(3)r);$
A2) $(3r; 3(2)r);$	A6) $(3(2)r; 3(2)r);$	A10) $(4(3)r; 2r);$
A3) $(3(2)r; 3r);$	A7) $(1r; 5(2, 2)r);$	A11) $(1r; 5(1, 3)r);$
A4) $(2r; 4(1, 2)r);$	A8) $(5(2, 2)r; 1r);$	A12) $(5(1, 3)r; 1r);$

And the following seven configurations of six invariant straight lines, two of which are non-real:

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{B1)} (3r; 1r+2c); & \mathbf{B4)} (3(2)r; 1r+2c); & \mathbf{B6)} (1r; 1r+4(2,2)c); \mathbf{B7)} \\
 \mathbf{B2)} (1r+2c; 3r); & \mathbf{B5)} (1r+2c; 3(2)r); & (1r+4(2,2)c; 1r). \\
 \mathbf{B3)} (1r+2c; 1r+2c); & &
 \end{array}$$

We denote by $3(2)r(4(3)r)$ two parallel and distinct real straight lines one of which is counted twice (thrice) and we say that it has multiplicity equal to two (three). By $5(1,3)r$ we denote three parallel and distinct real straight lines one of which has multiplicity three and by $1r+2c$ is denoted a triplet of distinct and parallel straight lines, one of which is real and two are complex (non-real).

We denote by $(3r; 1r+2c)$ the configuration consisting of six affine straight lines of two directions: a triplet of real distinct parallel straight lines in one direction; a real straight line and a pair of parallel complex (non-real) lines in the second direction. By $(1r; 5(2,2)r)$ is denoted the configuration of six straight lines of two directions consisting of: a real straight line (in one direction) and five real parallel straight lines two of which have multiplicity equal to two (in the second direction)

3.1. Unrealisable configurations

In this subsection we show that in the class of cubic systems of the form (1.3) the configurations **A4)**, **A5)**, **A9)** and **A10)** are not realisable.

Configuration A4) $(2r; 4(1, 2)r)$. Via an affine transformations of coordinates and time rescaling, the cubic system (1.3) with two real invariant straight lines in the direction of the axe Oy and three real invariant straight lines in the direction Ox , can be written in the form

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(ax+by-1), b \neq 0, a^2 + ((b-1)(b-c))^2 \neq 0, \\ \dot{y} = y(y-1)(cy+2), c \neq 0, c \neq -2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Without loss of generality, we consider that the invariant straight $y = 1$ has the multiplicity two. For system (3.1) the polynomial $E_1(X)$ look as

$$\begin{aligned}
 E_1(X) = & (1-x)x(y-1)y(2 \\
 & + cy)[(4-b^2+c-bc-4ax-4bx-3abx+2b^2x-acx+5abx^2 \\
 & - 2by-b^2y+3cy-bcy+2b^2xy-3acxy-2bcy^2)(y-1) + \varphi(x)],
 \end{aligned}$$

where $\varphi(x) = (1-b)(1+b+c) - (a(c+3b-1) - 2(1-b)^2)x - a(2a + 5(1-b))x^2 + 3a^2x^3$. As $\varphi(x)$ is not identically zero, the polynomial $(y-1)^2$ does not divide $E_1(X)$ and therefore the invariant straight line $y = 1$ does not have the multiplicity two. In this way we proved that the configurations **A4)** is not realisable.

Configuration A5) $(4(1,2)r ; 2r)$. The system (1.3) can be written in the form

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(ax-1), a \neq 0, a \neq 1 \\ \dot{y} = y(y-1)(bx+cy+2), (b+2)^2(b+2a)^2 + c^2 \neq 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Suppose that the invariant straight line $x = 1$ has the multiplicity two for (3.2). In this assumption the polynomial $E_1(X)$ looks as

$$E_1(X) = -xy(x-1)(ax-1)(y-1)[(-4+2a-5b+ab-b^2 + (6a-b+ab-b^2)x + 2abx^2 + (8b+2b^2-2c+ac-3bc)y + (2b^2+3ac)xy + 5bcy^2)(x-1) + \phi(y)],$$

where $\phi(y) = (2+2b+cy)(-3+a-b+4y+2by-2cy+3cy^2)$.

This implies the polynomial $\phi(y)$ to be not identically zero for the system (3.2), which contradicts the assumption that the invariant straight line $x = 1$ has the multiplicity two. We have proved that the configurations **A5)** is not realisable.

Configuration A9) $(2r; 4(3)r)$ (Configuration A10) $(4(3)r; 2r)$. According to Lemma 3 (Lemma 2) we consider the system (2.7) ((2.3)). This system does not have any invariant straight line described by an equation of the form $x = \alpha$ ($y = \alpha$), $\alpha \in R^*$. Therefore, the configuration **A9) (A10)** is not realisable.

4. Classification of cubic systems (1.3) with invariant straight lines of total multiplicity six and of two directions

Configuration A1) $(3r; 3r)$. Via an affine transformation of coordinates and time rescaling each system which realise this configuration can be written in the form 1) of the Main Theorem. The system 1) has the invariant straight lines:

$$l_1 \equiv x = 0, l_2 \equiv x - 1 = 0, l_3 \equiv ax - 1 = 0, l_4 \equiv y = 0, l_5 \equiv y - 1 = 0, l_6 \equiv by + 2 = 0$$

and is Darboux integrable.

Configuration A2) $(3r ; 3(2)r)$. Any cubic system with a triplet of distinct parallel invariant straight lines and a couple of distinct parallel invariant straight lines modulo an affine transformation of coordinates can be written in the form

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(ax-1) \equiv P(x, y), a \neq 0, a \neq 1, \\ \dot{y} = y(y-1)(bx+cy+2) \equiv Q(x, y). \end{cases} \quad (4.1)$$

For this system we have $E_1(X) = xy(y-1)(x-1)(ax-1)(A_2(x) + A_3(x)(y-1))$,

$A_2(x) = -2 - 3c - c^2 - (4 + 4a + 4b + 2c + 2ac + 2bc)x + (6a - b - ab - b^2 + 3ac)x^2 + 2abx^3$, where $A_3(x)$ is a polynomial in x . In order the straight line $y - 1 = 0$ to have multiplicity two, we require the $A_2(x) \equiv 0$ and this yields $b = 0, c = -2$. In these

conditions the system (4.1) becomes the system 2) of the Main Theorem. It has the invariant straight lines:

$$l_1 \equiv x = 0, l_2 \equiv x - 1 = 0, l_3 \equiv ax - 1 = 0, l_4 \equiv y = 0, l_{5,6} \equiv y - 1 = 0$$

and it is Darboux integrable.

Configuration A3) $(3(2)r ; 3r)$. In this case the system (1.3) can be written as

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(ax+by-1) \equiv P(x, y), \\ \dot{y} = y(y-1)(cy+2) \equiv Q(x, y), c \neq 0, c \neq -2. \end{cases} \quad (4.2)$$

For (4.2) the polynomial $E_1(X)$ looks as

$$E_1(X) = xy(y-1)(x-1)(cy+2)(A_2(y) + A_3(y)(x-1)),$$

where

$$A_2(y) = -1 + a^2 + (4 - 4a - 2b + 2ab - 2c + 2ac)y + (b^2 - 2b + 3c - 3ac + bc)y^2 - 2bcy^3.$$

The identity $A_2(y) \equiv 0$ holds if and only if $a = 1, b = 0$. Under these conditions the system (4.2) is of the form 3) of the Main Theorem and it has the invariant straight lines

$$l_1 \equiv x = 0, l_{2,3} \equiv x - 1 = 0, l_4 \equiv y = 0, l_5 \equiv y - 1 = 0, l_6 \equiv cy + 2 = 0.$$

Configuration A6) $(3(2)r ; 3(2)r)$. We write the system (1.3) in the form

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(ax+by-1) \equiv P(x, y), \\ \dot{y} = y(y-1)(cx+dy+2) \equiv Q(x, y). \end{cases}$$

For this system the polynomial $E_1(X)$ is

$$E_1(X) = xy(y-1)(x-1)(A_2(y) + A_3(x, y)(x-1))$$

where

$$A_2(y) = (2 + c + dy)((1 - a)(1 + a + c - 4y + 2by - 2cy + 2dy - 3dy^2) + by^2(2 - b + c - d + 2dy))$$

and

$$A_3(x, y) = 4 + 2a^2 - 3c + 2ac + a^2c - c^2 + ac^2 - 10ax + 2a^2x + cx + 2acx + a^2cx - c^2x + ac^2x + 6a^2x^2 - 3acx^2 + a^2cx^2 + ac^2x^2 + 2a^2cx^3 - 8ay - 8by + 4aby + 8cy - 8acy - 2bcy + 2abcy + 2c^2y - 2ac^2y + 2dy + 4ady + a^2dy - 3cdy + 3acdy + 10abxy - 8acxy - 2bcxy + 2abcxy + 2c^2xy - 2ac^2xy - 5adxy + a^2dxy + 3acdxy + 3abcx^2y - 2ac^2x^2y + 3a^2dx^2y + 4b^2y^2 - 4bcy^2 + b^2cy^2 - bc^2y^2 - 10ady^2 - 4bdy^2 + 2abdy^2 + 5cdy^2 - 5acdy^2 + bcdy^2 + 2ad^2y^2 + b^2cxy^2 - bc^2xy^2 + 5abdxy^2 - 5acdxy^2 + 2b^2dy^3 - 3bcdy^3 - 3ad^2y^3$$

The straight line $x - 1 = 0$ will have the multiplicity two, only if $A_2(y)$ is identically zero:

$$\{A_2(y) \equiv 0, GCD(P, Q) = 1\} \Rightarrow a = 1, b = 0 \text{ or } a = 1, c = b - 2, d = 0, b \neq 0.$$

If $a = 1, b = 0$, then we have the system

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1)^2, \\ \dot{y} = y(y-1)(cx + dy + 2), \end{cases} \quad (4.3)$$

For (4.3) the polynomial $E_1(X)$ has the form

$$E_1(X) = xy(y-1)(x-1)^2(B_2(x) + B_3(x)(y-1)),$$

where $B_2(x) = 2 + 3d + d^2 + (8 + 4c + 4d + 2cd)x + (2c - 6 + c^2 - 3d)x^2 - 2cx^3$.

The straight line $y-1=0$ has the multiplicity two if $B_2(x) \equiv 0$ and this is realized when $c = 0, d = -2$. Thus, the system (4.3) will have the form 4) of the Main Theorem. This system has the invariant straight lines:

$$l_1 \equiv x = 0, l_{2,3} \equiv x - 1 = 0, l_4 \equiv y = 0, l_{5,6} \equiv y - 1 = 0.$$

When $a = 1, c = b - 2, d = 0$, the polynomial $B_2(x)$ looks

$$B_2(x) = 2 - 2b^2 - (2b + 2b^2)x + (4b - 6 - 2b^2)x^2 + (4 - 2b)x^3.$$

Obviously, $B_2(x)$ is not identically zero. So, in this case, the multiplicity of the invariant straight line $y-1=0$ can not be equal to two.

Configuration A7) (1r; 5(2,2)r). We rewrite the system (1.3) into the form

$$\begin{cases} \dot{x} = x(fx^2 + gxy + hy^2 + ax + by + 1) \equiv P(x, y), \\ \dot{y} = y(y-1)(cy + 2) \equiv Q(x, y), c \neq 0, c \neq -2. \end{cases} \quad (4.4)$$

For (4.4) we have $E_1(X) = xy(y-1)(cy + 2)(A_2(x) + A_3(x)(y-1))$, where

$$A_2(x) = -A_{21}(x) \cdot A_{22}(x),$$

$$A_{21}(x) = 1 + b + h + ax + gx + fx^2 \text{ and } A_{22}(x) = -1 + b - c + h + 2ax + 2gx + 3fx^2.$$

Taking into consideration the condition $GCD(P, Q) = 1$, we obtain $A_{21}(x) \not\equiv 0$, and therefore $A_{22}(x)$ is identically zero. This is realized when $f = 0, g = -a, h = 1 - b + c$. In these conditions, the system (4.4) looks as

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-axy + (1 - b + c)y^2 + ax + by + 1), \\ \dot{y} = y(y-1)(cy + 2), c \neq 0, c \neq -2. \end{cases} \quad (4.5)$$

For (4.5) we have $E_1(X) = xy(y-1)^2(cy + 2)(B_2(x) + B_3(x)(cy + 2))$, where

$$B_2(x) = \frac{1}{c^3}((2 + c)(2 - 2b + c + acx)(2 - 2b - c + 2acx)).$$

The implication $\{B_2(x) \equiv 0, GCD(P, Q) = 1\} \Rightarrow \left\{a = 0, b = \frac{2-c}{2}\right\}$ reduces (4.5) to the system 5) of the Main Theorem, which has the following invariant straight lines:

$$l_1 \equiv x = 0, l_2 \equiv y = 0, l_{3,4} \equiv y - 1 = 0, l_{5,6} \equiv cy + 2 = 0.$$

Configuration A8) $(5(2,2)r ; 1r)$. We consider the system

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(ax-1) \equiv P(x, y), a \neq 0, a \neq 1, \\ \dot{y} = y(fy^2 + gxy + hx^2 + bx + cy - 2) \equiv Q(x, y). \end{cases} \quad (4.6)$$

In this case

$$E_1(X) = xy(y-1)(x-1)(A_2(y) + A_3(y)(x-1)),$$

where $A_2(y) = -A_{21}(y) \cdot A_{22}(y)$, $A_{21}(y) = 1 + a - b - h - 2cy - 2gy - 3fy^2$ and

$A_{22}(y) = -2 + b + h + cy + gy + fy^2$. The straight line $x - 1 = 0$ has the multiplicity two, only if the polinomial $A_2(y)$ is identically zero. We have $\{A_2(y) \equiv 0, GCD(P, Q) = 1\} \Rightarrow A_{21} \equiv 0 \Rightarrow \{f = 0, g = -c, h = 1 + a - b\}$. The system (4.6) obtains the form

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(ax-1), a \neq 0, a \neq 1, \\ \dot{y} = y(-cxy + (1 + a - b)x^2 + bx + cy - 2). \end{cases} \quad (4.7)$$

We will require for system (4.7) to have the invariant straight line $ax - 1 = 0$ of the multiplicity two. We compute the polynomial $E_1(X)$ for (4.7)

$$E(X) = xy(x-1)^2(ax-1)(B_2(y) + B_3(y)(ax-1)),$$

where $B_2(y) = \frac{1}{a^3}(a-1)(-1-2a+b+acy)(-1-a+b+2acy)$. Taking into account

that $GCD(P, Q) = 1$, the polynomial $B_2(y)$ will be identical zero if and only if $c = 0, b = a + 1$. In these conditions (4.7) becomes the system 6) of the Main Theorem wich has the following invariant straight lines

$$l_1 \equiv x = 0, l_{2,3} \equiv x - 1 = 0, l_{4,5} \equiv ax - 1 = 0, l_6 \equiv y = 0.$$

Configuration A11) $(1r ; 5(1,3)r)$. For realisation of this configuration it is sufficient to put $l = 0$ in (2.7). In this way, we obtain the system 7) of the Main Theorem which has the invariant straight lines:

$$l_1 \equiv x = 0, l_2 \equiv y = 0, l_{3,4,5} \equiv y - 1 = 0, l_6 \equiv dy + 2 = 0.$$

Configuration A12) $(5(1,3)r; 1r)$. In this case we put $b = 0$, $a \neq 0$ in (2.3) and obtain the system 8) of the Main Theorem which possesses the invariant straight lines:

$$l_1 \equiv x = 0, l_{2,3,4} \equiv x - 1 = 0, l_5 \equiv ax - 1 = 0, l_6 \equiv y = 0.$$

Configuration B1) $(3r; 1r+2c)$. By an affine transformation of coordinates the system (1.3) can be brought to the form 9) of the Main Theorem, which has the following invariant straight lines:

$$l_1 \equiv x = 0, l_2 \equiv x - 1 = 0, l_3 \equiv ax - 1 = 0, l_4 \equiv y = 0,$$

$$l_5 \equiv y + \frac{q + \sqrt{q^2 + 8p}}{2p} = 0, l_6 \equiv y + \frac{q - \sqrt{q^2 + 8p}}{2p} = 0, \text{ where } q^2 + 8p < 0.$$

Configuration B2) $(1r+2c; 3r)$. In this case the system (1.3) can be brought to the system 10) of the Main Theorem and it admits the following invariant straight lines:

$$l_1 \equiv x = 0, l_2 \equiv x + \frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} = 0, l_3 \equiv x + \frac{q - \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} = 0,$$

$$l_4 \equiv y = 0, l_5 \equiv y - 1 = 0, l_6 \equiv cy + 2 = 0, \text{ where } q^2 - 4p < 0.$$

Configuration B3) $(1r+2c; 1r+2c)$. The system (1.3) can be brought to the form 11) of the Main Theorem and it has the following invariant straight lines:

$$l_1 \equiv x = 0, l_2 \equiv x + \frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} = 0, l_3 \equiv x + \frac{q - \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} = 0, l_4 \equiv y = 0,$$

$$l_5 \equiv y + \frac{s + \sqrt{s^2 + 8r}}{2r} = 0, l_6 \equiv y + \frac{s - \sqrt{s^2 + 8r}}{2r} = 0, \text{ where } q^2 - 4p < 0, s^2 + 8r < 0$$

Configuration B4) $(3(2)r; 1r+2c)$. In this case the system (1.3) can be written:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(ax+by-1), \\ \dot{y} = y(py^2+qy-2), \end{cases} \quad q^2 + 8p < 0. \quad (4.8)$$

The polynomial $E(X)$ has the form

$$E(X) = xy(x-1)(py^2 + qy - 2)(A_2(y) + A_3(y)(x-1)),$$

where

$$A_2(y) = 1 - a^2 + (2b - 2ab - 2q + 2aq)y + (3ap + bq - b^2 - 3p)y^2 + 2bpy^3.$$

The straight line $x-1=0$ will have the multiplicity two only if $A_2(y)$ is identically zero, and this will be realized when $b=0, a=1$. In this condition, the system (4.8) has the form 12) of the Main Theorem having the following invariant straight lines:

$$l_1 \equiv x=0, l_{2,3} \equiv x-1=0, l_5 \equiv y=0, l_5 \equiv y + \frac{q + \sqrt{q^2 + 8p}}{2p} = 0, l_6 \equiv y + \frac{q - \sqrt{q^2 + 8p}}{2p} = 0.$$

Configuration B5) ($1r+2c ; 3(2)r$). We write the system (1.3) as follows:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(px^2 + qx + 1), & q^2 - 4p < 0, \\ \dot{y} = y(y-1)(cx + dy + 2). \end{cases} \quad (4.9)$$

The polynomial $E(X)$ for (4.9) has the form

$$E(X) = xy(y-1)(px^2 + qx + 1)(A_2(x) + A_3(x)(y-1)),$$

where

$$A_2(x) = 2 + 3d + d^2 + (4c + 2cd - 4q - 2dq)x + (c^2 - 6p - 3dp - cq)x^2 - 2cpx^3.$$

The expression $A_2(x)$ will be identically zero if the condition $c=0, d=-2$ is fulfilled. Thus, the system (4.9) has the form 13) from the Main Theorem. The system has the following invariant straight lines:

$$l_1 \equiv x=0, l_2 \equiv x + \frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} = 0, l_3 \equiv x + \frac{q - \sqrt{q^2 - 4p}}{2p} = 0, l_4 \equiv y=0, l_{5,6} \equiv y-1=0.$$

Configuration B6) ($1r ; 1r+4(2,2)c$). The system (1.3), which admits the configuration **B6)**, is the system 14) from the Main Theorem, obtained in Section 2.5.

Configuration B7) ($1r+4(2,2)c ; 1r$). The system having the configuration of the invariant straight lines **B7)** was determined in Section 2.4. It represents the system 15) from the Main Theorem.

References

- [1] Chen X., J. Giné, Romanovski V.G. and Shafer D.S. *The 1: -q resonant center problem for certain cubic Lotka-Volterra systems*, Appl. Math. Comput. **218** (2012), 11620-11633.
- [2] Christopher C., Llibre J. and Pereira J.V. *Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields*. Pacific J. of Math. **229**(2007), no.1, 63-117.
- [3] Christopher C. and Rousseau C. *Normalizable, integrable and linearizable saddle points in the Lotka-Volterra system*, Qual. Theory Dynam. Syst. **5** (2004), no. 1, 11-61.

- [4] Darboux G. *Mémoire sur les equations différentielles algébriques du premier ordreet du premier degré*. Bull. Sci. Math.**2**(1878), 60-96, 123-144, 151-200.
- [5] Dolićanin D., Giné J., Oliveira R. and Romanovski V.G. *The center problem for a $2 : -3$ resonant cubic Lotka-Volterra system*. Appl. Math. Comput.**220** (2013), 12-19.
- [6] Ferćec B., Giné J., Liu Y. and Romanovski V.G. *Integrability conditions for Lotka-Volterra planar complex quartic systems having homogeneous nonlinearities*. Acta Appl. Math.**124** (2013), no. 1, 107-122.
- [7] Fronville A., Sadovskii A.P. and Zoladek H. *Solution of the $1 : -2$ resonant center problem in the quadratic case*, Fund. Math. 157 (1998), 191-207.
- [8] Giné J., Christopher C., M. Prešern M., Romanovski V.G. and Shcheglova N.L. *The resonant center problem for a $2 : -3$ resonant cubic Lotka-Volterra system*, CASC 2012, Maribor, Slovenia, September 3-6, 2012. Lecture Notes in Computer Science **7442** (2012), 129-142.
- [9] Giné J. and Romanovski V.G. *Linearizability conditions for Lotka-Volterra planar complex cubic systems*. J. Phys. A, Math.Theor. **42** (2009), no. 22, 225-206.
- [10] Giné J. and Romanovski V.G. *Integrability conditions for Lotka-Volterra planar complex quintic systems*, Nonlinear Anal. Real World Appl. **11** (2010) 2100-2105.
- [11] Gravel S. and Thibault P. *Integrability and linearizability of the Lotka-Volterra system with a saddle point with rational hyperbolicity ratio*. J. Differential Equations **184**(2002), 20-47.
- [12] Liu C., Chen G. and Li C. *Integrability and linearizability of the Lotka-Volterra systems*. J. Differential Equations**198** (2004), no. 2, 301-320.
- [13] Liu C., Chen G. and Chen G. *Integrability of Lotka-Volterra type systems of degree 4*. J. Math. Anal. Appl. **388** (2012), no. 2, 1107-1116.

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА ЯЗЫКОВ ЛОГИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Сергей ПЕЛИН, Университет прикладных знаний Молдовы (UȘAM),

Николай ПЕЛИН, Тираспольский Государственный Университет (UST),

Rezumat. În articol sunt analizate elementele logicii, care sunt puse la baza unui deductor automat de interpretare a programelor computaționale scrisă în logică, adică deductor cum în realitate și este interpretorul limbajului de programare Prolog. Sunt descrisă pas cu pas: restricțiile față de disjuncții a formei conjunctiv normale cărei poate fi aplicat efectiv principiu de rezoluție; rezoluția și unificarea gestionate în conformitate cu o strategie fixă de cautare a soluției; condiția stabilită apriori pentru alegerea disjuncțiilor din care să retrage rezolventa în prim pas și în pașii ce urmează în continuare până la interpretarea deplină a formulei logice (program scris în Prolog) și obținerii unui rezultat în formă acceptabilă pentru utilizator. Se face analiza unor funcții a produsului SPprolog – sistem pentru proiectări în Prolog cu suport inteligent pentru instruire și consultare ce ține de lucrul cu sistemul și limbajul de programare în logică.

Abstract. In this article are analyzed logic theory elements, which formed the basis of logic programming interpreter, i.e. interpreter of Prolog logic programming language. Step by step are described: requirements to the disjuncts of conjunctive normal form, where a resolution principle can be effectively applied; resolution and unification controlled in accordance with a specific decisions search strategy; established a priori condition of disjuncts selection for resolvents extraction, on the first and succeeding steps the resolution process, up to the full interpretation of logical formula (program written in Prolog language) and obtaining a result in the form acceptable for the user. Are described some core functions of SPprolog – a developing environment that represents means for developing applications in Prolog supported by the intellectual training system which provides training for working with the system and logic programming language.

Резюме. В статье проводится анализ элементов логики, которые легли в основу интерпретатора логических программ, т.е. интерпретатора языка логического программирования Пролог. Шаг за шагом описаны: требования предъявляемые к дизъюнктам конъюнктивно-нормальной формы к которой эффективно можно применить принцип резолюции; резолюция и унификация управляемые в соответствии с конкретной стратегией поиска решений; априорно установленным условием для выбора дизъюнктов для извлечения резольвент на первом и последующих шагах резолютивного процесса вплоть до полной интерпретации логической формулы (программы написанной на языке Пролог) и получения некоторого результата в приемлемой для пользователя форме.

Ключевые слова: интерпретатор, резолюция, дизъюнкты Хорна, язык Пролог

Элементы теории

Вводные замечания. Известно [1-7], что логическая программа, представляющая собой совокупность дизъюнктов Хорна, описывающая ситуацию реального мира, может быть проинтерпретирована с помощью логического интерпретатора, обеспечивающего работу соответствующего механизма вывода. Элементы теории, на основе которых строятся такого рода механизмы, рассмотрим ниже.

В статье [9], опубликованной выше в этом журнале, как и в [14], мы довольно много внимания уделили теории и практике логического программирования. Мы ввели соответствующие представления о конъюнктивно-нормальной форме (КНФ). Проверить КНФ на выполнимость (т.е., когда формула, по крайней мере, один раз может быть интерпретирована со значением *ИСТИНА*) можно, но это не всегда эффективное занятие. Все же есть удобный метод для выявления невыполнимости множества дизъюнктов. Мы знаем, что множество дизъюнктов невыполнимо тогда и только тогда, когда пустой дизъюнкт L является логическим следствием из него. Невыполнимость множества S можно проверить, порождая логические следствия из S до тех пор, пока не получим пустой дизъюнкт. Этот механизм эффективно реализуется с помощью, так называемого, правила резолюции, одного из важнейших аспектов механизма вывода в логическом программировании.

Правило резолюций. Рассмотрим следующую схему рассуждений. Имеем формулы

$$(p \vee q) \text{ и } (\neg q \vee r).$$

Допустим, что они истинны. Тогда, если q истинно, то r тоже истинно. Если q ложно, то p – истинно. При любом значении q формула $(p \vee r)$ – истинна. Представим изложенное правило в виде тавтологии, обозначаемой \models , а приведенные выше формулы в теоретико-множественном представлении. Тогда:

$$\{p \vee q, \neg q \vee r\} \models p \vee r.$$

В случае, когда q высказывание (атомарная формула), а p и r дизъюнкты, это правило называется правилом резолюции. Выражение $p \vee r$ называют резольвентой формул

$$(p \vee q) \text{ и } (\neg q \vee r).$$

Способы доказательства невыполнимости формул на основе метода резолюций дают возможность использовать средства автоматического доказательства, применяемые в логическом программировании.

Свойство завершаемости метода резолюций. Конечное множество S невыполнимо тогда и только тогда, когда пустой дизъюнкт может быть выведен из S с помощью резолюций. Пустой дизъюнкт невыполним. Он не может быть логическим следствием из выполнимого множества дизъюнктов. Если множество дизъюнктов S невыполнимо и содержит резольвенты своих элементов, то оно обязательно содержит пустой дизъюнкт. Факт невыполнимости формулы всегда можно установить методом резолюций.

Нет достаточно эффективного критерия для проверки выполнимости КНФ. Однако возможность констатации того, что множество дизъюнктов S невыполнимо тогда и только тогда, когда пустой дизъюнкт L является логическим следствием из этого множества, все же дает возможность проверки невыполнимости S , порождая

логические следствия из S до тех пор, пока не будет получен пустой дизъюнкт. Так мы пришли к методу резолюций.

Далеко не во всех случаях этот метод эффективен. Однако есть специальное множество дизъюнктов, для которых применение резолюции весьма эффективно. В общем случае, это когда в каждом из дизъюнктов множества содержится не более одной литеры одного знака и этот знак сохраняется одним и тем же для всех дизъюнктов множества, а все остальные литеры в каждом из дизъюнктов имеют противоположный знак. Такой дизъюнкт назван хорновским.

Алгоритм проверки выполнимости множества хорновских дизъюнктов. Если множество хорновских дизъюнктов S не содержит тавтологий, то алгоритм проверки аналогичен алгоритму проверки для КНФ. Если $L \notin S$ и p – унитарный позитивный дизъюнкт из S , а c – дизъюнкт из S , содержащий $\neg p$, то вычисляем резольвенту r и заменяем S на $(S \setminus \{c\}) \cup \{r\}$.

Но отличие все же есть. Здесь на каждом этапе некая литера удаляется из одного дизъюнкта [3, с. 46-47]. Дизъюнкт r – не что иное, как дизъюнкт c , из которого удалена литера $\neg p$. Следовательно, выполнение алгоритма завершается всегда, независимо от принятой стратегии при выборе p и c . Если N – число литер, первоначально присутствующих в S (с учетом повторений), то цикл будет выполняться не более N раз.

Алгоритм может закончиться либо порождением пустого дизъюнкта, либо получением множества S , уже не содержащее дизъюнктов, равных p и c . Первый исход означает невыполнимость множества S , второй – множество S обязательно выполнимо. Любое конечное выполнимое множество хорновских дизъюнктов допускает одну и только одну минимальную модель [3, с. 48-49]. Как известно моделью формулы называют случай, когда эта формула может быть интерпретирована со значением *Истина*. Нахождение минимальной модели означает, что истинными считаются только явно сформулированные факты (высказывания) и логические следствия, получаемые из них согласно правилам. Это положение соответствует гипотезе «замкнутого мира», широко используемой в области баз данных.

Правило резолюции в логике предикатов. Правило резолюции в логике предикатов работает следующим образом [1, с. 55-56]. Две фразы могут быть резольвированы друг с другом, если одна из них содержит позитивную литеру, а другая – соответствующую негативную литеру, с одним и тем же обозначением предиката (предикатной константой) и одинаковым количеством аргументов (термов), и, если аргументы у обеих литер могут быть согласованы (унифицированы) друг с другом.

Рассмотрим две фразы:

$$P(a) \vee \neg Q(b,c)$$

$$Q(b,c) \vee R(b,c)$$

Здесь в первой фразе содержится негативная литера $\neg Q(b,c)$, а во второй фразе позитивная литера $Q(b,c)$, аргументы обоих литералов могут быть унифицированы, т.е. b унифицируется с b , а c унифицируется с c . Следовательно, эти фразы могут быть резольвированы друг с другом. В результате получается третья фраза: $P(a) \vee R(b,c)$.

Эта фраза называется резольвентой и включается в множество фраз, в которое до этого момента входили только первые две фразы. При выполнении последующих резолюций можно воспользоваться любой из фраз этих фраз.

Унификация. Суть унификации в следующем. Два атома унифицируемы, если:

- они построены из одной предикатной константы, примененной к попарно унифицируемым термам (здесь достаточно рассмотреть унификацию двух термов);
- один из них – переменная, в этом случае получается мгновенная унификация;
- два терма построены из одной и той же функциональной константы, примененной к попарно унифицируемым термам.

Получается (рекурсивный) алгоритм унификации – очень простой и линейной сложности относительно числа термов.

Если один из термов переменная x , а другой терм содержит x , но не сводится к x , то в этом конкретном случае унификация невозможна. Систематическая проверка не вхождения некоторой переменной в терм, подлежащий унификации с этой переменной, приводит к неэффективному алгоритму. Все же средство для решения проблемы можно найти. В логическом программировании проверку не вхождения часто опускают.

Используя унификацию, можно распространить алгоритм резолюций на исчисление предикатов.

Унификация переменной с константой. Если в одной из фраз в качестве аргумента выступает переменная, то она унифицируема с соответствующей константой другой фразы, а резольвента будет содержать эту константу на том месте, где рассматриваемая переменная располагалась в исходной фразе. Например, фразы:

$$P(a,b) \vee \neg Q(b,c)$$

$$Q(x,y) \vee R(x,y)$$

резольвируемы, т.к. предикатная константа Q связана с одинаковым числом аргументов в обеих фразах. При этом переменная x унифицируется с константой b , а переменная y унифицируется с константой c . В полученной резольвенте

$$P(a,b) \vee R(b,c)$$

переменные, служившие аргументами для R , заменены на константы.

Принцип логического программирования.

Концепция. Если использовать подходящую стратегию выбора, то метод резолюций становится хорошим средством для проверки выполнимости множества хорновских дизъюнктов в логике предикатов.

Принцип логического программирования заключается в том, что алгоритмические свойства некоторой функции можно представить множеством дизъюнктов и использовать метод резолюций для вычисления значений этой функции.

Автоматический решатель задач, базирующийся на принципе резолюций, может выполнить алгоритм, описанный набором хорновских дизъюнктов.

В языке программирования Пролог принцип резолюции - основа его работы.

Нисходящая стратегии решения задач при использовании правила резолюции.

При использовании правила резолюции выбираются разные стратегии решения задач. Рассмотрим одну из них, называемую нисходящей или обратной стратегией [1, с.57-59]. В этой стратегии ставится цель обнаружить, является ли единственная фраза P следствием существующего множества фраз Q . Название нисходящей эта стратегия получила из-за того, что процесс решения задачи (первая резолюция) начинается с отрицания заключения (дизъюнкта цели) и затем это отрицание унифицируется (сопоставляется) с фактом или правилом (унитарным или точным хорновским дизъюнктом). Полученная резольвента должна участвовать в следующей резолюции и так продолжается до тех пор, пока не будет выведен пустой дизъюнкт. Такую стратегию называют «поиском в глубину» из-за того, что результат последней резолюции всегда используется в следующей за ней резолюции.

Пример резолюции нисходящим методом. Пусть имеется множество фраз (дизъюнктов) [1, с. 58-59]:

1. $p(a) \vee \neg q(a, b)$.
2. $q(x, y) \vee \neg r(x, y)$.
3. $s(b)$.
4. $r(a, b)$.

Требуется выяснить, является ли фраза $p(a)$ следствием существующего множества фраз. Для начала добавим к первым четырем фразам отрицание фразы $p(a)$, которая в контекстно-свободной грамматике записывается в следующем виде:

5. $\neg p(a)$.

Далее выполняем первую резолюцию с обязательным использованием только что добавленной фразы под номером 5. Унифицируется первая же фраза. Получаем резольвенту:

6. $\neg q(a, b)$.

Далее унифицируем резольвенту b с фразой под номером 2.

Получаем следующую резольвенту:

7. $\neg r(a, b)$.

Затем 7 с 4 (фраза 3 не унифицируется). Получаем пустую фразу, а это означает, что обнаружено противоречие. Так как добавленная к множеству фраз фраза $\neg p(a)$ приводит к противоречию, то $p(a)$ является следствием множества фраз.

Об эффективности стратегий решения. Принцип резолюции представляет большой интерес так как непосредственно находится во взаимосвязи с вопросами “автоматического доказательства”. Однако в поиске эффективной стратегии решения для всех областей приложения приводит к выводу: для заданного набора фраз доказательство на компьютере получается либо очень быстро, либо оно не получается вовсе [8, с. 173-174]. Эффективность программ падает с увеличением числа фраз. Проблема заключается в том, чтобы определить тот момент, когда надо остановить программу, потому что при этом возникают две опасности:

1. лавинообразное увеличение числа предложений;
2. риск преждевременного прекращения работы перед самым моментом получения решения.

Интерпретация логических программ

Абстрактный интерпретатор логических программ. Абстрактный интерпретатор, описанный в [7, с. 21-23], выполняет вычисления с ответами *Истина/Ложь*. Он получает программу P и основной вопрос Q и дает ответ *Истина*, если Q выводимо из P и ответ *Ложь* в противном случае. Если цель не выводима, то интерпретатор вообще не завершает работу и не выдает никакого ответа.

Демонстрация работы интерпретатора:

Вход: *Основной вопрос Q и программа P .*

Результат: *Истина, если найден вывод Q из программы P ,*

Ложь в противном случае.

Алгоритм: *Положить резольвенту равной Q .*

Если Q не пуста то она резольвируется с элементом из P .

Полученная резольвента Q_1 если не пуста, то она резольвируется с следующим элементом из P до их полного перебора.

Если резольвента Q_k -пуста, то результат –И, иначе результат - Л.

Механизмы управления, заложенные в интерпретатор логических программ.

Руководство исполнением логических программ осуществляется механизмами управления, заложенного в интерпретатор. Программист же может оказывать влияние на общий ход исполнения программы, устанавливая, например, последовательность вычислений.

Логические программы недетерминированы, т.е. в них отсутствуют факты, точно определяющие ход исполнения программы. Это обстоятельство вынуждает интерпретатор осуществлять поиск для того, чтобы не пропустить ни одного решения. Нужна стандартная стратегия поиска (дерево поиска), которое интерпретатор строит для того, чтобы, имея программу, произвести конкретные вычисления. Дерево поиска просматривается по методу «поиска в глубину» [2, с.95]. Механизм поиска представлен на рис.4.

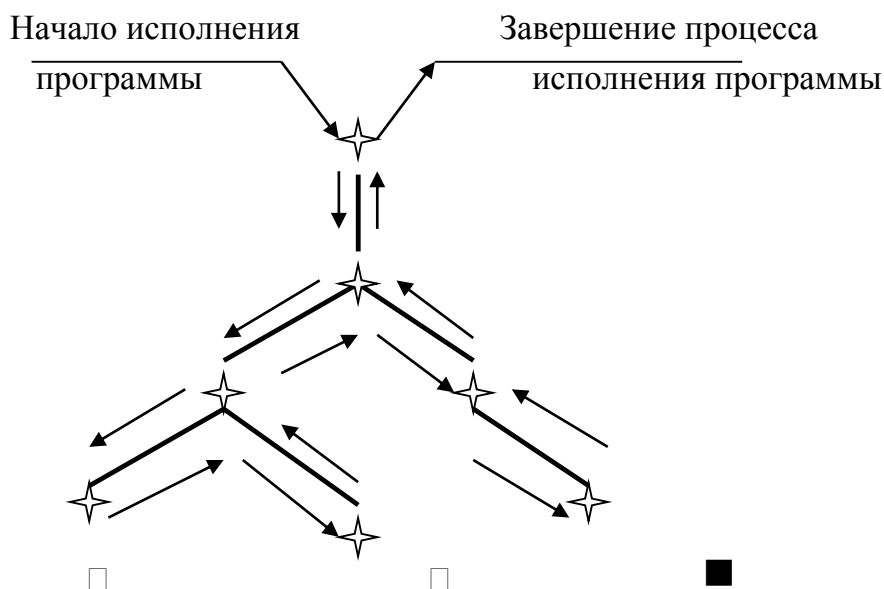


Рис. 4. Поиск в глубину.

Интерпретатор строит вычисления, начиная с корня дерева вычислений, затем продвигается вниз, по выходящей из корня ветви до тех пор, пока не достигает очередной конечной вершины (до получения пустого дизъюнкта □) или последней вершины ■. Если достигается некоторая вершина □, то интерпретатор может извлечь ответ и сообщить о нем устройству вывода. Об интерпретаторах, управляемых такой стандартной стратегией, иногда говорят, что они осуществляют поиск «слева направо в глубину с возвратом».

Оператор отсечения дополняет стандартную стратегию для удаления нежелательных вычислений, и отчасти и поэтому интерпретаторы не могут использовать в полной мере резолюцию [4, с. 73] .

В некоторых интерпретаторах имеются средства для «контроля за цикливанием», которые пытаются распознать бесконечные вычисления.

Исполнение программ логическим интерпретатором. Интерпретатор представляет собой программу, способную строить резолютивные выводы, как правило, методом «сверху вниз, слева направо». Логическая программа начинает исполняться после ее подачи на вход логическому интерпретатору [4, с.55]. Получив входную логическую программу, интерпретатор предпринимает обычные шаги, необходимые для исполнения программы в режиме интерпретации:

1. Осуществляет синтаксический контроль входных утверждений;
2. Хранит их в центральной памяти в соответствующей упрощенной, компактной и доступной форме;
3. Переводит входное целевое утверждение во внутреннее представление и затем начинает процесс построения вывода путем последовательного применения правила резолюции к текущему целевому утверждению (вопросу) и некоторой родительской процедуре (к факту или правилу), выбираемой из хранящейся в памяти версии входной программы.

Если интерпретатору удастся вывести пустое отрицание \square , означающее, что решение получено, то он выдает какое-либо сообщение об этом вместе с найденными значениями целевых переменных.

Исполнение программ в режиме интерпретации. Исполнение программ в режиме интерпретации иницируются и управляются интерпретатором [4, с. 227]. Программа – интерпретатор осуществляет доступ к двум важным областям данных, расположенных в памяти компьютера:

1. статическая (или входной массив данных) область данных, в которой содержится закодированная версия входной логической программы, не подвергается изменениям в течение всего периода исполнения;
2. Динамическая (или стек исполнения) область, которая используется интерпретатором для ведения протокола собственных действий.

В стеке представлены состояние управления исполнением программы интерпретатором и состояние данных (каким переменным, какие значения присвоены в текущий момент времени).

Предположение о замкнутости мира. Предположение о замкнутости мира заложено в механизм интерпретации входной программы, написанной на Прологе [1, с.70-71]. Пролог действует так, как будто бы множество фраз текущей программы является единственным источником знаний. Если запрос терпит

неудачу, то это означает, что интерпретатор не смог выполнить его доказательство по множеству фраз, входящих в текущую программу.

Интерпретатор Пролога исходит из предположения, что если соблюдение некоторого конкретного случая отношения доказать нельзя, то это случай отношения является ложным. Здесь не делается отличие между неизвестным отношением и отношением, неистинность которого доказуема.

«Чистый Пролог». Программа на «чистом Прологе» – это логическая программа, в которой задан порядок фраз и целевых утверждений. Абстрактный интерпретатор построен так, чтобы использовать информацию о заданных порядках [7, с.80-81]. Логическая программа, реализованная в виде фраз (дизъюнктов) Хорна с использованием заданного алфавита и синтаксиса совместно с интерпретатором этой программы описанным выше вполне можно считать формальной системой в смысле [6, с. 81].

Логические программы, исполняемые с помощью вычислительной модели Пролога, называются программами на «чистом Прологе». «Чистый Пролог» представляет собой приближенную реализацию вычислительной модели логического программирования на последовательной машине.

Методологические аспекты изучения логического программирования.

Некоторые наблюдения. Как видим из вышеизложенного логическое программирование как теория достаточно проста. Однако, как показывает практика преподавания логического программирования в ряде университетов Республики Молдова и Румынии, а также преподавание его на соответствующих курсах вне университетской программы [13], осмысление учебного материала приходит медленно, приобретаемые навыки для практического программирования на языке Пролог не достаточно высоки. По нашему убеждению связано это, прежде всего, с неправильным подходом к преподаванию курса информатики еще в школе. Как отмечается в [5], лучший результат получается при изучении вначале основ и техники логического (декларативного) программирования и уж затем переходить к изучению алгоритмического (процедурного) программирования. Однако исторически сложилось иная ситуация и сейчас приходится искать эффективные методы преподавания и варианты технических решений, которые способствовали уменьшению «алгоритмического эффекта» в мышлении обучаемого, повысило бы результативность для начинающих, предоставили бы новые возможности как для традиционного, так и для дистанционного обучения через Интернет, а также для самообучения.

Нами разработаны ряд методов и средств, которые призваны улучшить методику преподавания прежде всего курсов связанных с теорией и практикой логического

программирования. Это прежде всего система SPprolog, более подробно описанная одним из авторов в [9], метод структуризации знаний с помощью так называемой «матрицы элементов знаний» [11, 12] и так называемая система UŞAM SOFT «QUEST» предназначенная для самообучения и обучения, автоконтроля и контроля знаний. Из-за наличия ограничений по объему статьи, дадим лишь некоторые представления о системе SPprolog.

SPprolog - это комплексная система, позволяющая разрабатывать программные приложения на языке логического программирования Пролог, в сопровождении интеллектуальной обучающей системы, обеспечивающей обучение, как работе с системой так и, языку логического программирования.

Под интеллектуальной обучающей системой подразумевается комплекс средств и мер который включает:

- интеллектуальный, мультимедийно-интерактивный интерпретатор языка логического программирования, который позволяет доступно и наглядно провести детальную визуальную интерпретацию программы, графически выделить соответствующие фрагменты программы, обеспечивающих реализацию конкретных процедур и механизмов (бэктрейнинг, рекурсивные правила, арифметические, логические и иные операции языка логического программирования), снабдить выделенные фрагменты необходимыми текстуальными разъяснениями по сути протекаемых в них процессов, применяя аудиовизуальные эффекты для повышения уровня восприятия материала;
- автоматизированный режим «Совет Эксперта», основанный на экспертных знаниях о «культурном», эффективном и оптимизированном программировании, а также знаниях о языке и теории, на которых основывается этот язык логического программирования, об основных проблемах, возникающих при изучении языка. Данный режим по ходу написания программы «подскажет» программисту о появляющихся ошибках или о вариантах написания более эффективного кода; «предложит» список доступных предикатов, которые можно применить в соответствующем месте программы; «предложит» типовой вариант решения некоторой задачи и «разъяснит» принцип работы программы, реализованной по этому варианту. В случае каких-либо затруднений режим «Совет Эксперта» идентифицирует соответствующую процедуру или механизм, по которым у программиста нет полной ясности и «предложит» для консультаций нужный участок в электронном учебном пособии.
- электронный курс языка программирования Пролог, представляемого в виде «матрицы элементов знаний» [12] и снабженный системой последовательного (запрограммированного преподавателем) воспроизведения знаний для самообучения и контроля.

- ускоренный курс обучения языку и системе SPprolog, основанный на запрограммированном, последовательном наборе действий (actions), позволяющий используя предыдущие два механизма системы наглядно и точно разъяснить основные принципы работы системы и языка пролог.

Также одной из основных особенностей системы SPprolog относится функционально расширенная (по сравнению с существующими системами) среда разработки программ на языке Пролог, с многофункциональным редактором кода, автоматизированной системой организации персональных элементов программирования (toolbox).

Система SPprolog может быть использована теми кто проявляет интерес к логическому программированию: при обучении и самообучении, при традиционном и дистанционном обучении, а также при повседневном занятии программированием как видом профессиональной деятельности. Она может использоваться в разных образовательных учреждениях (школах, вузах, на специализированных курсах) обучаемыми - как среда для разработки программ и наглядного понимания результатов составленной программы, как экспериментальная среда при изучении того или иного механизма языка, как техническое средство обучения - преподавателями в процессе объяснения различных механизмов и приемов или в процессе объяснения принципа работы некоторой программы.

Однако предполагается, что основной успех данной системы должен быть именно в процессе самообучения языку логического программирования, так как система сама «расскажет» и «объяснит» новую тему по заложенному плану (по запрограммированным действием); предложит необходимые примеры, подробно и наглядно объяснит принцип их работы, а в процессе самостоятельного составления программ заменит «опеку» преподавателя – ценными и своевременным советами из заложенной экспертной системы.

Заключение

В статье дан обзор элементов теории, на основе которых построен механизм логического вывода заложенного в интерпретаторах языка логического программирования Пролог. На основе проведенного анализа литературы, результатов проведенных исследований высказывается мнение о необходимости пересмотра программы учебного курса по информатике в лицеях и высших учебных заведениях с целью введения соответствующего раздела, посвященного декларативному программированию и программированию в логике, в частности. Проводится описание основных характеристик SPprolog, разработанной одним из авторов [10] комплексной системы, позволяющей проектировать программные приложения на языке логического программирования Пролог, в сопровождении

интеллектуальной обучающей системы, обеспечивающей обучение и самообучение как работе с системой так и, языку логического программирования.

Литература

1. Малпас Дж. Реляционный язык Пролог и его применение: Пер. с англ. Под. Ред. В.Н. Соболева – М.: Наука. Гл. ред. Физ.- мат.лит., 1990-464 с.
2. Ковальски Р. Логика в решении проблем: Пер. с англ. – М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1990. – (Пробл. искусств. интеллекта) - 280 с.
3. Тей А., Грибомон П., Луи Ж. и др. Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию. Пер. с франц. Пермякова П.П. Под. ред. Гаврилова Г.П. – М., «Мир», 1990 – 432 с.
4. Хоггер К. Введение в логическое программирование: Пер. с англ. М: -Мир, 1998-348 с.
5. Колмероз А., Кануи А., М. ван Канегем. Пролог- теоретические основы и современное развитие. В сб.: Логическое программирование. – М.: Мир, 1988, с.27-133.
6. Лорьер Ж.-Л. Системы искусственного интеллекта: Пер.с франц.- М.: Мир, 1991-568 с.
7. Стерлинг Л., Шапиро Э. Искусство программирования на языке Пролог: М., Мир, 1987.
8. Алексеев М. Совершенствование методики построения образовательного ВЕБ-сайта. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук, Москва, 2001 г.
9. Пелин Н., Пелин С. Вопросы теории и практики логического программирования. Статья в этом же номере журнала.
10. Pelin S. Work optimisator and intellectual assistant for Prolog development environment. Proceedings of the International Conference "Knowledge management: Projects, Systems and Tehnologies". Volume I, november 9-10, 2006, Bucharest. The 2nd supliment of the review INFORMATICA ECONOMICA. Volume X, ISSN 1453-1305, pag. 185-190.
11. Pelin N., Pelin S., Pelin A. "The matrix of knowledge elements" effective tehnlogy for knowledge management. Proceedings of the International Conference "Knowledge management: Projects, Systems and Tehnologies". Volume I, nofember 9-10, 2006, Bucharest. The 2nd supliment of the review INFORMATICA ECONOMICA. Volume X, ISSN 1453-1305, pag. 63-71.
12. Pelin N., Pelin S., Pelin A. The problems of knowledge structure defining, activation an usage. The Proceedings of the EICHT International Conference on Informatics in

Economy. Informatics in Knowledge Society. Bucharest, may 17-18, 2007, ISBN 978-973-594-921-1, pag. 749-755.

13. Pelin N. Studiarea programarii logice in Moldova. Anuale stiintifice ale doctoranzilor si competitorilor «Probleme actuale ale stiintelor umanistice». Universitatea Pedagogica de stat "Ion Creanga" Vol. I. Chisinau, 1996, pag. 69-73.
14. Pelin S., Pelin N. Deducția logică – mecanism de calcul al limbajului de programare logică. Studia universitatis. Revistă științifică. Științe exacte. Nr. 8. CEP USM. Ch.: 2008.- pp. 110 -116.
15. www.prolog.md

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ ЛОГИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

Николай ПЕЛИН, Тираспольский Государственный Университет (UST),

Сергей ПЕЛИН, Университет прикладных знаний Молдовы (UŞAM),

Abstract. În articol sunt descrisă etapele de dezvoltare a teoriei și practicii aplicării programării logice. Atenție sporită este acordată disjuncțiilor lui Horn, care direct pot fi considerați în calitate de părți componente a unor programe computaționale prezentate în logică. Este descrisă sintaxa și procesul de retransformare formulei logice de la o formulă atomară pînă la un model logic a lumii reale și prezentarea lui (modelului) într-o formă conjunctiv-normală care, în calitate de componente conține numai mulțimea disjuncțiilor lui Horn. Forma obținută a formulei logicii predicatelor deja poate fi interpretată prin intermediu unui motor de inferență cum este, de exemplu, interpretorul limbajului Prolog.

Abstract. In this review paper a development stages of logic programming theory and practice of usage are analyzed. Special attention is paid to the Horn clause, which formed the basis of computer programs written in logic. The syntax and step by step transformation analysis is described, starting from atomic formula of predicate logic to the logical model of the real world, presented in Conjunctively-normal form and consisting of Horn clause set only. This set is almost the real program code written in the Prolog - the logic programming language. It is mentioned that the resulting form is interpreted by the inference engine, which is for example, the interpreter of Prolog programming language.

Резюме. В обзорной работе проанализированы этапы развития теории и практика использования логического программирования. Особое внимание уделено дизъюнктам Хорна, которые легли в основу компьютерных программ написанных в логике. Описывается синтаксис и проводится пошаговый анализ преобразований от атомарной формулы логики предикатов до логической модели реального мира, представленной в конъюнктивно-нормальной форме и состоящей только из множества дизъюнктов Хорна. Это множество практически и есть текст реальной программы написанной на языке логического программирования Пролог. Отмечается, что полученная форма интерпретируема с помощью механизма логического вывода, каковым, к примеру, является интерпретатор языка Пролог.

Ключевые слова: логика, логическое программирование, дизъюнкты Хорна, язык Пролог

Введение

В XIX веке появился первый формальный язык логики - исчисление высказываний, а несколько позднее более развитый язык – исчисление предикатов. Таким образом, логику Аристотеля, тесно связанную с естественным языком, для решения ряда задач требующих полной формализации, удалось несколько отодвинуть на второй план.

В рамках этих формализмов идеи Робинсона, Ковальского ряда других, преимущественно британских ученых и специалистов, в 60-е годы прошлого столетия заложили основы теории логического программирования. А вот первая версия языка логического программирования Пролог разработана французом Аленом Колмероо, лингвистом по специальности. В 1971 году, в Марселе он продемонстрировал работу первого интерпретатора языка программирования

Пролог. Само название языка Пролог образовано соединением первых трех букв каждого из слов словосочетания "ПРОграммирование ЛОГическое". Отождествлять язык Пролог с самим Логическим программированием не следует. Пролог - лишь малая часть теории логического программирования, нашедшая в таком виде свое практическое применение.

Итак, что представляет собой логическое программирование как теория. В основе языка логического программирования лежат элементы логики. Программа, написанная на таком языке, представляет собой множество дизъюнктов (фраз) Хорна. Процесс вывода умозаключения на основе некоторых предпосылок называют логическим выводом. В нем класс предикатов одного суждения согласуется с классом субъектов другого суждения. В ходе вывода на основе субъекта одного суждения и предиката другого суждения формируется новое суждение. Таким образом, логический вывод можно определить и как некий процесс рассуждения.

В данной статье, как и в работе [13], мы ограничимся рассмотрением лишь элементами теории языка логического программирования. Логическое программирование - это универсальный, абстрактный язык, предназначенный для представления знаний и решения задач. Это один из подходов к информатике, при котором в качестве языка высокого уровня используется логика предикатов первого порядка (ветвь формальной логики) в форме фраз Хорна [1, с.17].

Пролог более приспособлен для решения задач искусственного интеллекта. Однако считать его таковым, в смысле единственности, было бы неверно. ЛИСП имеет не меньшую известность в сфере искусственного интеллекта. Пролог достаточно хорошо приспособлен и к решению других задач, и все это делает его весьма привлекательным и перспективным. Все же, его изящность при построении элементов систем искусственного интеллекта не удержала авторов монографий [2,3] от желания обратить внимание читателей даже в названиях своих книг на то, что Пролог - язык искусственного интеллекта.

Язык программирования Пролог привлекателен своей простотой. Пролог – программу легко читать. Универсальные формализмы фраз Хорна, меньше подвергают текст Пролог – программ влиянию машинно-зависимых особенностей, нежели программы, написанные на других языках [1, с.18].

В настоящее время Пролог - широко известный язык. Над развитием Пролога работают известные научные центры и крупнейшие компании мира, среди которых Ассоциация Логического Программирования (Лондон) [14], Центр Развития Пролога (Копенгаген) [15] и другие [16].

При использовании языка логического программирования основное внимание уделяется описанию структуры прикладной задачи, а не выработке предписаний

компьютеру о том, что ему следует делать. С помощью логических программ можно описать и реализовать также реляционные базы данных, задачи программной инженерии и представления знаний. На Прологе можно реализовать и многие другие задачи, – вопрос стоит только в степени эффективности и целесообразности. Язык программирования навязывает пользователям определенный взгляд на окружающий мир. Это проявляется в том, что программист, длительное время пользующийся некоторым языком и усвоивший соответствующий этому языку взгляд на мир, будет стремиться находить новые сферы применения для тех типов вычислений, к которым данный язык приспособлен, и будет избегать задач, для решения которых этот язык не годится. Целесообразно оценить взгляды на мир, навязываемые различными языками программирования, в соответствии с тем, насколько хорошо они согласуются с поставленными целями. Данные рассуждения относятся к мета программной инженерии: задана цель программирования - следует определить, какие языки и программные средства наилучшим образом удовлетворяют ей [1, с.13].

О логическом программировании как теории

Как уже отмечалось выше, логическое программирование зародилось в недрах формальной логики и без некоторых важных элементов логики высказываний и логики предикатов нам не обойтись.

Логика высказываний – простая теория, но она широко используется в разных областях. Она лежит в основе практически любой логико-математической теории, ее простота не препятствует быть высоко содержательной и широко применимой для задач как теоретического, так и прикладного характера. Информатикам необходимо особо старательно отнестись к изучению логики, чтобы впоследствии было легче разобраться во многом, включая логическое программирование, принцип работы интерпретаторов языка логического программирования и конструкций языков типа Пролог.

Как известно, логика высказываний это язык, который изучает элементарные высказывания, т.е. высказывания (предложения), которые нельзя разбить на компоненты. Они могут быть обозначены, например символами p, g, r и называться далее как элементарные формулы. Интерпретируются как **истина** или **ложь** [**И**, **Л**].

Логика предикатов позволяет войти во внутреннюю структуру высказывания, т.е. имея представление вида $p(a,b), p(b,c), g(a,c)$ и называться уже атомарными формулами. Но интерпретируются, также как в логике высказываний, только воедино как [**И**, **Л**].

Сложные высказывания формируются с помощью связок, аналогичных союзам «и», обозначаемого в формуле с помощью символа \wedge , «или» - \vee , «если ..., то» - \supset , «тогда и только тогда, когда» - \equiv и отрицания «не» обозначаемого - \neg . Приоритетность связки в сложном высказывании устанавливается, также как и в математике, с помощью скобок. Иногда, для представления совокупности высказываний, образующих некий единый текст, используют знак «,». В логике предикатов оперируют еще кванторами общности и кванторами существования, понятиями о константе и переменной. Правила построения формул сводятся к установлению базиса, что элементарные высказывания p и q в логике высказываний (или $p(a,b)$ и $q(x,y)$ в логике предикатов), есть формулы (элементарные или атомарные формулы), а сложные высказывания формируются последовательным применением индуктивного шага $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \supset q$ и $p \equiv q$ необходимое число раз.

Истинность формул устанавливается с помощью таблиц истинности, формул более сложных - алгоритмически. Интерпретация, при которой значение истинности формулы есть I , называют *моделью* этой формулы. Формулу, допускающую одну или более чем одну модель, называют выполнимой, ни одну модель - невыполнимой. Если она допускает модель при любом значении, входящих в неё атомарных формул, то ее называют общезначимой.

Для интерпретации формул с помощью алгоритмических методов могут применяться эквивалентные преобразования с целью их приведения к неким нормальным формам.

В логическом программировании оперируют, как правило, конъюнктивно-нормальными или дизъюнктивно-нормальными формами. В данной статье мы ограничимся рассмотрением лишь конъюнктивно-нормальных форм. Для этого уместно ввести понятие о дизъюнкте.

Дизъюнкт. Дизъюнктом (clauses) называется дизъюнкция конечного числа литер, т.е. элементарных высказываний или его отрицаний. Пусть p_1, p_2, \dots, p_n и q_1, q_2, \dots, q_m множество литер, тогда формальное представление дизъюнкта может быть следующим: $(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \vee \neg q_1 \vee \neg q_2, \dots, \neg q_m)$.

Понятие о дизъюнкте имеет важное значение для практики. Описание задач и алгоритмов в терминах дизъюнктов, составляют основу логического программирования и языка Пролог в частности. Собственно Пролог оперирует только подклассом дизъюнктов, называемых хорновскими дизъюнктами, речь о которых пойдет ниже.

Пустой дизъюнкт, т.е. дизъюнкт, не имеющий ни одной литеры - единственный из дизъюнктов, который невыполним. Его обозначают через L . Определение понятия

пустой дизъюнкт очень важно в логическом программировании. С его введением появляется возможность детерминации цели в автоматическом решателе задач.

Конъюнктивно-нормальные формы (КНФ). Разобравшись с понятием о дизъюнкте, дадим сейчас определение КНФ. КНФ – это конъюнкция конечного числа дизъюнктов. Формально его можно представить следующим образом:

$$(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \wedge (q_1 \vee \dots \vee q_m) \wedge \dots \wedge (r_1 \vee r_2 \vee \dots \vee r_l).$$

В теоретико-множественном представлении КНФ, обозначенная через S , будет:

$$S = \{(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n), (q_1 \vee \dots \vee q_m), \dots, (r_1 \vee r_2 \vee \dots \vee r_l)\}.$$

Любая формула может быть преобразована в логически эквивалентную ей КНФ, используя соответствующие эквивалентные формулы [2,4,5,14 и др.] .

Определение хорновского дизъюнкта. В настоящей работе, будем рассматривать только случай для хорновских дизъюнктов, в которых допускается наличие не более одной позитивной литеры. В соответствии с этим определением, дизъюнкт $\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s$, является хорновским. Он эквивалентен импликации $(p \wedge q \wedge r) \supset s$. Если этот же дизъюнкт переписать в виде $s:-p,q,r$, то при такой записи хорновский дизъюнкт можно уподобить правилу переписывания, а множество хорновских дизъюнктов – некоторой контекстно-свободной грамматике [8, с. 49]. В ней высказывания и символ L можно рассматривать в качестве нетерминальных символов этой грамматики. Такая форма представления близка и к форме, принятой в языке программирования Пролог если литеры рассматривать как вызываемые процедуры.

Унитарный хорновский дизъюнкт – это дизъюнкт, содержащий одну – единственную положительную литеру. Формат записи: $s:-$. Этот дизъюнкт служит для представления некоторого факта.

Хорновский дизъюнкт называется точным, если он содержит одну позитивную литеру и одну или более негативные литеры. Точный дизъюнкт выражает правило, в котором негативные литеры - гипотезы, представленные соответствующими высказываниями, а позитивная литера – заключение. Формат записи: $s:-p,q,r$. Это выражение соответствует записи для точного дизъюнкта.

Негативный хорновский дизъюнкт представим в следующем виде: $L:-p,q,r$. Он соответствует понятию «цель, вопрос» или точнее «отрицание цели, вопроса». В приведенном примере цель сложная. Пример простой цели: $L:-p$.

Формат записи цели и факта в Турбо-Прологе (наиболее известная версия языка логического программирования для русскоязычной аудитории, в связи с имеющимися многочисленными русскоязычными публикациями) несколько отличается от записи, приведенной выше записи, хотя несет ту же смысловую нагрузку. Запись простой цели в Турбо-Прологе: p . Запись сложной цели в этом языке: p,q,r . Запись факта: p . Однако, чтобы не перепутать, например, факты p с

вопросами p , факты и правила записываются в одном разделе программы, обозначаемом *clauses*, а цели записываются в другом разделе программы, обозначаемом *goal*.

Логика предикатов. До настоящего момента, для описания ряда элементов применяемых в логическом программировании, мы обходились формализмом логики высказываний. Для выполнения последующих шагов в логическом программировании понадобится формализм логики предикатов.

Как уже отмечалось выше, в логике предикатов элементарное высказывание так же, как и в логике высказываний, рассматривается как нечто цельное, интерпретирующееся со значением или **ИСТИНА** или **ЛОЖЬ**, но при этом представляется возможным формализовать и внутреннюю структуру. Продемонстрируем это на простом примере. Пусть имеем элементарное высказывание:

«Язык Пролог эффективнее языка С».

В логике высказываний мы можем установить лишь истинность этого высказывания. В логике предикатов представляется также возможным представить это высказывание в виде атомарной формулы (атома) с внутренней структурой. Для этого отношение «**эффективность**» в приведенном высказывании обозначим его через P , а связанные с этим отношением объекты «**язык Пролог**» и «**язык С**» обозначим соответственно через q_1 и q_2 . Тогда формальным представлением атомарной формулы для

<u>Язык Пролог</u>	<u>эффективнее</u>	<u>языка С.</u>
объект	отношение	объект
q_1	P	q_2

будет выражение вида: $P(q_1, q_2)$. Для того чтобы оперировать понятиями логики предикатов очень важно иметь более четкое представление об атомарной формуле и не запутаться в множественности определений каждого из ее элементов. Эти определения достаточно хорошо даются в разных литературных источниках [1, 4, 7, 13,14]. И все же, как показывает практика, они трудно осваиваются студентами в процессе обучения.

Нам представляется полезным древовидное представление атомарной формулы (рис.1), предложенное в [14] для более легкого осмысления всех ее элементов во взаимосвязях.

В качестве символического обозначения в атомарной формуле отношения вообще и для P в формуле $P(q_1, q_2)$ используют термин под названием «**предикат**» или «**предикатная константа**», а объектов q_1, q_2 — «**термы**», которые выступают в роли аргументов этого предиката. Количество аргументов в предикате определяет

его арность. Например, предикат $P(q_1, q_2)$, имеет арность два, предикат P – арность нуль, $P(a, b, c)$ - три.

Итак, атомарная формула или атом – это предикатная форма (например, $p(a, b)$ или $p(a, b, x)$), представленная в префиксной форме, или некоторое отношение (например, $s=t$), представленное в инфексной форме. Инфексная форма может быть заменена на префиксную, если такое соглашение в конкретном случае допустимо. Тогда, для нашего примера, эта атомарная формула предстанет как

$$=(s, t).$$

Объектами логики предикатов являются переменные и индивидные константы. В языке предикатов содержится язык высказываний. Высказывание в логике предикатов рассматривается как предикатная константа без аргументов. Ее еще называют нульместной предикатной константой или константа арности нуль.

В естественном языке часто встречаются выражения типа «для всех мужчин», «для некоторых студентов» и множество других, аналогичных им выражений. Выражения общности типа «для всех...» в логике предикатов идентифицируют через квантор общности, «для некоторых...» – квантор существования.

Запись $\forall x P(x)$ означает «для всякого значения x $P(x)$ – истинное высказывание». Пример: $\forall x(x^2+1>0)$ – для всякого значения x неравенство $(x^2+1>0)$ - истинно.

Запись $\exists x P(x)$ означает «для некоторых значений x $P(x)$ – истинное высказывание». Например: $\exists x(3+x=3)$ – при $x=0$ равенство $(3+x=3)$ – истинно.

Следует помнить, что, если в состав формулы входит переменная, то перед тем, как этой формуле можно будет присвоить истинностное значение, переменную необходимо квантифицировать.

Основные символы языка логики предикатов это переменные, индивидные константы, предикатные константы, связки (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквивалентность), квантор общности и квантор существования.

Переменные и их роль. В математике переменные позволяют указать в структуре математического объекта те места, которые при использовании этого объекта будут заняты другими объектами. Переменные подразделяют на свободные и связанные. Например, в формуле

$$S = \sum_{i=1}^n b x_i,$$

x - свободная переменная, а i – связанная.

В логике из интуитивного понимания квантификации вытекает, что имеется связь между вхождением переменной, содержащейся в квантификации. Рассмотрим формулу

$$\forall x p(x).$$

Здесь переменная x «связана».

Область действия некоторой квантификации есть формула, к которой применяется эта квантификация, а переменная x в квантификациях $\forall x$ или $\exists x$ называется квантифицированным. Каждое вхождение переменной x в область действия этой квантификации является связным. Рассмотрим другую формулу: $\forall x p(x) \wedge q(x)$. Здесь первое вхождение переменной x – «связано», второе – «свободно».

Об интерпретации формул в логике предикатов. Так же, как и в логике высказываний, формулы логики предикатов могут быть интерпретированы со значениями [И, Л]. Однако в логике предикатов формулы состоят не только из подформулы или литер, но и из термов, т.е. переменных и функциональных форм или, как их еще называют, функциональных констант, соответственно соединенных с подходящим числом термов. Терм интуитивно означает объект. Следовательно, интерпретация должна специфицировать множество объектов, называемых областью интерпретации.

Рассмотрим один из способов построения семантики логики предикатов, который заключается в следующем:

1. Выделяется некоторое непустое множество, называемое областью интерпретации.
2. Определяется функция, сопоставляющая выражениям языка объекты, множества объектов или отношения между объектами области интерпретации.
3. На этой основе определяются важные понятия выполнимости, истинности и общезначимости формул рассматриваемого языка.

Более подробную информацию о механизме интерпретации языка логики предикатов можно найти в [4, с.62-64] и [6, с. 23-24].

В логике предикатов, в дополнении к имеющимся в логике высказываний эквивалентным преобразованиям, есть свои дополнительные схемы формул, описывающих взаимоотношения между квантификациями и связками [4, 9, 11,13].

Предваренная форма и ее связь с формулами логики высказываний. По аналогии с дизъюнктивной и конъюнктивной нормальными формами формул, приведенными в логике высказываний, приводятся к нормальной форме и формулы логики предикатов. Однако проблемы, возникающие при оперировании с квантификациями, и области их действия бывают сложными.

Проблема упрощается для случая предваренных форм. Как известно, предваренная форма есть формула, состоящая из матрицы, перед которой стоит конечная последовательность квантификаций. Формула имеет вид $Q_1x_1, Q_2x_2, \dots, Q_nx_nM$, где

символ Q означает либо \forall , либо \exists , для $i=1,2,\dots, n$ и M – формула (матрица), не содержащая квантификаций.

Эти квантификации относятся к различным переменным и их порядок – существенен. В случае повторения квантификаций для одной и той же переменной можно принять, что существенна только самая первая квантификация: это согласуется с общим правилом интерпретации квантифицированных формул [4, с. 69-70].

Интерес к предваренным формам связан с следующей теоремой: ”Для любой логической формулы существует логически эквивалентная ей предваренная форма”. Мы не будем здесь рассматривать алгоритм получения предваренной формы. Этапы получения предваренной формы можно увидеть в [4, с.70-71].

КНФ, выведенные в логике высказываний, распространяются и на логику предикатов. КНФ – это предваренная форма, матрица которой есть конъюнкция дизъюнктов.

О проблемах, возникающих при работе с предваренными формами. Любая формула логики предикатов допускает эквивалентную предваренную форму. С другой стороны, предваренная форма допускает эквивалентную, нормальную форму, хотя иногда и более громоздкую, чем исходная. Предваренные формы интересны тем, что они сохраняют выразительную силу исчисления предикатов и требуют лишь “дисциплинированного” использования механизма квантификации. Но как раз это и является источником сложности логики предикатов.

Более строгие пределы использования механизма квантификации можно установить, хотя при этом выразительная мощь механизма квантификации несколько уменьшится.

Для этого каждой формуле A сопоставляют некоторую формулу S_A - по строению простую, удовлетворяющую лишь условию, что и S_A , и A либо одновременно выполнимы или невыполнимы. Форма S_A известна под названием **сколемовской** формы. Связь между A и S_A строго слабее, чем логическая эквивалентность. Все же доказательство невыполнимости становится эффективнее, если ограничиться только формулами, представленными в сколемовской форме. При оперировании сколемовскими формами рассматривают только предваренные формы формул логики предикатов, эти формулы должны быть замкнутыми.

Как известно, замкнутыми являются те формулы, которые не имеют свободных переменных. Примеры:

1. $\forall x [Q(x) \wedge \forall y \exists z P(a,y,z)] \wedge R(x)$ - не замкнутая формула.
2. $\forall x [Q(x) \wedge \forall y \exists z P(a,y,z) \wedge R(x)]$ - замкнутая формула.

Предварительные операции по приведению произвольной формулы логики предикатов к сколемовской приводят к замкнутой предваренной форме.

Соответствующая ей сколемовская форма получится в результате проведения, так называемого, сколемовского преобразования, предназначенного для исключения \exists - квантификаций.

Клаузальная форма. Клаузальной формой называется такая сколемовская форма S_A формулы логики предикатов A , матрица которой является КНФ, т.е.

$S_A = \langle \text{последовательность квантификаций} \rangle$ и [матрица в КНФ].

Любая сколемовская форма допускает эквивалентную клаузальную форму.

Не существует алгоритма, позволяющего распознавать общезначимость, нейтральность или невыполнимость произвольной формулы логики предикатов из-за возможности неисчислимого множества ее интерпретаций. В этой ситуации интересны частные результаты, полученные Эрбраном. Они приводят к упрощенной проверке выполнимости формул.

Определение понятия эрбранова область. Основная идея, подводящая к определению эрбрановой области, состоит в следующем [4, с.76]. Клаузальная форма невыполнима тогда и только тогда, когда она принимает значение L при всех интерпретациях. Рассмотреть все возможные интерпретации невозможно, но было бы хорошо, если была бы возможность определить некую специальную область, которая была бы тесно связана с рассматриваемой клаузальной формой и чтобы форма была невыполнима тогда и только тогда, когда она принимает значение L при всех интерпретациях этой области. Такая область существует и называется она эрбрановой областью.

Фразовая форма логики предикатов. Фразовая форма логики предикатов – это способ записи формул, при котором употребляются только связки $\rightarrow, \wedge, \vee$. Ранее определенная КНФ и есть представление в фразовой форме. Литера (литерал) – это позитивная или негативная атомарная формула. Каждая фраза – это множество литер, соединенных связкой \vee . Это не что иное, как дизъюнкт определенный здесь ранее. Негативные литеры размещаются в конце каждой фразы, а позитивные в начале [1, с.53-54]. Схематический вид фразы:

$$p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \dots \vee \neg q_m.$$

Как известно, фразу можно рассматривать как обобщение понятия импликации. Например, если p и q атомарные формулы, то формула $p \vee \neg q$ в то же время может быть представлена и как $q \supset p$.

Использование терминов «фраза» и «фразовая форма» также применимо и в дальнейшем изложении материала будет использоваться наряду с терминами «дизъюнкт» и «КНФ».

Квантификация переменных во фразовой форме. Явная квантификация переменных во фразовой форме не употребляется. Однако неявно все переменные

квантифицированы. Так, во фразе $P(x,y,z) \vee Q(x,y,z)$ подразумевается наличие кванторов:

$$\forall x \forall y \forall z [P(x,y,z) \vee Q(x,y,z)].$$

Практика построения логических программ.

Логическая программа и ее интерпретация. С точки зрения теории логическая программа есть не что иное, как конъюнкция множества хорновских дизъюнктов. Это модель реального мира, представленная в виде некой конъюнктивно-нормальной формы в которой в качестве дизъюнктов используются только:

- унарный хорновский дизъюнкт (для представления некоторого факта представленного в виде простого предложения из естественного языка),
- точный (для представления некоторого правила - условного предложения из естественного языка) и
- негативный хорновский дизъюнкт (для представления некоторого вопросительного предложения из естественного языка - цели).

Это фактически множество предложений (деклараций), которые воедино как-бы образуют некий текст, аналогичный написанному на естественном языке. Читая текст на естественном языке, смысл в нем улавливаем, просматривая его по определенной стратегии, например: сверху вниз, слева направо. И, если мы имеем целью найти ответ на определенный вопрос (цель), мы просматриваем текст по этой стратегии до тех пор, пока не находим, на каком то этапе просмотра, ответ на наш вопрос или же просматриваем его до конца текста и убеждаемся что ответа на данный вопрос в этом тексте мы не имеем. Аналогично вышеизложенному, интерпретатором логических программ «просматривается» текст конкретной программы сверху – вниз, слева – направо. Вопрос сопоставляется с конкретным фактом (утверждением) или правилом (условным предложением). При сопоставлении вопроса с соответствующим фактом, получаем ответ на вопрос без всяких условий. При сопоставлении вопроса с головой соответствующего правила, появляется новая проблема - необходимость сопоставления содержания тела правила (т.е. каждого из множества под вопросов, входящих в тело правила) с соответствующими иными фактами и\или правилами. И так далее до получения полного ответа на поставленный вопрос. Такова, в общих чертах, идея интерпретации логической программы интерпретатором языка логического программирования. Подробнее о логическом интерпретаторе, его абстрактной модели, можно будет ознакомиться в следующей авторской статье, а также в [10, 11,12] .

Структура стандартной логической программы. Стандартная логическая программа есть целевое утверждение (вопрос) и произвольное количество процедур (факты и правила). Число и длина утверждений не ограничено. В реальных программах написанных, например, на языке Турбо-Пролог, предикатная константа и термы атомарной формулы обозначаются для удобства чтения на естественном языке не только отдельными буквами, но и зачастую словами или группой слов, отделенных друг от друга знаком подчеркивания. Константы в Турбо-Прологе начинаются с прописной буквы или арабской цифры, переменные с заглавной или знака подчеркивания. Пример программы, написанной на языке Турбо-Пролог:

CLAUSES

parinte(ion,nicolae).

parinte(nicolae,sergiu).

parinte(sergiu, diana).

bunei(X,Z):-

parinte(X,sergiu),

parinte(sergiu,Z).

GOAL

bunei(X, diana).

Текст данной программы содержит все три типа хорновских дизъюнкта: три факта (унарных дизъюнкта), одно правило (точный хорновский дизъюнкт) и один вопрос или одна цель (негативный дизъюнкт). При согласовании цели *bunei(X, diana)* *X* связывается со значением *nicolae*.

Порядок (последовательность), в котором процедуры (факты и правила) появляются в программе, логического значения не имеет, т.к. каждая процедура устанавливает некоторый факт о решаемой задаче. Все же принято собирать процедуры для одной и той же предикатной константы в одну группу.

Заключение

В статье дан краткий обзор элементов логического программирования как теории с демонстрацией их применения в одной из реализаций языка Пролог.

С методологической точки зрения и необходимости в ограниченный объем вложить минимально необходимые сведения из теории акценты ставились лишь на главных аспектах, оставив вне рассмотрения многие из альтернативных направлений или направлений второстепенного характера. В то же время в таком представлении материал статьи может представить определенный интерес для тех, кто хотел бы ознакомиться, в общих чертах, с теорией и практикой логического программирования.

Литература

1. Малпас Дж. Реляционный язык Пролог и его применение: Пер. с англ. Под. Ред. В.Н. Соболева – М.: Наука. Гл. ред. Физ.- мат.лит., 1990-464 с.
2. Макаллистер Дж. Искусственный интеллект и Пролог на микроЭВМ/Пер. с англ.- М.: Машиностроение, 1990.- 240 с.
3. Братко И. Программирование на языке Пролог для искусственного интеллекта. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990 – 560 с.
4. Тей А., Грибомон П., Луи Ж. и др. Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию. Пер. с франц. Пермякова П.П. Под. ред. Гаврилова Г.П. – М., «Мир», 1990 – 432 с.
5. Хоггер К. Введение в логическое программирование: Пер.с англ.М:-Мир,1998-348 с.
6. Логика и компьютер. Моделирование рассуждений и проверка правильности программ / Н.А. Алешина, А.М. Анисов, П.И. Быстров и др.–М.: Наука,1990–240 с.
7. Ковальски Р. Логика в решении проблем: Пер. с англ. – М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1990. – (Пробл. искусств. интеллекта) - 280 с.
8. Лорьер Ж.-Л. Системы искусственного интеллекта: Пер.с франц.- М.: Мир, 1991.- 568 с.
9. Кузнецов О.П., Адельсон – Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера – 2 –е изд., перераб. и доп. М.: Энергоатомиздат, 1988. - 480 с.
10. Стерлинг Л., Шапиро Э. Искусство программирования на языке Пролог: М., Мир, 1987.
11. Пелин Н. Элементы логического программирования. Ch.: Nestor, 2000. - 171 стр.
12. Pelin S., Pelin N. Programarea logică în proiectarea sistemelor informaționale.- Ch.: UST, 2011.-221 p.
13. Pelin N., Pelin S. Aspecte teoretice ale programării logice. Studia universitatis. Revistă științifică. Științe exacte. Nr. 3. CEP USM. Ch.: 2008.- pp. 81-72.
14. www.pdc.dk
15. www.prolog.md

REFERITOR LA ACTIVITATEA ȘTIINȚIFICĂ A PROFESORULUI ALEXANDRU ȘUBĂ

Mitrofan CIOBAN, academician,
doctor habilitat, profesor universitar
Universitatea de Stat din Tiraspol

Abstract. Sunt prezentate unele repere importante din viața și activitatea științifică a Profesorului Alexandru Șubă cu ocazia conferirii titlului onorific de Doctor Honoris Causa al Universității de Stat din Tiraspol care au fost expuse în cadrul ședinței solemne a Senatului Universității de Stat din Tiraspol la 28 Aprilie 2015.

Onorată asistență. Stimați colegi.

Cu ocazia **celebrării** în cadrul ședinței extinse de astăzi, avem bucuria, onoarea și privilegiul de a întâlni un reprezentant eminent al științei și spiritului național, un colaborator distins și susținător al Universității noastre, **Profesorul Alexandru Șubă**, șef al Laboratorului Ecuații Diferențiale al IMI al AȘM. Profesorul Alexandru Șubă a demonstrat calitățile de un savant talentat în domeniul științelor matematice, înalt apreciat de comunitatea științifică din țară și de peste hotare, ce se află într-o activitate științifică prodigioasă.

Permiteți-mi să trec în revistă unele repere importante din viața și activitatea Domnului Profesor Alexandru Șubă.

Dl Alexandru Șubă s-a născut la 02decembrie 1953 în satul Dănceni, raionul Ialoveni într-o familie de țărani. În anul 1969 a absolvit școala de opt ani din satul natal, iar în 1971 - școala medie din or. Ialoveni. În același an a fost admis la studii la Facultatea de Fizică și Matematică a Universității de Stat din Moldova. Din anii studenției a decis să-și dedice viața cercetărilor științifice în domeniul ecuațiilor diferențiale și devine membru al seminarului științific fondat și condus de academicianul Constantin Sibirschi. După absolvirea universității în anul 1976, în cadrul Institutului de Matematică și Informatică al AȘM ocupă un post modest de laborant superior (1976-1981) și simultan continuă studiile în doctorantura Institutului de Matematică și Informatică al AȘM (specialitatea 111.02 – ecuații diferențiale). În anul 1980 finisează studiile doctorale cu prezentarea tezei de doctor în științe fizico-matematice “*Sisteme semidinamice pe dreaptă și în plan*” pe care o susține cu succes în anul 1982 în cadrul Universității din Sankt-Petersbourg, Rusia. În această lucrare pentru prima dată se face o analiză profundă a sistemelor semidinamice disperse care a condus la crearea axiomaticii sistemelor semidinamice în anul 1984. În continuare ocupă posturile de cercetător științific inferior (1981-1985), cercetător științific superior

(1985-1990), director adjunct pentru știință (2010-2015), șef al Laboratorului Ecuații Diferențiale (2015 – prezent).

Experiența didactică a domnului profesor Alexandru Șubă a demarat încă din anul 1990 în funcție de conferențiar universitar la Universitatea de Stat din Moldova, iar din anul 1992 și la Universitatea de Stat din Tiraspol. Din 2007 este profesor universitar la aceste universități. Titlul de profesor universitar l-a obținut în baza prezentării Senatului Universității de Stat din Tiraspol.

În anul 1999 dl Alexandru Șubă a susținut cu succes teza de doctor habilitat în științe fizico-matematice „Mișcări periodice și problema deosebirii centrului de focar”.

În perioada 1992-2015 profesorul Alexandru Șubă a desfășurat o activitate științifică fructuoasă, reușind să creeze școala științifică în domeniul teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale, recunoscută în lume drept Școala Profesorului Alexandru Șubă. Sub conducerea profesorului Alexandru Șubă au fost susținute 4 teze de doctor în științe matematice și o teză de doctor habilitat în acest domeniu. Toți discipolii Profesorului Alexandru Șubă sunt absolvenți ai universității noastre. Profesorul Alexandru Șubă acordă cu abnegație și dăruire de sine ajutorul necesar în organizarea cercetărilor în domeniul științelor matematice doctoranzilor, masteranzilor și studenților.

Domnul profesor Alexandru Șubă a publicat peste 100 de lucrări științifice, o monografie, 3 manuale.

Direcția principală care cuprinde sfera preocupărilor sale de cercetare ține de ”*Sisteme dinamice: teorie topologică, integrabilitate și orbite speciale*”.

De această direcție sunt legate următoarele probleme abordate de către dl profesor și discipolii sai:

1. Dezvoltarea și sistematizarea teoriei topologice a sistemelor disperse și semidinamice.
2. Problema integrabilității Dulac a sistemelor dinamice.
3. Problema centrului și focarului în sens Poincare.
4. Problema $GL(2, \mathbb{R})$ –Orbitelor.
5. Problema clasificării sistemelor diferențiale cu drepte și curbe de ordinal doi invariante.

Profesorul Alexandru Șubă a obținut următoarele rezultate relevante:

1. Unele clase de ecuații diferențiale cu argument întârziat, de ecuații integrale, de ecuații funcțional-diferențiale, de ecuații cu derivate parțiale generează includeri diferențiale și sisteme semidinamice fără unicitate. Este important și faptul că pentru sistemele semidinamice (cu unicitate și fără) se definesc majoritatea noțiunilor de bază a teoriei sistemelor dinamice.

1.1. Au fost sistematizate rezultatele de bază a sistemelor semidinamice. În particular, a fost elaborat un sistem de axiome pentru această teorie. Ca rezultat, a fost elaborată teoria topologică a sistemelor semidinamice fără unicitate.

1.2. Menționăm că pentru sistemele semidinamice semicontinui plane s-a demonstrat că existența punctelor nerătăcitoare implică existența punctelor singulare.

2. Fie că sistemul

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y), (*)$$

este cubic, pentru el punctul $(0, 0)$ este singular și fie λ_1, λ_2 rădăcinile ecuației caracteristice corespunzătoare lui $(0, 0)$.

Rezultatul principal ce se referă la sistemul dat se include în următoarea teoremă, care conține condițiile necesare și suficiente ca un sistem diferențial polinomial să posede centru Dulac:

2.1. Fie că pentru sistemul cubic (*) punctual $(0, 0)$ este singular și $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$. Atunci, sistemul (*) are în $(0, 0)$ centru Dulac dacă și numai dacă $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ au un factor comun ce începe cu factori liniari.

3. Problema stabilității are la origine lucrările revoluționare ale lui Copernic și Kepler, care au răsturnat conceptul cosmologic al lui Ptolomei despre existența unui univers geocentric, demonstrând că sistemul nostru solar este heliocentric și traectoriile planetelor și corpurilor din sistemul solar sunt de o formă eliptică. S-a observat că aceste traectorii pe alocuri au unele perturbări. Aceste perturbări sunt cauzate de influența unor corpuri cerești necunoscute și invizibile cu mijloacele astronomice existente la moment. Acestea au dus la descoperirea a noi planete și corpuri cerești și la problema vitală - cât de stabil este sistemul nostru solar? Au urmat lucrările lui Pierre Laplace (1773), Louis Lagrange (1776), Simeon Denis Poisson (1808), Spiru Haret (1878). Dacă primii considerau că sistemul solar totuși este stabil, Spiru Haret cu noi metode fine a stabilit instabilitatea sistemului solar. Problema centrului și focarului, legată de problema stabilității la general, pentru sistemele polinomiale cunoaște o dezvoltare de peste o sută de ani, începând cu lucrările clasice ale lui H.Poincare și A.M.Lyapunov.

Rezultatele principale în această direcție sunt:

- 3.1. Generalizarea metodei Darboux de integrare în cazul sistemelor diferențiale polinomiale cu punct singular de tipul centru sau focar.
- 3.2. Rezolvarea problemei centrului pentru sistemele diferențiale cubice cu patru drepte invariante.

- 3.3. Rezolvarea problemei centrului pentru sistemele diferențiale cubice cu trei drepte invariante.
- 3.4. Rezolvarea problemei centrului pentru unele clase de sisteme cubice cu coeficienți simetrici.
- 3.5. Clasificarea și cercetarea calitativă completă a sistemelor cubice cu șapte drepte invariante.
- 3.6. Clasificarea și cercetarea calitativă completă a sistemelor cubice cu infinitul degenerat și care posedă exact cinci sau exact șase drepte invariante.
- 3.7. A fost elaborată o *axiomatizare* a configurațiilor de drepte realizabile a unui sistem diferențial.

4. Cercetările orbitelor unui sistem diferențial țin de teoria elaborată de profesorul Mihail Popa, Doctor Honoris Causa a universității noastre, și care se referă la interacțiunea algebrelor Lie, sistemelor de ecuații diferențiale și invarianții algebrici ai acestora. Profesorul Alexandru Șubă:

- 4.1. A demonstrat că dimensiunea $GL(2, \mathbb{R})$ -orbitei a oricărui sistem diferențial polinomial este diferită de unu.
- 4.2. A propus o clasificare a sistemelor diferențiale polinomiale în raport cu dimensiunile $GL(2, \mathbb{R})$ -orbitelor.

Rezultatele obținute de Domnul Profesor Alexandru Șubă au fost comunicate la diferite congrese, conferințe, simpozioane și seminare științifice din Republica Moldova, România, Belarusi, Polonia, Franța, Canada, Rusia, Ucraina. Aceste rezultate pot fi aplicate nu numai la continuarea cercetărilor matematice, dar și la soluționarea diverselor probleme din mecanica cerească, astronomie, biologie etc.

Pe parcursul activității Dumnealui a participat activ la organizarea manifestărilor științifice de diverse ranguri. A fost membru a diferitor comisii și consilii referente la atestarea cadrelor științifice. Este unul din fondatorii și conducătorii seminarului științific „Sisteme Dinamice” din cadrul UST.

Domnul profesor Alexandru Șubă participă activ la executarea lucrărilor în cadrul proiectelor științifice internaționale și instituționale:

1. Grantul “Méthode algébro-géométriques et de calcul formel en systèmes dynamiques” (Canada–Franța–Moldova, 1999–2001), finanțat de Consiliul științific al Agenției Universităților Francofone).

2. Colectivul de Cercetare “Flux”. Proiectul ”Probleme nestationare la limită și comportări asimptotice ale soluțiilor” (2001–2005), finanțat de Guvernul Rep. Moldova.

3. Proiectul “Studiul calitativ al sistemelor dinamice și aplicații” (2001–2002), finanțat de Guvernul Rep. Moldova.

4. Grantul “Asymptotic behavior of nonautonomous dynamical systems with applications on hidronamic, meteorology and oceanology” (U.S.A. –Moldova, 2001–2003), finanțat de U.S. Civilian Research and Development Foundation for the independent States of the Former Soviet Union (U.S.A.).

5. 12.839.08.05F Probleme de studiu local și global al singularităților câmpurilor vectoriale polinomiale. Program de Stat (Rep. Moldova), 01.03.2012 – 2013;

6. FP7-PEOPLE-2012-IRSES-316338 "Dynamical systems and their applications". Programului FP7-PEOPLE-IRSES (SEVENTH FRAMEWORK PROGRAMME, Marie Curie Actions, People, International Research Staff Exchange Scheme), 01.10.2012-30.09.2016.

Cele expuse anterior sunt dovadă a faptului că dl profesor Alexandru Șubă este o personalitate marcantă a vieții științifice din Republica Moldova, are o contribuție esențială în dezvoltarea științelor matematice, în special a sistemelor dinamice, î-și aduce aportul la formarea și evaluarea cadrelor științifice din țară, la consolidarea și aprofundarea relațiilor de colaborare dintre diverse centre științifice din țară și de peste hotare.

Mult stimate Domnule profesor Alexandru Șubă, finalizând succinta trecere în revistă a valoroaselor Dvoastre realizări, vă felicit cu conferirea titlului onorific de **Doctor Honorius Cauza** al Universității de Stat din Tiraspol și sunt încredințat că colaborările dintre diverse centre științifico-metodice vor spori în viitor.

MATEMATICA ÎN VIAȚA MEA

Alexandru ȘUBĂ, dr. hab., prof. univ.

Institutul de Matematică și Informatică al AȘM

Abstract. Articolul conține discursul autorului la ședința lărgită a Senatului Universității de Stat din Tiraspol din 28 aprilie 2015, când a avut loc înmânarea diplomei și atributelor de Doctor Honoris Causa.

Stimate Domnule Rector, stimați Membri ai Senatului, Onorată asistență!

Honoris causa este o locuțiune în latină, adică un grup de cuvinte cu sens unitar, și care înseamnă „datorită meritelor” și se referă atât la meritele profesionale, cât și la buna reputație. Când aceste cuvinte mi se atribuie mie, parcă ceva mă furnică. Mi se par mai potrivite vorbele lui Ion Creangă “ia, am fost și eu, în lumea asta, un boț cu ochi, o bucată de huma insuflețită din Dănceni, care nici frumos până la douazeci de ani, nici cuminte până la treizeci și nici măcar bogat până la patruzeci nu m-am facut...”

Mă trag din satul Dănceni, raionul Ialoveni, sat cu oameni gospodari, femei harnice și fete frumoase. Și acum mă întreb, ce-am căutat eu în 1985 la Пятый Тираспольский симпозиум по топологии и ее приложениям, organizat de Universitatea Dumneavoastră, ca s-o întâlnesc la Tiraspol pe viitoarea mea soție. Până astăzi încă n-am ajuns cu ea la un numitor comun, cine și cui i-a stricat viața. Dacă eu mai zic că glumesc, Dumneaei spune că nu-i arde de glume. Și mă întreb: să fie oare matematicienii atât de stricăcioși? Deci, cum a-ți sesizat, chiar de la începuturi mă leagă de UST amintiri plăcute.

Se spune, că fiecare om se naște cu steaua sa. Tare mai dorea mama să fim învățați. Fiind mezin, și fiindcă surorile mele la școală trăgeau mâța de coadă și schimbau cartea cu clubul, mare speranțe î-și puneau părinții în mine, mai ales, că mare scânceală făceam de nu-mi citeau surorile în glas temele lor de la școală. Urmăreau sărmanii părinți cu mare interes la orice semn de înțelepciune din partea mea. Mai apoi, de la ei am auzit, precum, pe când eram destul de mic mă luase tata la niște prieteni de-ai lui în satul Ruseștii Noi. Se adunaseră în gărliciul unui beci destul de mare, a unui fost boier, naționalizat de sovietici. Ocupați cu vorba, și nu numai, nu observaseră când dispărusese. La un moment, săriră toți ca arși și alergară în beci, de spaimă să nu fi dezbătut cepurile de la butoaiile cu vin. Aceasta, nu-mi trecură prin mintea mea de copil. Ajunsesem cu numărul butoaielor la cel de-al doilea rând și mare a fost scâncitul când m-au luat de-acolo fără a termina numărul. Cine m-a învățat să număr, nu știu, precum nu țin minte nici acest episod. Așa vorbeau acasă. Perifrazând poetul, a-și spune „Din număr Doamne am apărut, în număr mă preface”.

Am avut parte de profesori buni de matematică. Este vorba de Ion Gheorgheșteanu, clasele V-VII, și Parascovia Tambură, clasele IX-X. Când dl Gheorgheșteanu ne întrebă la prima lecție de aritmetică care este cel mai mare număr, am sărit repede în picioare, să nu mi-o ia alții înainte, și am spus că acest număr este un sextilion, că așa mi-a spus vărul

Petrică care învăța la o școală din Hâncești și pentru copiii din Dănceni tot ce spunea el era purul adevăr. Imediat m-a contrazis Gheorgheșteanu, dar m-a luat la ochi de elev isteț și m-a împovărat cu multe exerciții și probleme de matematică. Parascovia Tambură a fost profesoara de matematică nu numai a mea, ci și a dlui profesor Mihail Popa, Doctor Honoris Causa și Dumnealui din 2013 a Universității de Stat din Tiraspol (cu sediul în Chișinău). Așa a conceput Providența ca să avem consecutiv aceeași profesoară de matematică și tot consecutiv să obținem acest titlu onorific. Mă adresez îndeosebi studenților, viitorii pedagogi: nu stingeți licăritul din ochii elevilor, ci alimentați-l cu noi cunoștințe, și răsplata morală vă va fi mare. La discursurile academice ale ilustrului matematician și fizician francez Simeon-Denis Poisson (1781-1840) asista într-o bancă din urmă un bătrânel, însurit de ani. La terminarea lecțiilor lui Poisson, mereu se lăuda celor din jur: „am spus eu că dintr-un Poisson mic o să crească un Poisson mare”. I-a fost învățător la clasele primare și poisson din franceză înseamnă pește. Dragi studenți, vă rog frumos, ca pe viitor să umpleți Republica Moldova de Poissoni și toată lumea să vină să ne pescuiască înțelepciunea.

În anii de studenție, la ochi m-a luat academicianul Constantin Sibirschi, când i-am cerut să-i țin eu, în locul lui, a doua prelegere. Mi-a permis și totodată, m-a luat la ochi.

Colaborarea cu Universitatea de Stat din Tiraspol a început în anul 1991 fiind conducător științific al tezei de licență a dlui Dumitru Cozma. S-au scurs de-atunci 24 ani și nici n-am observat cât de mult a crescut timpul în urma mea. Am fost invitat în or. Tiraspol la susținerea tezei Dumnealui, dar ceva mă reținuse. De plecam, mă apuca acolo războiul de pe Nistru. Președintele Comisiei de Stat al examenelor de licență, profesorul Vasile Neagu arestat, și de eram și eu pe acolo i-ași fi ținut de urât în celulă.

Ce a urmat după război vă este bine cunoscut. Cât curaj a avut corpul profesoral al Universității Dumneavoastră ca să-și lase familiile și să schimbe casele din Tiraspol cu o cameră de cămin în Chișinău. Nici condițiile de lucru nu erau aici perfecte. Î-mi amintesc, unele momente de pe când aveam ore de matematică la Facultatea de Geografie care închiria o jumătate de etaj de pe Bulevardul Ștefan cel Mare și Sfânt, 200. Din lipsă de bani se întârzia cu plata chiriei și deseori patronii ne opreau iarna încălzirea și uneori, ne închideau și apa. Cu promoroacă pe bănci și fără apă, dar setoși de cunoștințe, lecțiile se petreceau și nimeni nu se plângea. Câte-odată, pentru a se încălzi cât de cât studenții, țineam cu ei orele la Universitatea de Stat din Moldova, unde căseau mâțele de cald. Tot acolo, în sezonul rece, ca în cel cald să revenim acasă, un grup de profesori, împreună cu unii studenți și masteranzi, formasem un seminar științific cu ședințe săptămânale. În cadrul lui crescuseră primii mei elevi. Mai târziu, ne uniram forțele cu dl profesor Mihail Popa în crearea unui singur seminar „Ecuatii diferențiale și algebre”, seminar ce lucrează ca ceasul și astăzi. Un susținător înflăcărat și însuflețitor al seminarelor științifice a fost și este dl academician Mitrofan Cioban care, de fapt, pentru merite deosebite a devenit

membru al seminarului „Ecuții diferențiale și algebre”. Este și asta o onoare, poate mai mică ca cea de Doctor Honoris Causa, dar tot e o cinste mare.

La început, nici nu conștientizasem ce roade poate să dea lucrul în seminare. La ședințele lui se studiau cărți și articole ce țineau de domeniul de interes și se expuneau unele rezultate de-ale noastre. Și, de la un moment, au început să apară tezele de doctorat ca ciupercile după ploaie. În mediu, s-au susținut mai mult de o teză pe an și când te gândești, că e vorba de matematică, unde, fără originalitate, imediat ești respins de comunitatea științifică internațională. Deși bogați în sărăcie, n-ași spune că membrii seminarului nostru nu sunt primblați prin lume. Nu mai vorbesc de Belarus, Rusia, România, Slovenia, Polonia, Franța. Dintre ei au ajuns chiar și în Canada și vara aceasta doi sunt așteptați pe două luni în China și susținuți financiar de Comunitatea Statelor Europene.

Până a avea ore la Universitatea din Tiraspol, așa modest cum sunt, mi se părea că mai bun pedagog ca mine nu există. Dar, degrabă am rămas rușinat de părerile mele. Mai buni profesori ca la UST n-am întâlnit. De la ei multe am învățat și eu. Atmosfera colegială de aici m-a făcut să mă simt nu ca acasă, cum spun alții, ci acasă. Din păcate, din rândurile noastre au plecat la cel de sus mulți pedagogi de excepție. Ași înșira multe nume într-o lacrimă, dar e prea dureroasă răscolirea bunei amintiri pentru mine și pentru voi. Să le aducem onorurile respective și să știți, că tot timpul, mai ales la cei 85 ani, Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul în Chișinău) a avut și are cu ce se mândri.

Deseori ne întrebăm, ce e Matematica ? Potrivit dicționarelor, matematica este știința care se ocupă cu studiul mărimilor, al relațiilor cantitative și al formelor spațiale (cu ajutorul raționamentului deductiv). Mai mult ca atât, aș spune că matematica este o lume aparte, o lume corectă în toate, o lume în care n-are loc minciuna și hoția, o lume unde se stă liber de vorbă cu infinitul. În biblie se scrie, că la început, Dumnezeu a creat cerurile și pământul. Observați, cerurile la plural. Iarăși ne adresăm la dicționar: Se spune că cerul este un spațiu cosmic nesfârșit în care se află aștrii. Atenție, spațiu nesfârșit. Prin urmare, după un cer, adică o infinitate, urmează o altă infinitate. Dumnezeu, de la începuturi, opera cu infinitul, așa cum operează matematicienii, deci aceștea sunt aleșii lui și destinați a purta crucea în lumea reală. Cu câtă amărăciune și ironie, câteodată, îi privim din lumea noastră ideală pe cei din lumea reală

Acolo, unde matematica era în prestigiu, se construiau piramide, clădiri zgârâe nori și se face rând la casele de bilete pentru a pleca pe alte planete. Dar acolo, unde se neglijează matematica, se calcă prin gropi, îngheață merele pe copaci și dispar banii din bănci. Și ne mai întrebăm, de ce suntem săraci ?

Aici, la Universitatea de Stat din Tiraspol (cu sediul în Chișinău), mi s-au oferit condiții ideale de a mă realiza ca om și cercetător, pentru ce î-mi plec smerita frunte în fața Dumneavoastră și vă mulțumesc. La această Universitate sunt adevărați pedagogi și

oameni de știință în toate domeniile în care se pregătesc cadre. Cine ar putea să-și închipuie matematica în Republica Moldova fără academicianul Mitrofan Cioban, care este un promotor și susținător neobosit al tineretului cu scilipiri în matematică. Mi-i groază să mă gândesc, ce-am fi, de n-ar fi. Aproape un an în urmă, Domnul Rector, profesorul universitar Laurențiu Calmuțchi, î-mi spusese, că dacă la celelalte merite se va mai adăuga și susținerea cu succes a tezei de doctor habilitat a dlui Dumitru Cozma, atunci se poate pune problema de a-mi oferi distincția de astăzi. Zis și făcut, pentru ce îi mulțumesc. La fel, aduc sincere mulțumiri senatului Universității de Stat din Tiraspol pentru onoarea oferită prin acordarea Titlului de Doctor Honoris Causa. Multe am crezut și am visat pe lumea aceasta, dar la o zi ca cea de astăzi nici n-am crezut, nici n-am visat.

În încheiere, î-mi rămâne să vă spun, că așa de dragi cum mi-ați fost ieri, cum î-mi sunteți astăzi și cum î-mi veți mâine, chiar nu mi-ați fost niciodată. Mulțumesc tuturor celor prezenți, dorindu-vă la toți sănătate, succese și noi realizări în promovarea științei și învățământului spre binele societății noastre. Așa să ne ajute Dumnezeu.